MATHEMATIK

FÜR HÖHERE TECHNISCHE LEHRANSTALTEN

Band 1

von

Heinz-Christian SCHALK, Gerald F. STEINER

und

Christa BINDER, Walter FERTL, Friedrich FIRNEIS, Werner GEMS,
Manfred GURTNER-WÜRL, Dieter LEHNER,
Andreas PLIHAL, Andreas STEINWENDER, Nikolaus ZANGERL

unter Mitarbeit der
Verlagsredaktion Mathematik

KOPIERVERBOT

Wir weisen darauf hin, dass das Kopieren zum Schulgebrauch aus diesem Buch verboten ist.
§ 42 Absatz (3) der Urheberrechtsgesetznovelle 1996: „Die Befugnis zur Vervielfältigung zum eigenen Schulgebrauch gilt nicht für Werke, die ihrer Beschaffenheit und Bezeichnung nach zum Schul- oder Unterrichtsgebrauch bestimmt sind."

RENIETS VERLAG

Gedruckt auf chlorfrei gebleichtem Papier

Dieses Schulbuch wurde auf der Grundlage der Verordnung des Bundesministers für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten über die Lehrpläne für Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten (= „Rahmenlehrpläne“, d. h. die Auswahl und die Gewichtung der Inhalte erfolgt durch die Lehrkräfte), BGBl. Nr. 302/1997, erstellt und mit Bescheid des Bundesministeriums für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten vom 21. März 1998, GZ 41.031/1-III/D/13/97, als für den Unterrichtsgebrauch an Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten für den I. Jahrgang im Unterrichtsgegenstand Angewandte Mathematik geeignet erklärt.

Es wurde weiters vom Bundesministerium für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten als für den Unterrichtsgebrauch an folgenden Schularten im Unterrichtsgegenstand Mathematik und angewandte Mathematik geeignet erklärt:

- technische, gewerbliche und kunstgewerbliche Fachschulen für die 1. Klasse
- Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten für Berufstätige für den I. Jahrgang
- Vorbereitungslehrgänge für Berufstätige für das 1. Semester
- Höhere land- und forstwirtschaftliche Lehranstalten für den I. Jahrgang

Mit freundlicher Genehmigung des Bundesministeriums für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten (früher: Bundesministerium für Unterricht und Kunst bzw. Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Sport) wurden Inhalte aus der zweiten Experimentalfassung der Lehrzielbank für das berufsbildende Schulwesen (Mathematik für berufsbildende mittlere und höhere Schulen) entnommen.

Mit freundlicher Genehmigung der Texas Instruments Incorporated wurden Abbildungen und Texte aus „Erste Schritte mit dem Voyage™ 200“ entnommen. Für die diesem Werk entnommenen Teile gilt: Copyright © 2002 Texas Instruments Incorporated. Autoren und Verlag danken der Texas Instruments Incorporated für die gute Zusammenarbeit.

Bildquellennachweis:

1 — Foto Watzlawek / Reniets Verlag GmbH
13 — Bildarchiv der Österreichischen Nationalbibliothek (ÖNB) Wien
25 — Bildarchiv der ÖNB Wien
43 — Bildarchiv der ÖNB Wien
52 — Bildarchiv der ÖNB Wien
59 — Albertina, Wien
78/oben — Kuka Schweißanlagen + Roboter GmbH
78/unten — Kuka Schweißanlagen + Roboter GmbH
80 — Foto Maresch
83 — aus: Kleine Enzyklopädie Mathematik (Seite 86), Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main
99/Aufgabe 721 — Tarbuk Autohaus GmbH
99/Aufgabe 722 — Tarbuk Autohaus GmbH
99/Aufgabe 723 — AVIS Werbung GmbH / Pumpenfabrik Ernst Vogel
100/Aufgabe 726 — Mercedes Katalog
100/Aufgabe 729 — AEG AG
101 — Dr. G. Draxler / Institut für Pflanzenphysiologie
102 — Mayer & Cie. GmbH & Co.
105 — Foto Fürböck
119 — ÖBB Lichtbildstelle
124 — United States Information Agency
125 — Foto Burger / Reniets Verlag GmbH
129 — Deutsches Museum München
130 — Fotostudio red point b. v.
132 — Bildarchiv der ÖNB Wien
138 — Universitäts-Bibliothek Basel
149 — Bildarchiv der ÖNB Wien
150/links — Bildarchiv der ÖNB Wien
150/rechts — Bildarchiv der ÖNB Wien
151 — Cincinnatti Milacron
152/Aufgabe 1000 — FJORD BOATS
152/Aufgabe 1007 — Alfred Kärcher GmbH
152/Aufgabe 1008 — Elin Union AG
153/oben — Foto Burger / Reniets Verlag GmbH
153/unten — Foto Knoll / Stern und Hafferl
159 — Eternit-Werke Ludwig Hatschek AG
160 — Werksfoto Waagner-Biro AG / Fotograf: Steffen
161/Aufgabe 1045 — Opel Austria GmbH
161/Aufgabe 1049 — Tarbuk Autohaus GmbH
161/Aufgabe 1050 — AVIS Werbung GmbH/ Pumpenfabrik Ernst Vogel
161/Aufgabe 1052 — Semperit Reifen AG
163 — Mayer & Cie. GmbH & Co.
165 — Bildarchiv der ÖNB Wien
170 — Foto L. Mallaun / © Österreichische Fremdenverkehrswerbung
174 — Bildarchiv der ÖNB Wien
175 — Bildarchiv der ÖNB Wien
176/oben — Bildarchiv der ÖNB Wien
176/unten — Universitätsbibliothek München
194 — United States Information Agency
197/links — Mazda Austria Ges. m. b. H.
197/rechts — Mazda Austria Ges. m. b. H.
198 — Eternit-Werke Ludwig Hatschek AG
199 — Department of main roads photograph
205 — Sammlung und Foto Huber
206 — Sammlung und Foto Huber
207/oben — Sammlung und Foto Huber
207/unten — Sammlung und Foto Huber
210 — Foto Becvar
211 — Sammlung und Foto Huber
221 — Gewista-Werbegesellschaft m. b. H.
223 — MBB Erno Raumfahrttechnik GmbH
235/Aufgabe 1348 — Foto Burger / Reniets Verlag GmbH
235/Aufgabe 1349 — Österreichische Philips Industrie GmbH
239 — Stadtverwaltung Olsberg (Deutschland)
244/Hauptspalte — Foto 0-451-001 / © Österreichische Fremdenverkehrswerbung
244/Außenspalte — Firma Rudolf & August Rost
250/Aufgabe 1394 — Foto Burger / Reniets Verlag GmbH
250/Aufgabe 1396 — Ambassade de France à Vienne
253 — Foto RMS / B. Stingl
264/Aufgabe 1469 — Amt der Wiener Landesregierung - MA 29 (Brückenbau)
264/Aufgabe 1471 — Foto Burger / Reniets Verlag GmbH
265ff. — mit freundlicher Genehmigung der Texas Instruments Incorporated

Schulbuchvergütung/Bildrechte: © VBK/Wien

An der Zusammenstellung des vorliegenden Bandes nach dem HTL-Lehrplan 1997 haben Anton BURGER und Monika WATZLAWEK von der Verlagsredaktion der RENIETS VERLAG GmbH mitgewirkt.

Einband: IBM Computerkunst, Komposition von Jean-Claude HALGAND (Frankreich)

Lektorat: Karl PUFLER

Zu diesem Buch gibt es ein Lösungsheft, das unter der Schulbuchnummer 5.590 in Buchhandlungen bestellt bzw. gekauft werden kann (Direkt-Lieferungen vom Verlag an Privatkunden sind nicht vorgesehen!):
SCHALK - STEINER, Mathematik für Höhere technische Lehranstalten, Lösungen zu Band 1 (bearbeitet von Andreas PLIHAL, Claudio ZACCARELLI und der Verlagsredaktion Mathematik)
Die in diesem Lehrbuch mit ▭ gekennzeichneten Aufgaben bzw. Aufgabenteile werden im Lösungsheft vollständig durchgerechnet!

Schulbuch-Nr. 5.589
ISBN-13: 978-3-900648-55-8
ISBN-10: 3-900648-55-7

1. Auflage 1986
3. Auflage 1998, Nachdruck 2007. Alle Drucke der 3. Auflage sind nebeneinander verwendbar.

WICHTIGER HINWEIS: Nach den Lehrplänen ab 1997 ist nur mehr die 3. Auflage zu verwenden.

© 1998 RENIETS VERLAG GMBH, Wien
Alle Rechte vorbehalten! Jede Art der Vervielfältigung, auch auszugsweise, gesetzlich verboten.
Satz, Computergrafik und Druck: ERNST BECVAR GMBH, Wien

INHALTSVERZEICHNIS

WIEDERHOLUNG UND VERTIEFUNG MATHEMATISCHER GRUNDBEGRIFFE

Schulbeginn! Hoffnungsvolle Schülerinnen und Schüler sitzen im Mathematikunterricht. In diesen ersten Wochen kann es schon einmal vorkommen, dass die Lehrkräfte der berufsbildenden Fächer zur Mathematiklehrkraft kommen und fragen, warum die Schülerinnen und Schüler

(1) keine einfachen Gleichungen lösen können,
(2) nichts über das Rechnen mit Zehnerpotenzen wissen,
(3) nicht mit Überschlagsrechnungen vertraut sind,
(4) .....?

wo das doch „schon längst im Mathematikunterricht vergangener Jahre behandelt wurde". Die Mathematiklehrkraft steht also vor der schwierigen Aufgabe, ihren Schülerinnen und Schülern möglichst viel innerhalb kurzer Zeit beizubringen, denn in den berufsbildenden Fächern wird dieses mathematische Rüstzeug schon dringend benötigt.

(1) $ax + by + cz = d$, $y = ?$
(2) $10^4 \cdot 10^3 = ?$
(3) Überschlagswert von 1 : 98,7?

Wir wollen nun versuchen, diese Wünsche zu erfüllen. Dabei beschreiten wir folgenden Weg: Statt lange zu theoretisieren stellen wir einfach die Probleme anhand von Beispielen dar und verweisen hinsichtlich näherer Erklärungen — wenn immer das möglich ist — auf andere Kapitel dieses Buches.

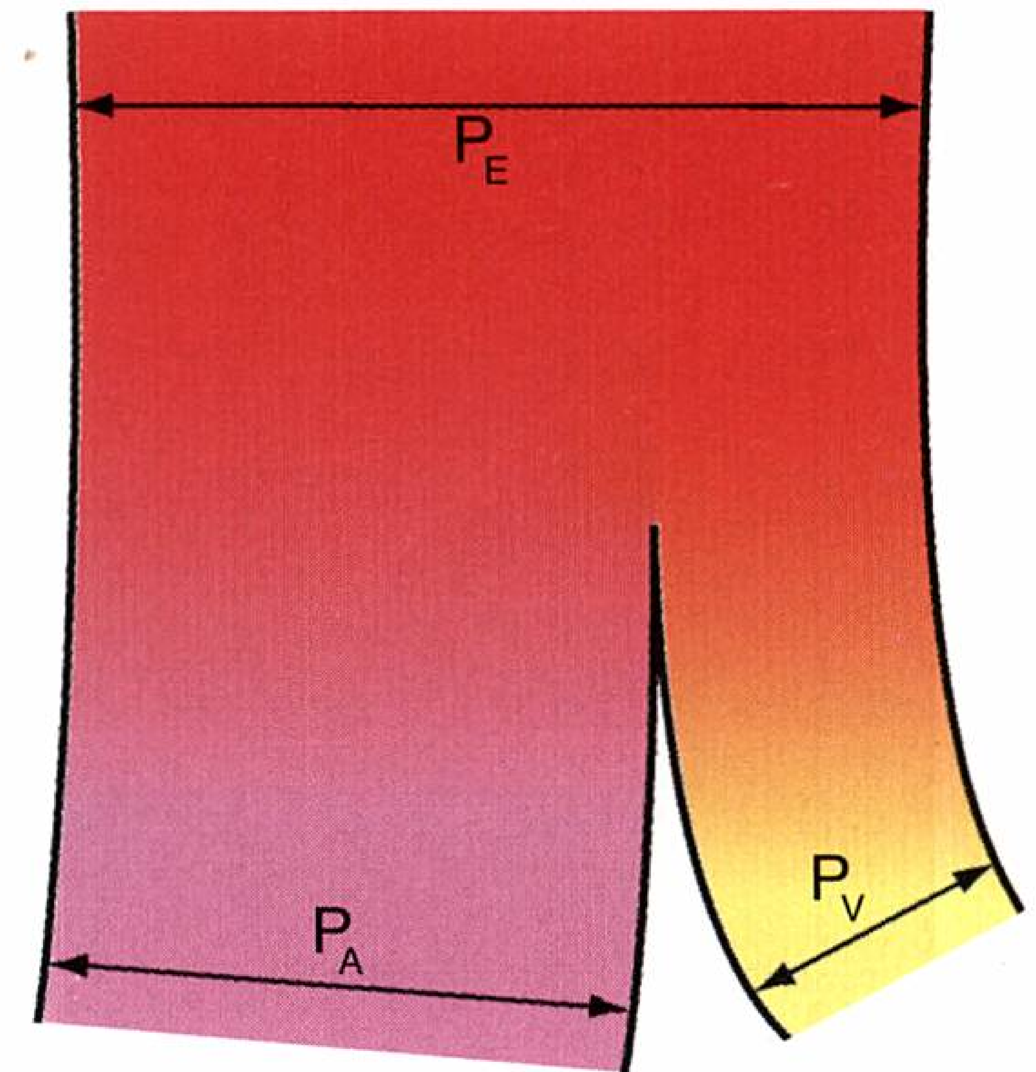
Durch diese auf den ersten Blick sicher ungewöhnliche Methode sollen die Benützerinnen und Benützer auch lernen, mit dem Buch umzugehen, sich zurechtzufinden.

1. Lösen einfacher Gleichungen



Der Motor eines Kleinmotorrads hat eine Eingangsleistung P_E von 5,0 kW. Die Ausgangsleistung P_A, die das Fahrzeug antreibt, liegt allerdings bei 4,25 kW. Warum stehen uns nicht „volle" 5,0 kW für den Fahrzeugantrieb zur Verfügung?

Nun: Der Motor muss die Reibung der Zylinder, im Getriebe und jene der Kraftübertragung überwinden. Das kostet natürlich Leistung — die sogenannte Verlustleistung P_V!



Beispiel:
Die „Leistungsbilanz" des Kleinmotorrads lautet: $P_A = P_E - P_V$.
Wie groß ist P_E, ausgedrückt durch P_A und P_V?

Lösung:

$P_A = P_E - P_V \quad | + P_V$ ①
$P_A + P_V = P_E$
$P_E = P_A + P_V$

P_A ..... Ausgangsleistung
P_E ..... Eingangsleistung
P_V ..... Verlustleistung

Beispiel:
Aus dem „OHMschen Gesetz" ist die Spannung U zu berechnen.

Lösung:

$I = \frac{U}{R} \quad | \cdot R$ ③
$RI = U$
$U = IR$

OHMsches Gesetz:

$\text{Strom } I = \frac{\text{Spannung } U}{\text{Widerstand } R}$

kurz: $I = \frac{U}{R}$

Eine Gleichung bleibt „richtig", wenn man ...

① auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert,
② auf beiden Seiten die gleiche Zahl subtrahiert,
③ auf beiden Seiten mit der gleichen Zahl (≠ 0) multipliziert oder
④ auf beiden Seiten durch die gleiche Zahl (≠ 0) dividiert.

Eine Gleichung bleibt „richtig", wenn man ...

① auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert,

② auf beiden Seiten die gleiche Zahl subtrahiert,

③ auf beiden Seiten mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) multipliziert oder

④ auf beiden Seiten durch die gleiche Zahl ($\neq 0$) dividiert.

Beispiel:

Die Formel $\ell = \ell_0(1+\alpha\Delta t)$ beschreibt die Längendehnung eines Stabes bei Erwärmung. Wie groß ist Δt, wenn ℓ und ℓ_0 gegeben sind?

Lösung:

$$\ell = \ell_0(1+\alpha\Delta t)$$

$$\ell = \ell_0 + \ell_0\alpha\Delta t \quad |-\ell_0 \quad ②$$

$$\ell - \ell_0 = \ell_0\alpha\Delta t \quad |:(\ell_0\alpha) \quad ④$$

$$\frac{\ell-\ell_0}{\alpha\ell_0} = \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\ell-\ell_0}{\alpha\ell_0}$$

ℓ_0 ..... ursprüngliche Stablänge

ℓ ..... Stablänge nach Erwärmung

Δt ..... Temperaturdifferenz

α ..... Dehnungskoeffizient

Jetzt gilt es das Lösen einfacher Gleichungen zu üben. Schlagen Sie die Seite 92 des Buches auf! An den Aufgaben **611.** bis **654.** können Sie Ihre Kräfte messen. Die auf Seite 93 blau gekennzeichneten Aufgaben werden übrigens im Lösungsheft **vollständig** durchgerechnet.

2. Zehnerpotenzen, Gleitkommadarstellung

Mit Potenzen von 10 kann man sehr große und sehr kleine Zahlen darstellen. Das ist vor allem in den Naturwissenschaften und in der Technik sehr wichtig.

10^{-5} ← Exponent[1)]
↑
Basis

Beispiele für Zehnerpotenzen:

$10 \cdot 10 = 10^2$ (gesprochen: 10 hoch zwei bzw. 10 zum Quadrat)

$10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$ (gesprochen: 10 hoch drei)

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$ (gesprochen: 10 hoch vier)

$\frac{1}{10 \cdot 10} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$ (gesprochen: 10 hoch minus zwei)

$\frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$ (gesprochen: 10 hoch minus drei)

$10^0 = 1$

$10^1 = 10$

$10^2 = 100$

$10^3 = 1000$

$10^4 = 10\,000$

$10^5 = 100\,000$

$10^6 = 1\,000\,000$ (1 Million)

$10^{-1} = 0{,}1 = \frac{1}{10}$

$10^{-2} = 0{,}01 = \frac{1}{100}$

$10^{-3} = 0{,}001 = \frac{1}{1000}$

$10^{-6} = 0{,}000\,001 = \frac{1}{1\,000\,000}$

. .
. .
. .

$10^{-n} = \frac{1}{10^n}$

Beispiel:

Man schreibe als Zehnerpotenz: **a)** 1000 **b)** $\frac{1}{1000}$ **c)** 0,1 **d)** 1

Lösung:

a) $1000 = 10^3$ **b)** $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$ **c)** $0{,}1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$ **d)** $1 = 10^0$

Beispiel:

Mit positivem Exponenten ist zu schreiben:

a) 10^{-1} **b)** 10^{-6} **c)** $\frac{1}{10^{-3}}$ **d)** $\frac{1}{10^{-1}}$

Lösung:

a) $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$ **b)** $10^{-6} = \frac{1}{10^6}$ **c)** $\frac{1}{10^{-3}} = 10^3$ **d)** $\frac{1}{10^{-1}} = 10^1 = 10$

In Physik und Technik ist es üblich, durch Setzen bestimmter Vorsilben Vielfache und Teile der Einheiten anschaulicher zu bezeichnen als durch bloße Zehnerpotenzen.

1) Diese Bezeichnung stammt vom deutschen Mathematiker **Michael STIFEL** (1487–1567).

Mit folgenden Vorsilben bezeichnet man Vielfache der Einheiten:

Vorsilbe	Deka	Hekto	Kilo	Mega	Giga	Tera
Zeichen	da	h	k	M	G	T
Vielfaches der Einheit	10	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}

Beispiel:
$3\,\text{km} = 3 \cdot 10^3\,\text{m} = 3\,000\,\text{m}$

Mit folgenden Vorsilben bezeichnet man Teile der Einheiten:

Vorsilbe	Pico	Nano	Mikro	Milli	Zenti	Dezi
Zeichen	p	n	µ	m	c	d
Teil der Einheit	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}

Beispiel:
$1\,\text{ns} = 10^{-9}\,\text{s} = 0{,}000\,000\,001\,\text{s}$

Üben wir nochmals das Rechnen mit Zehnerpotenzen:

Beispiel:
Es ist zu berechnen: **a)** $10^5 \cdot 10^7$ **b)** $10^4 : 10^4$ **c)** $10^4 : 10^5$ **d)** $(10^3)^{-2}$

Lösung:

a) $10^5 \cdot 10^7 = 10^{5+7} = \mathbf{10^{12}}$ **b)** $10^4 : 10^4 = 10^{4-4} = 10^0 = \mathbf{1}$

c) $10^4 : 10^5 = 10^{4-5} = \mathbf{10^{-1}}$ **d)** $(10^3)^{-2} = 10^{3(-2)} = \mathbf{10^{-6}}$

Es gilt:

$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$
$10^m : 10^n = 10^{m-n}$
$(10^m)^n = 10^{mn}$

17512 enthält 1,7512 Zehntausender: $17512 = \mathbf{1{,}7512 \cdot 10^4}$

175,12 enthält 1,7512 Hunderter: $175{,}12 = \mathbf{1{,}7512 \cdot 10^2}$

0,17512 enthält 1,7512 Zehntel: $0{,}17512 = \mathbf{1{,}7512 \cdot 10^{-1}}$

17,512 enthält 1,7512 Zehner: $17{,}512 = \mathbf{1{,}7512 \cdot 10^1}$

Ein positiver Exponent der Zehnerpotenz weist darauf hin, um wie viele Stellen das Komma nach rechts verschoben werden muss, um die Zahl „auszuschreiben“.

Ein negativer Exponent gibt die Verschiebung des Kommas nach links an.

Die besonders anschauliche normierte Gleitkommadarstellung ist in der Außenspalte definiert.

Jede Zahl x (x ungleich Null) kann man in normierter Gleitkommadarstellung anschreiben, d. h. als Produkt aus einer „Grundzahl“ a und einer Zehnerpotenz: $x = \pm a \cdot 10^z$ mit a größer oder gleich 1 und kleiner als 10.

Beispiel:
Die Zahlen **a)** 5 300 000 **b)** 670 000 **c)** 34 520 000 **d)** 50 000 000 sind in normierter Gleitkommaform anzugeben.

Lösung:

a) $5\,300\,000 = \mathbf{5{,}3 \cdot 10^6}$ **b)** $670\,000 = \mathbf{6{,}7 \cdot 10^5}$

c) $34\,520\,000 = \mathbf{3{,}452 \cdot 10^7}$ **d)** $50\,000\,000 = \mathbf{5 \cdot 10^7}$

Mehr über das Rechnen mit Potenzen finden Sie auf den Seiten 44ff.

3. Zahlen begrenzter Genauigkeit, Überschlagsrechnung

„Meine Tante und mein Onkel sind ziemlich dick", erzählt ein Kind. *„Meine Tante wiegt 137 kg und mein Onkel 148 kg."*

Die Gesamtmasse dieser beiden Personen beträgt 285 kg. Es ist auf drei geltende Stellen „gerundet". Man spricht in diesem Fall von einer **unvollständigen Zahl** bzw. einer **Zahl begrenzter Genauigkeit**. Bei einer unvollständigen Zahl ist es nicht zweckmäßig, Nullen „hinzuzusetzen"; z. B.: 285,0 oder 285,00 — denn damit würde man eine nicht gegebene Genauigkeit vortäuschen.

So wie etwa in der folgenden Geschichte: Eine deutsche Touristengruppe wird durch das Wiener Naturhistorische Museum geführt. *„Und hier, meine Damen und Herren, sehen sie den Schädel eines Cromagnonmenschen, der in der Mitte der letzten Eiszeit auftauchte. Er war der erste Mensch der Neuzeit. Das Exponat ist 40008 Jahre alt!"* *„Verzeihen Sie, wenn ich unterbreche"*, sagte Herr Schulze aus Düsseldorf, *„aber auf dem Schild steht das Alter mit nur 40000 Jahren angegeben"*. *„Das ist richtig"*, entgegnet ihm der Museumswärter, *„aber das Schild ist jetzt schon 8 Jahre alt."*

Das Messergebnis 285 kg ist eine **unvollständige Zahl**: Drei Stellen der Zahl sind bekannt, über weitere Stellen besitzt man keine Information.

„Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen."
Carl Friedrich GAUSS (1777–1855)

Alle Messergebnisse liefern unvollständige Zahlen!

Wenn z. B. jemand ein Sparguthaben von 500 Euro besitzt oder wenn in einem Saal 36 Personen sitzen, sind alle Stellen dieser Zahl bekannt. Man spricht in diesem Fall von einer **mathematisch genauen Zahl** bzw. einer **vollständig bekannten Zahl**.

Selbstverständlich kann eine mathematisch genaue Zahl auch Dezimalstellen haben — vgl. Außenspalte!

Von einer **mathematisch genauen Zahl** spricht man, wenn **alle** ihre Stellen bekannt sind.[1]

z. B.: $560 = 560{,}0 = 560{,}00 = \ldots = 5{,}6 \cdot 10^2$

$1205{,}3 = 1205{,}30 = 1205{,}300 = \ldots = 1{,}2053 \cdot 10^3$

Erinnern wir uns an eine für das **Runden von Zahlen** geltende Regel:

- Wenn die erste wegzulassende Ziffer kleiner 5 ist, bleibt die zu rundende Ziffer unverändert (Abrundung).
- Wenn die erste wegzulassende Ziffer größer oder gleich 5 ist, wird die zu rundende Ziffer um 1 erhöht (Aufrundung).

Rundung von Zahlen

Ist die erste wegzulassende Ziffer < 5 ?

Ja	Nein
Abrunden	Aufrunden

So gibt z. B. die Zahl 0,245 gerundet auf

- eine Dezimalstelle: 0,2
- zwei Dezimalstellen: 0,25

Mehrfaches Runden ist unzulässig!

Beispiel:

Die unvollständige Zahl 12,368 ist auf **a)** 2 **b)** 4 geltende Ziffern zu runden.

Lösung:

a) 12 **b)** 12,37

Beispiel:

Die mathematisch genaue Zahl 130,0200 ist auf **a)** 6 **b)** 5 **c)** 2 geltende Ziffern zu runden.

Lösung:

a) 130,020 **b)** 130,02 **c)** $1{,}3 \cdot 10^2$

---

1) Wenn aus einer mathematischen Problemstellung heraus eine Zahl entsteht, die unendlich viele Stellen hat, dann ist es natürlich nicht möglich, sie alle anzuschreiben.

Gegeben ist ein Würfel aus Flaschenkork, der genauso hoch ist wie Sie groß sind. Könnten zwei starke Personen diesen Würfel tragen?

Gehen wir anhand konkreter Zahlen vor und machen wir eine **Überschlagsrechnung**. Nehmen wir an, Sie sind 1,60 m groß. Der Würfel hat dann ein Volumen von $V = 1{,}6^3\,m^3$. Die Masse m erhält man durch Multiplikation des Volumens mit der Dichte für Flaschenkork (vgl. Tabelle in der Außenspalte):

$$m = \rho \cdot V = 0{,}24\ g/cm^3 \cdot 160^3\ cm^3 \approx 2 \cdot 10^{-1} \cdot 200^3 = 2 \cdot 2^3 \cdot 10^{-1}(10^2)^3 =$$
$$= 2 \cdot 2^3 \cdot 10^5 \approx 10^6\ g = \mathbf{1\ t}$$

Sind Sie überrascht? Zwei starke Personen könnten diesen Würfel sicher nicht heben!

Die wichtigsten Hilfsmittel unserer Rechnung waren:

— Rundung von Zahlen

— Potenzschreibweise von Zahlen

Eine Berechnung dieser Art nennt man **Überschlagsrechnung**. Dabei interessiert man sich vor allem für die Größenordnung des Ergebnisses. In unserem Beispiel wollten wir ja eigentlich nur wissen, ob die Masse des Würfels einige Dekagramm, einige Kilogramm oder einige Tonnen ausmacht.

Masse

Formelzeichen: m

1 kg = 100 dag = 1000 g

1 t = 1000 kg

Dichte

Formelzeichen: ρ

$\text{Dichte} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$

$\rho = \frac{m}{V}$

Material	Dichte ρ g/ cm³
Gold	19,3
Kork	0,24
Nickel	8,85
Platin	21,5
Silber	10,5
Zink	7,13
Zinn	7,28

4. Zeichen und Symbole, Elemente der Aussagenlogik, Maßeinheiten

Um sich in der englischen Sprache gut ausdrücken zu können, muss man unter anderem ein Vokabular von ca. 3000 Wörtern beherrschen. 3000 Vokabeln zu lernen ist ein gewaltiger Brocken Arbeit. In der Mathematik kommen wir mit viel weniger Wörtern aus. Was die mathematische „Schrift", also die Symbole betrifft, so werden wir uns insgesamt nur ein paar Dutzend Zeichen merken müssen. Einige dieser Zeichen und Symbole wollen wir hier anführen:

≠ ..... ungleich   < ..... kleiner als   > ..... größer als
⩽ ..... kleiner oder gleich   ⩾ ..... größer oder gleich

Beispiel: $3 + 2 \neq 4$; $5 < 7$; $3 > 1$ usw.

Durch Verneinen der Aussage „Heute wird geprüft" wird eine neue Aussage gebildet: „Heute wird nicht geprüft". Die neue Aussage wird Negation der ursprünglichen Aussage genannt. Wir wollen die Aussage mit **a** und deren Negation mit ¬ **a** (gesprochen: nicht a) bezeichnen.

Negation: ¬ ..... nicht

Die Aussage „3 ist eine ungerade Zahl" und die Aussage „5 ist eine ungerade Zahl" wird verknüpft, indem man sagt: „3 ist eine ungerade Zahl und 5 ist eine ungerade Zahl" oder sprachlich zusammengezogen „3 **und** 5 sind ungerade Zahlen". Für das verbindende Wort **„und"** (das sinngemäß für „sowohl ... als auch ..." steht) verwenden wir in der Mathematik das Zeichen „∧".

Konjunktion: ∧ ..... und

Mit **Logik** kann man Aussagen strukturieren. Dazu ist es notwendig, einige mathematische Operationen kennen zu lernen, die der Logik zuzuordnen sind.

Unter einer **Aussage** versteht man ein sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist, d. h. einer Aussage kann genau einer der beiden Wahrheitswerte „wahr" (w) oder „falsch" (f) zugeordnet werden.

(1) „3 + 2 = 4" ist eine Aussage mit dem Wahrheitswert f.

(2) „LEIBNIZ war Mathematiker" ist eine Aussage mit dem Wahrheitswert w.

(3) „Der Inn fließt durch Spanien" ist eine Aussage mit dem Wahrheitswert f.

(4) „Die Zahl 5 ist schön" ist keine (entscheidbare) Aussage, da kein Wahrheitswert zugeordnet werden kann.

(5) „Wo waren Sie" ist keine (entscheidbare) Aussage, da kein Wahrheitswert zugeordnet werden kann.



Beim verneinenden Wort „nicht“ und beim verbindenden Wort „und“ ist die Verwendung klar und eindeutig. Anders ist das beim Wort „oder“, das in zwei Varianten verwendet wird:

„Hände hoch **oder** ich schieße“, ruft ein Polizist dem Einbrecher zu. Hier wird das „oder“ im **ausschließenden** Sinn verwendet: Entweder der Ganove hebt die Hände **oder** der Polizist schießt.

Bei dem Brief, den der kleine Robert an das Christkind schreibt, wird das „oder“ im **nicht ausschließenden** Sinn verwendet: Denn Robert muss nicht unbedingt entweder einen Fußball oder ein Computerspiel bekommen. Er ist damit einverstanden, wenn am 24. Dezember unter dem Weihnachtsbaum **sowohl** ein Fußball **als auch** ein Computerspiel liegt.

Weitere Beispiele für das „oder“ im

(1) ausschließenden Sinn:

Nach der AHS-Unterstufe gehe ich an eine HTL **oder** ich bleibe in der AHS. (Dass jemand eine HTL **und** die AHS gleichzeitig besucht, darf man wohl ausschließen.) Entweder die Lampe ist eingeschaltet **oder** nicht. (Beides zugleich ist nicht möglich!)

(2) nicht ausschließenden Sinn:

Gesucht wird ein(e) Fremdsprachenkorrespondent(in) mit englischen **oder** spanischen Sprachkenntnissen. (Selbstverständlich darf diese Person auch Englisch **und** Spanisch beherrschen.) Katzen **oder** Hunde sind im Spital verboten. (Wenn jemand mit seinem Hund **und** seiner Katze kommt, ist dies auch verboten.)

In der Mathematik verwenden wir das **„oder“** im nicht ausschließenden Sinn und schreiben hierfür das Zeichen „∨“.

Disjunktion: ∨..... oder

„Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar.“ Aus der ersten Eigenschaft „durch 6 teilbar sein“ folgt die zweite Eigenschaft „durch 3 teilbar sein“, weil $2 \cdot 3 = 6$. Für die Redewendungen „wenn ... dann ...“ bzw. auch „aus ... folgt ...“ verwenden wir in der Mathematik das Zeichen „⇒“

Implikation: ⇒ ..... aus ..... folgt ..... (Folgepfeil)

Die Aussage „5 ist größer als 3“ ist der Aussage „3 ist kleiner als 5“ gleichwertig oder äquivalent. Die Verknüpfung der Aussagen lautet: „Wenn 5 größer als 3 ist, dann ist 3 kleiner als 5“ und umgekehrt: „Wenn 3 kleiner als 5 ist, dann ist 5 größer als 3“. Für die Äquivalenz ist kennzeichnend, dass auch die Umkehrung jeder der beiden Aussagen richtig ist!

Um äquivalente Aussagen zu formulieren, verwendet man die Wortverbindungen „... genau dann, wenn ...“, „aus ... folgt ... und umgekehrt“, „... ist äquivalent mit ...“, bzw. in der Mathematik das Zeichen „⇔“.

Äquivalenz: ⇔ ..... genau dann, wenn ..... (Äquivalenzpfeil)

Eine **Variable**[1] ist ein beliebiges Zeichen, für das während einer Überlegung in einem gewissen Ausmaß frei wählbare Belegungen, z. B. Zahlen, eingesetzt werden dürfen.

Die Gesamtlänge L einer Eisenbahnstrecke, bestehend aus 40 verschieden langen Teilstrecken, soll ermittelt werden. Wenn wir nun mit jedem Kleinbuchstaben des Alphabets die Länge einer Teilstrecke bezeichnen könnten wir schreiben:

$L = a + b + c + d + e + \ldots + u + v + w + x + y + z + ? + ? + ? \ldots$

Jetzt sind uns die Buchstaben ausgegangen. Wir sind erst bei der 26. Strecke angelangt und uns „fehlen“ noch 14...

[1]) Es ist üblich, Buchstaben des Alphabets für die Bezeichnung von Variablen zu verwenden.

Es gibt einen Ausweg: Wir bezeichnen die Länge **jeder** Teilstrecke z. B. mit „l" und nummerieren diese von 1 bis 40:

$$L = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + \ldots + l_{38} + l_{39} + l_{40}$$

Und für den obigen Ausdruck gibt es noch eine abgekürzte Schreibweise:

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + \ldots + l_{38} + l_{39} + l_{40} = \sum_{i=1}^{40} l_i$$

(gesprochen: Summe aller l_i von $i = 1$ bis $i = 40$)

Allgemein: $$\sum_{i=1}^{m} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_{m-2} + x_{m-1} + x_m$$

$\sum_{i=1}^{m} x_i$ bedeutet: Man bilde die Summe aus den m Summanden x_i, wobei diese mit den tief gestellten Nummern („Indizes"[1]) 1 bis m versehen werden. Durch diese „Indizierung" lassen sich die einzelnen Summanden voneinander unterscheiden.

Unter einer **Aussageform** versteht man ein sprachliches Gebilde, das eine oder mehrere Variable enthält und durch Ersetzen der Variablen durch geeignete Begriffe zu einer Aussage wird.

Wenn man in die Aussageform „Die Erde ist ein x" für die Variable x der Reihe nach die Begriffe **(1)** Baum **(2)** Tier **(3)** Planet einsetzt, entstehen die Aussagen:

(1) „Die Erde ist ein Baum"
(2) „Die Erde ist ein Tier"
(3) „Die Erde ist ein Planet",

wovon nur die Aussage **(3)** den Wahrheitswert w hat!

Messergebnisse werden nicht alleine durch Zahlen beschrieben.

Die Längen-, Flächen- und Raummaße wurden schon in der Volksschule besprochen. Wir geben nun eine kleine, nicht auf Vollständigkeit bedachte Übersicht, anhand derer die Schreibweise mit Zehnerpotenzen geübt werden kann, damit man mit den diversen Vorsilben noch besser vertraut wird.

Längenmaße

m	Meter	Beispiele
km	Kilometer: $1\,km = 1000\,m = 10^3\,m$	$372{,}95\,km = 372950\,m$ $27636\,m = 27{,}636\,km$
dm	Dezimeter: $1\,dm = \frac{1}{10}\,m = 10^{-1}\,m$	$76\,dm = 7{,}6\,m$ $35{,}1\,m = 351\,dm$
cm	Zentimeter: $1\,cm = \frac{1}{100}\,m = 10^{-2}\,m$	$1317\,cm = 131{,}7\,dm = 13{,}17\,m$ $8{,}56\,m = 85{,}6\,dm = 856\,cm$
mm	Millimeter: $1\,mm = \frac{1}{1000}\,m = 10^{-3}\,m$	$1100\,mm = 110\,cm = 11\,dm = 1{,}1\,m$ $0{,}52\,m = 5{,}2\,dm = 52\,cm = 520\,mm$
µm	Mikrometer: $1\,\mu m = \frac{1}{1000000}\,m = 10^{-6}\,m$	$6800000\,\mu m = 6800\,mm = 6{,}8\,m$ $0{,}000042\,m = 0{,}042\,mm = 42\,\mu m$
nm	Nanometer: $1\,nm = \frac{1}{1000000000}\,m = 10^{-9}\,m$	$500000000\,nm = 500\,mm = 0{,}5\,m$ $0{,}000009\,m = 0{,}0009\,mm = 900\,nm$

l = 7,32 m — was bedeutet das eigentlich?

Beispielsweise könnte es sich bei l um die Wellenlänge einer elektromagnetischen Schwingung im UKW-Bereich handeln, oder um die Breite eines Fußballtores. Auch die Masthöhe eines Segelbootes könnte mit l bezeichnet werden. Wie dem auch sei, in jedem Fall bedeutet l eine physikalische Größe. Als solche ist sie durch das **Produkt** aus einem **Zahlenwert** (7,32) und einer **Einheit** (Meter) „dingfest" gemacht.

Generell gilt für physikalische Größen:

Größe = Zahlenwert × Einheit

Will man nur die Einheit einer Größe angeben, von ihrem Zahlenwert aber absehen, so schreibt man:

[Größe] = Einheit

Würden wir uns also nur für die Einheit von l aus obigem Beispiel interessieren, so müssten wir dies folgendermaßen darstellen:

[l] = 1 m

[1]) Index; Plural: Indizes.

Kraft

Kraft = Masse × Beschleunigung

$F = m \cdot a$

Gesetzliche Einheit: **Newton**[1)]

$[F] = 1\,N = 1\,\frac{m\,kg}{s^2}$

$1\,kN = 1000\,N$

1 N entspricht auf unserer Erde ungefähr dem Gewicht von 100 g Masse.

Arbeit (Energie, Wärmemenge)

Arbeit = Kraft × Weg

$W = F \cdot s$

Gesetzliche Einheit: **Joule**[2)]

$[W] = 1\,J = 1\,Nm = 1\,Ws$

$1\,Wh = 3600\,Ws = 3600\,J$

Leistung

$\text{Leistung} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}}$

$P = \frac{W}{t}$

Gesetzliche Einheit: **Watt**[3)]

$[P] = 1\,W = 1\,\frac{J}{s}$

$1\,kW = 1000\,W$

$\left(1\,PS = \frac{75\,kpm}{s} = \mathbf{735{,}5\,W}\right)$

Druck

$\text{Druck} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$

$p = \frac{F}{A}$

Gesetzliche Einheit: **Pascal**[4)]

$[p] = 1\,Pa = 1\,\frac{N}{m^2}$

$1\,bar = 100\,000\,Pa$

$1\,mbar = 0{,}001\,bar = 100\,Pa$

Flächenmaße

m^2	Quadratmeter	Beispiele
dm^2	Quadratdezimeter: $1\,dm^2 = \frac{1}{100}\,m^2 = 10^{-2}\,m^2$	$3641\,dm^2 = 36{,}41\,m^2$ $0{,}13\,m^2 = 13\,dm^2$
cm^2	Quadratzentimeter: $1\,cm^2 = \frac{1}{10\,000}\,m^2 = 10^{-4}\,m^2$	$47\,100\,cm^2 = 471\,dm^2 = 4{,}71\,m^2$ $0{,}0092\,m^2 = 0{,}92\,dm^2 = 92\,cm^2$
mm^2	Quadratmillimeter: $1\,mm^2 = \frac{1}{1\,000\,000}\,m^2 = 10^{-6}\,m^2$	$3\,000\,000\,mm^2 = 3\,m^2$ $0{,}0075\,m^2 = 7500\,mm^2$
a	Ar: $1\,a = 100\,m^2 = 10^2\,m^2$	$81{,}96\,a = 8196\,m^2$ $35{,}2\,m^2 = 0{,}352\,a$
ha	Hektar: $1\,ha = 10\,000\,m^2 = 10^4\,m^2$	$33\,ha = 330\,000\,m^2$ $4700\,m^2 = 0{,}47\,ha$
km^2	Quadratkilometer: $1\,km^2 = 1\,000\,000\,m^2 = 10^6\,m^2$	$0{,}05\,km^2 = 5\,ha = 50\,000\,m^2$ $97\,280\,m^2 = 9{,}728\,ha = 0{,}09728\,km^2$

Raummaße

m^3	Kubikmeter	Beispiele
dm^3	Kubikdezimeter: $1\,dm^3 = \frac{1}{1000}\,m^3 = 10^{-3}\,m^3$ $1\,dm^3 = 1$ Liter	$73500\,dm^3 = 73{,}5\,m^3$ $0{,}98\,m^3 = 980\,dm^3 = 980\,l$
cm^3	Kubikzentimeter: $1\,cm^3 = \frac{1}{1\,000\,000}\,m^3 = 10^{-6}\,m^3$	$5\,870\,000\,cm^3 = 5870\,dm^3 = 5{,}87\,m^3$ $0{,}00021\,m^3 = 0{,}21\,dm^3 = 210\,cm^3$
mm^3	Kubikmillimeter: $1\,mm^3 = \frac{1}{1\,000\,000\,000}\,m^3 = 10^{-9}\,m^3$	$93\,107\,000\,mm^3 = 93\,107\,cm^3 =$ $= 93{,}107\,dm^3 = 0{,}093107\,m^3$ $0{,}0052\,m^3 = 5{,}2\,dm^3 = 5200\,cm^3 =$ $= 5\,200\,000\,mm^3$

---

1) Benannt nach **Isaac NEWTON** (1643 — 1727), englischer Mathematiker, Physiker und Astronom.

2) Benannt nach **James Prescott JOULE** (1818 — 1889), britischer Physiker.

3) Benannt nach **James WATT** (1736 — 1819), britischer Ingenieur und Erfinder.

4) Benannt nach **Blaise PASCAL** (1623 — 1662), französischer Mathematiker und Philosoph.

AUFGABEN

Man schreibe als Zehnerpotenz:

1. a) 10 **b)** 100 **c)** 1000000 **d)** 0,01

2. a) $\frac{1}{100}$ **b)** 10000 **c)** $\frac{1}{10000}$ **d)** 0,001

Es ist zu berechnen und das Resultat als Zehnerpotenz darzustellen:

3. a) $10^7 \cdot 10^3$ **b)** $10^{-2} \cdot 10^5$ **c)** $10^{-4} \cdot 10^{-4}$ **d)** $10^5 \cdot 10^{-3}$

4. a) $\frac{1}{10^4}$ **b)** $\frac{10^2}{10^{-4}}$ **c)** $\frac{10^4}{10^{10}}$ **d)** $\frac{10^{-3}}{10^4}$

Die nachstehenden Zahlen sind in normierter Gleitkommaform darzustellen:

5. a) 28,9 **b)** 0,074 **c)** −0,0518 **d)** 381 000

6. a) −20,02 **b)** −0,000711 **c)** 0,0013 **d)** 6784,25

Die folgenden Zahlen sind ohne Verwendung von Zehnerpotenzen zu schreiben:

7. a) $1 \cdot 10^6$ **b)** $2 \cdot 10^{-4}$ **c)** $5 \cdot 10^{-3}$ **d)** $20 \cdot 10^5$

8. a) $6{,}7 \cdot 10^{-2}$ **b)** $1{,}92 \cdot 10^4$ **c)** $18 \cdot 10^4$ **d)** $47{,}11 \cdot 10^2$

9. a) $-1{,}41 \cdot 10^3$ **b)** $15 \cdot 10^{-7}$ **c)** $-0{,}85 \cdot 10^3$ **d)** $-9{,}56 \cdot 10^{-1}$

10. Man schreibe als Summe von verschiedenen Zehnerpotenzen:

a) 70,801 **b)** 400,021 **c)** 0,0609 **d)** 904 000

In den Aufgaben **11.** bis **27.** sind die Resultate in normierter Gleitkommaform zu schreiben!

11. a) $1{,}6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2$ **b)** $6 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-5}$ **c)** $2{,}8 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3}$

12. a) $0{,}4 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{-5}$ **b)** $1{,}2 \cdot 10^3 - 4 \cdot 10^3$ **c)** $0{,}08 + 12 \cdot 10^{-2}$

13. a) $0{,}5 \cdot 10^{-3} - 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ **b)** $8(10^{-5} - 10^{-6})$ **c)** $2{,}4 \cdot 10^5 - (6 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^5)$

14. a) $\frac{10^{-4} \cdot 10^2 \cdot 10^{-1}}{10^7 \cdot 10^{-3} \cdot 10}$ **b)** $\frac{10^2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^5}{10^{-2} \cdot 10^{-3}}$

15. a) $\frac{10^{-5} \cdot 10^{-1} \cdot 10^2}{10^2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-1}}$ **b)** $\frac{10^{-5}}{10^4 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3}}$

16. a) $(5 \cdot 10^3) \cdot 0{,}02$ **b)** $(2 \cdot 10^8)(5 \cdot 10^3)$ **c)** $(3 \cdot 10^5)(2 \cdot 10^3)$

17. a) $(2 \cdot 10^3)(4 \cdot 10^7)$ **b)** $(7 \cdot 10^3)(1{,}1 \cdot 10^{-4})$ **c)** $(8 \cdot 10^{-7})(5 \cdot 10^6)$

18. a) $(4 \cdot 10^{-3})(5 \cdot 10^{-4})$ **b)** $(8{,}2 \cdot 10^{-3})(4 \cdot 10^{-1})$ **c)** $(12 \cdot 10^{-1})(15 \cdot 10^{-4})$

19. a) $\frac{2 \cdot 10^{-4}}{8 \cdot 10^{-7}}$ **b)** $\frac{5 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^{-3}}$ **c)** $\frac{0{,}08}{40}$ **d)** $\frac{80000}{0{,}02}$

20. a) $\frac{0{,}08}{0{,}004}$ **b)** $\frac{200}{0{,}04}$ **c)** $\frac{0{,}02}{4000}$ **d)** $\frac{8000}{0{,}02}$

21. a) $\frac{16000}{0{,}04}$ **b)** $\frac{240000}{0{,}012}$ **c)** $\frac{0{,}005}{10000}$ **d)** $\frac{4800}{-0{,}06}$

22. a) $\frac{0{,}04 \cdot 800}{0{,}16}$ **b)** $\frac{0{,}2 \cdot 0{,}4}{0{,}001}$ **c)** $\frac{0{,}16 \cdot 0{,}3}{0{,}02 \cdot 0{,}04}$ **d)** $\frac{5{,}1 \cdot 0{,}068}{0{,}17 \cdot 85}$

23. a) $(0{,}04)^3$ **b)** $(0{,}03)^2$ **c)** $(200)^4$ **d)** $(0{,}001)^4$

24. a) $(30\,000)^3$ **b)** (20^6) **c)** $(40)^4$ **d)** $(-0{,}02)^5$

25. a) $\frac{(0{,}2)^2 \cdot 0{,}04}{0{,}8}$ **b)** $\frac{16000 \cdot 0{,}2}{(0{,}4)^2}$ **c)** $\left(\frac{0{,}02 \cdot 0{,}08}{(0{,}004)}\right)^2$

26. a) $\frac{(40000)^2 \cdot 0{,}002}{(0{,}2)^3}$ **b)** $\frac{(0{,}04 \cdot 200)^2}{(0{,}002)^3}$ **c)** $\left(\frac{(0{,}02)^2 \cdot (0{,}1)^3}{0{,}002}\right)^3$

27. a) $\frac{0{,}012}{10^{-4} - 4 \cdot 10^{-5}}$ **b)** $\frac{1 \cdot 10^{-5} - 4 \cdot 10^{-6}}{12 \cdot 10^{-7}}$ **c)** $\frac{2 \cdot 10^{-6} - 10^{-5}}{4 \cdot 10^{-9}}$

28. Man kreuze für jeden Satz an, ob er eine Zahl begrenzter Genauigkeit enthält:

	JA	NEIN
(1) Die Entfernung der beiden Städte beträgt 12,5 km.	○	○
(2) Heute waren 2256 Personen in der Theatervorstellung.	○	○
(3) Die Masse der Eisenkugel beträgt 12,2 kg.	○	○
(4) Das Buch kostet 18,05 Euro.	○	○

29. Der mittlere Erdradius beträgt $6{,}37 \cdot 10^6$ m. Der Zahlenwert ist auf 2 geltende Ziffern zu runden!

30. $312 \cdot 0{,}0782$ ergibt überschlagsweise

○ **a)** 0,24 ○ **b)** 2,4 ○ **c)** 24 ○ **d)** 240

Es ist überschlagsweise zu berechnen:

31. a) $\frac{78{,}1 \cdot 0{,}041}{0{,}351 \cdot 12840}$ **b)** $\frac{0{,}0395}{84{,}7 \cdot 129{,}3}$

32. a) $\frac{1}{0{,}0739}$ **b)** $\frac{(0{,}83)^2 \cdot 0{,}0711}{841}$

33. a) $\frac{1}{(0{,}0955)^3}$ **b)** $\frac{0{,}0714 \cdot 31{,}5}{0{,}0122 \cdot 811{,}3}$

34. Die wahren Aussagen sind anzukreuzen:

○ **a)** $1+2+3+\ldots+33+34=\sum_{i=0}^{33}(i+1)$ ○ **b)** $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$

○ **c)** $1+2+3+\ldots+33+34=\sum_{i=0}^{34}(i+1)$ ○ **d)** $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{k-1}+a_k=\sum_{i=1}^{n}a_k$

○ **e)** $1+2+3+\ldots+33+34=\sum_{i=1}^{34}i$ ○ **f)** $n_1+n_2+n_3+\ldots+n_{k-1}+n_k=\sum_{n=1}^{k}n_k$

In den Aufgaben **35.** bis **42.** sind die richtigen Zehnerpotenzen einzusetzen:

35. a) 20 mV = ... V **b)** 0,04 MΩ = ... Ω

36. a) 5200 m = ... km **b)** $2 \cdot 10^5$ W = ... kW

37. 50 000 kW = ... MW = ... W = ... GW

38. 200 μm = ... mm = ... cm = ... km

39. 200 m² = ... km² = ... dm² = ... cm² = ... mm²

40. 0,04 m³ = ... dm³ = ... cm³ = ... mm³

41. a) $4 \cdot 10^4$ dm² = ... m² **b)** 0,005 m³ = ... mm³

42. a) 0,08 dm² = ... mm² **b)** 400 000 mm³ = ... dm³

Bei den Aufgaben **43.** bis **45.** sind die Maßeinheiten mit den entsprechenden Vorsilben zu ergänzen:

43. a) $20000\,m = 20 \ldots\ldots m$ **b)** $0{,}02\,V = 20 \ldots\ldots V$

44. a) $4 \cdot 10^{-10}\,s = 0{,}4 \ldots\ldots s$ **b)** $0{,}2\,MW = 200 \ldots\ldots W$

45. a) $6 \cdot 10^{5}\,W = 0{,}6 \ldots\ldots W$ **b)** $0{,}04\,m = 4 \cdot 10^{4} \ldots\ldots m$

46. a) $0{,}7\,km - 140\,m$ **b)** $420\,cm^2 + 2\,dm^2$

47. a) $0{,}42\,kg - 20\,g$ **b)** $0{,}03\,cm^2 - 0{,}4\,mm^2 + 2 \cdot 10^3\,dm^2$

48. a) $0{,}1\,m^3 - 400\,dm^3 + 1{,}1\,m^3$ **b)** $0{,}24\,t + 524\,kg - 8{,}3 \cdot 10^4\,g$

49. a) $\frac{0{,}4\,dm^2 \cdot 20\,cm}{0{,}01\,mm^2}$ **b)** $\frac{0{,}008\,dm^2}{0{,}16\,m^2}$

50. a) $\frac{(0{,}02\,mm)^2 \cdot 0{,}04}{0{,}08\,dm^2}$ **b)** $\frac{0{,}04\,dm^2 \cdot 20\,mm}{0{,}4\,cm^3}$

51. a) $\frac{(0{,}03\,mm)^2 \cdot 0{,}02\,dm}{0{,}012\,cm^2}$ **b)** $\frac{(0{,}56\,cm)^3 \cdot 0{,}125}{64\,mm \cdot 0{,}49\,cm}$

Es ist ein Überschlagswert zu ermitteln:

52. a) $\frac{0{,}72\,dm^2 \cdot 812\,cm}{9{,}00171}$ **b)** $\frac{0{,}041\,cm \cdot 531\,dm^2}{714\,mm^2}$

53. a) $\frac{35{,}7\,cm^2 \cdot 0{,}081\,mm}{0{,}0799\,mm^2}$ **b)** $\frac{0{,}0535\,cm^2 \cdot 0{,}0418}{71{,}8\,mm}$

Vermischte Aufgaben

54. Bei den Zahlen **a)** 2,13 **b)** 15,60 **c)** 0,032 **d)** 0,0010 ist die Anzahl der geltenden Ziffern anzugeben!

55. Es ist jene Menge fester Müllstoffe zu schätzen, die von sämtlichen österreichischen Haushalten in einem Jahr weggeworfen wird.

Annahme: Österreich hat etwa $2 \cdot 10^6$ Haushalte. Täglich fallen 2 kg Müll pro Haushalt an.

56. Man ermittle die Anzahl der Moleküle in der Luft, die in einem Klassenzimmer (Abmessungen: l = 10 m, b = 6 m, h = 3 m) vorhanden sind unter der Annahme, dass in 22,4 l Luft $6 \cdot 10^{23}$ Moleküle enthalten sind.

57. Wenn man auf ein Eckfeld eines Schachbretts ein Reiskorn legt, auf das daneben liegende zwei Reiskörner, dann 4, 8, 16, 32 usw., erhält man insgesamt $2^{64} - 1 = 18446744073709551615$ Körner. Welche Menge Reis würde auf jeden heute lebenden Menschen kommen, wenn 50 Körner 1 g wiegen und etwa 5 Milliarden Menschen derzeit die Erde bevölkern?

58. In den folgenden Ausdrücken sind die entsprechenden Symbole einzusetzen, sodass jeweils eine wahre Aussage entsteht:

a) $3 + 5 \ldots\ldots 8$ **b)** $3 + 5 \ldots\ldots 9$

c) $(2 < 3) \ldots\ldots (3 > 2)$ **d)** $(a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow a \ldots\ldots c$

59. Welche der folgenden Sätze sind Aussagen im Sinne der Disjunktion? Man bestimme den Wahrheitswert der Aussagen.

a) „EULER oder GAUSS waren Mathematiker."

b) „Die Zahlen 3 oder 5 sind durch 4 ohne Rest teilbar."

c) „GAUSS war Mathematiker oder die Erde ist ein Quadrat."

d) „Wir haben am 20. oder 21. Jänner 2004 Mathematik-Schularbeit."



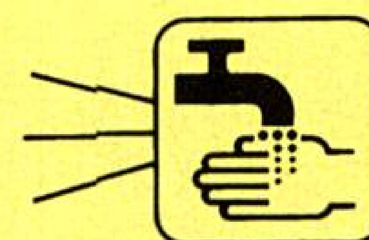
60. a) Aus dem Kurier vom 7. August 1983: „*Drei Buben kaufen gemeinsam einen Fußball um 30 Schilling. Jeder bezahlt also zehn Schilling. Als die Kinder das Spielwarengeschäft verlassen haben, denkt der Besitzer: ‚Die sind nett. Ich lasse ihnen einen Fünfer nach.' Er schickt die Verkäuferin mit dem Geld hinterher. Doch das Mädchen überlegt: ‚Für die Mühe habe ich eine Provision verdient.' Es gibt jedem Buben nur einen Schilling. Zwei zweigt es für die eigene Tasche ab.*

Rechnen Sie jetzt bitte nach: Jeder der Buben hat einen Schilling zurückbekommen, also nur neun Schilling bezahlt. Zwei Schilling hat das Mädchen. Dreimal neun ergibt 27 plus zwei ist 29.

Wo ist der 30. Schilling?"

b) Auf dem Dachboden steht eine Schublade mit 9 Stück weißen Socken und 9 Stück schwarzen Socken. Am Dachboden ist es sehr dunkel, es brennt kein Licht. Wie viele Socken muss man der Schublade „blind" entnehmen, um mit Sicherheit ein Paar gleichfarbiger Socken zu erhalten?

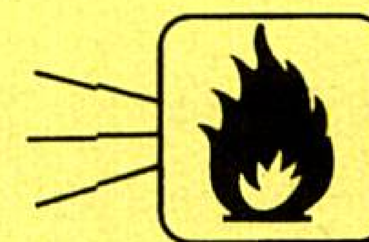
c)







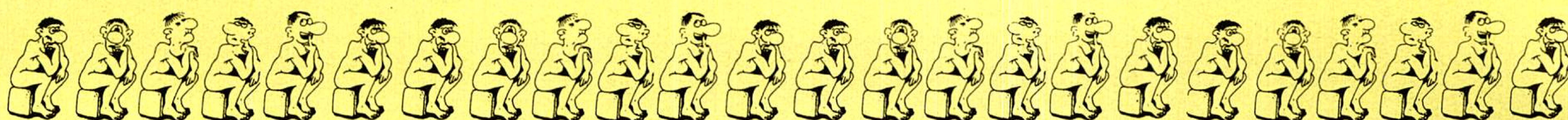






Die Häuser A, B und C sollen mit Wasser und Gas versorgt werden und einen Telefonanschluss erhalten. Alle Leitungen dürfen in der Ebene beliebig verlegt werden, einzig die folgenden beiden Forderungen müssen erfüllt werden:

(1) Die Zuleitungen sollen einander nicht kreuzen.
(2) Jedes Haus soll direkt versorgt werden, d. h. die Häuser dürfen untereinander nicht verbunden werden.



MENGENLEHRE VOM ELEMENTAREN STANDPUNKT AUS

1. Einführung

Schülerinnen und Schüler hören in der Geometrie von Punkten und Geraden. Viele Konstruktionen und manche damit zusammenhängende Berechnungen werden durchgeführt. Ihre Lehrkraft hat aber für diese Begriffe keine Definitionen gegeben. Es wurde lediglich beschrieben, was man mit diesen Objekten machen kann. Punkt, Gerade, Ebene waren nicht weiter erklärte Grundbegriffe, die man ohne weitere Erklärung versteht.

In der modernen Mathematik ist auch das Wort **Menge** ein Grundbegriff. Mit einem Grundbegriff kann man also „arbeiten", wenn man genau weiß, was man **tun darf** und was **nicht.** Dennoch aber soll man auch mit einem Grundbegriff eine **Vorstellung** verbinden.

Beim Wort Menge darf man an Folgendes denken: „Ideelle Zusammenfassung zu einem einheitlichen Ganzen", „Gesamtheit", „Charakteristisches Gemeinsames" oder „System".

Etwas exakter ausgedrückt:

Unter einer Menge wollen wir eine Zusammenfassung bestimmter, wohl unterschiedener Objekte unserer Anschauung verstehen. Diese Objekte bezeichnet man als die Elemente der Menge.

Beispiel:
Bei welchem der folgenden Sätze wird der Begriff Menge im mathematischen Sinn verwendet:

a) „Die Menge der Säugetiere im Frankfurter Zoo"

b) „Karl besitzt eine Menge Geld"

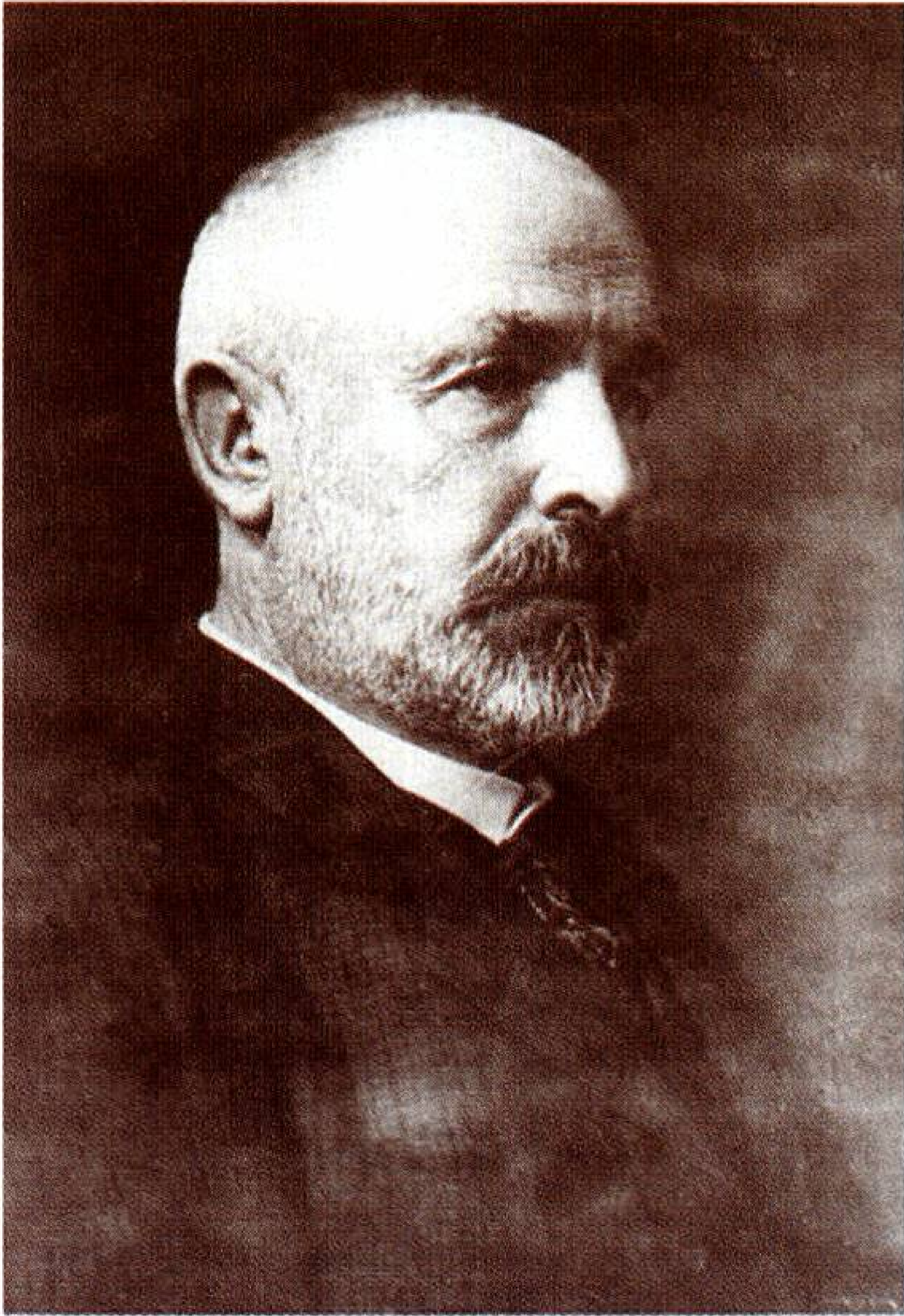
c) „Die Menge der Schüler des 2. Jahrgangs"

Lösung:

Bei allen Sätzen mit Ausnahme des Satzes b) wurde der Begriff Menge im mathematischen Sinn gebraucht. Beim Satz b) steht das Wort Menge in der Bedeutung von „viel".

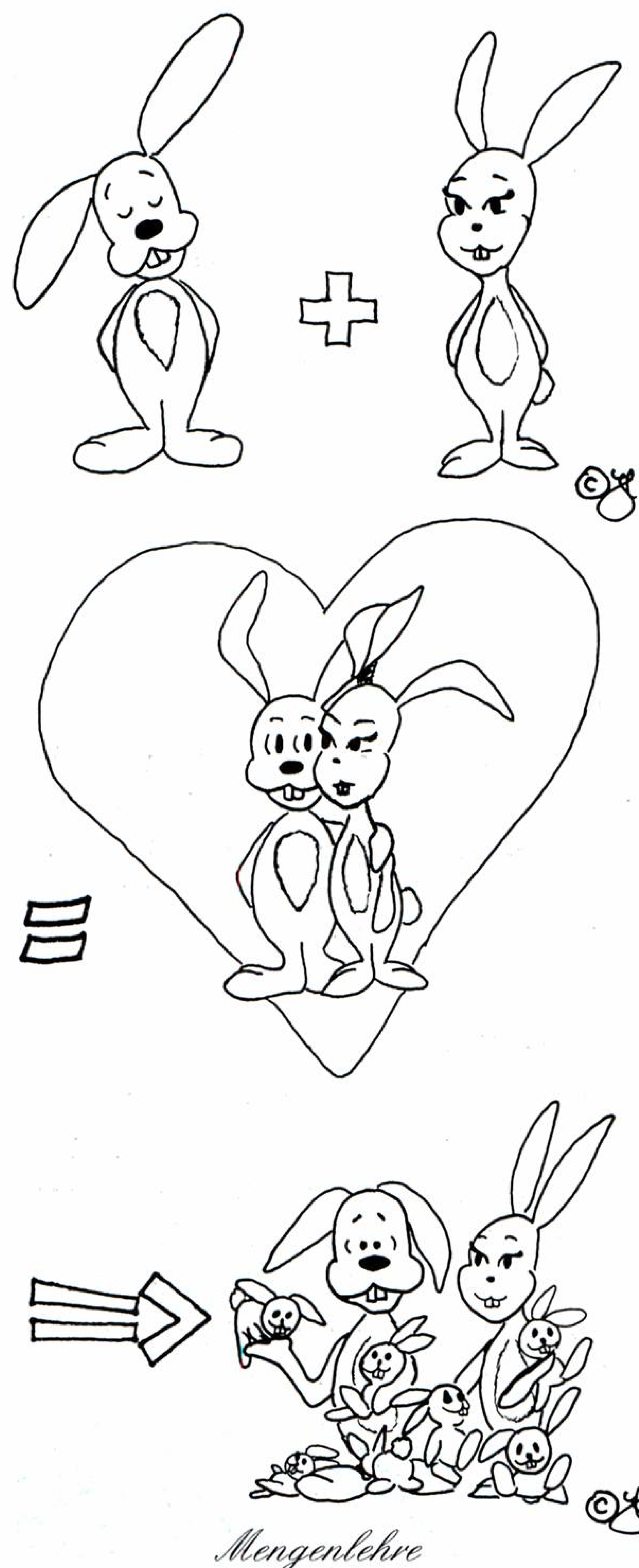
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$	Menge der natürlichen Zahlen mit Ausnahme der Zahl 0
$\mathbb{N}_g = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$	Menge der geraden natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_u = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$	Menge der ungeraden natürlichen Zahlen
$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$	Menge der Primzahlen[1]

[1]) Eine von 0 und 1 verschiedene natürliche Zahl heißt **Primzahl**, wenn sie nur durch 1 und sich selbst ohne Rest teilbar ist. Eine Primzahl besitzt außer diesen trivialen Teilern keine weiteren. Noch kürzer: Eine Primzahl p ist — außer durch $1 \cdot p$ bzw. $p \cdot 1$ — nicht in ein Produkt von natürlichen Zahlen zerlegbar.



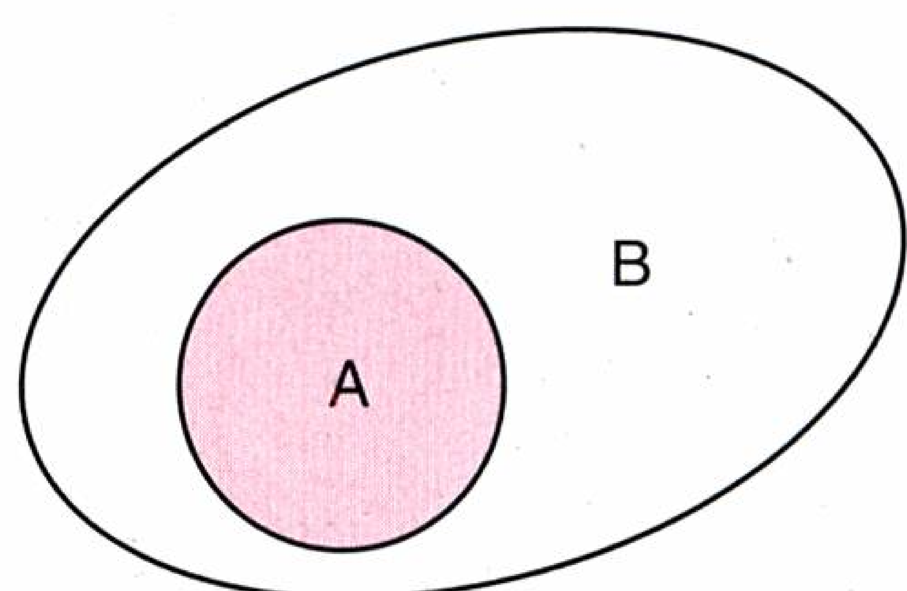
Georg CANTOR (1845–1918), der Begründer der Mengenlehre, gehört zu den bedeutendsten Mathematikern des 19. Jahrhunderts. Nicht — wie oft behauptet wird — die intensive Beschäftigung mit abstrakten Ideen hat zu häufigen Krankenhausaufenthalten von CANTOR geführt, sondern eine manisch-depressive Krankheit. Konflikte, ausgelöst durch seine damals revolutionären Ideen, verstärkten diese. CANTOR hat sich außer mit Mathematik auch intensiv mit Philosophie beschäftigt. Er war — für uns heute wenig verständlich — ein eifriger Anhänger der damals äußerst populären und umstrittenen Bacon-Shakespeare-Theorie, die Francis BACON als Autor der Shakespeare-Dramen vermutet. Gegen Ende seines Lebens wurden seine mathematischen Leistungen voll gewürdigt und er konnte mit Recht zu seinem Sohn sagen: *„Solange Mathematik wissenschaftlich betrieben wird, werden meine Lehren von Bedeutung sein."*

Ist x ein Element von M ?	
Ja	Nein
x ∈ M	x ∉ M



Definition:

Eine Menge A ist **Teilmenge** einer Menge B (geschrieben: $A \subseteq B$), wenn jedes Element von A Element von B ist.



Mengen werden im Allgemeinen auf zwei Arten festgelegt:
(1) in aufzählender Form
(2) in beschreibender Form

Zwei Beispiele für die **aufzählende Form:** $M = \{0, 1, 2\}$, $A = \{a, b, c, d\}$. Die Menge $M = \{0, 1, 2\}$ kann nun z. B. folgendermaßen in **beschreibender Form** dargestellt werden: $M = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 3\}$ (gesprochen: M ist die Menge aller x, für die gilt, x ist ein Element der Menge der natürlichen Zahlen und x ist kleiner 3).

Dieses Verfahren wird hauptsächlich dann angewendet, wenn die aufzählende Form zu umständlich oder unmöglich ist bzw. wenn man die Elemente einer Menge durch eine bestimmte Eigenschaft ausgewählt hat, aber noch nicht im Einzelnen kennt.

Bei einer in beschreibender Form angegebenen Menge könnte es ja prinzipiell vorkommen, dass die Bildungsvorschrift der Elemente einen Widerspruch enthält, z. B. $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 0\}$.

Man müsste also jedesmal überprüfen, ob die Bildungsvorschrift widerspruchsfrei ist. Um sich diese Arbeit zu ersparen und so die Theorie einheitlicher und einfacher zu gestalten, wurde die sogenannte **„leere Menge"** eingeführt. Man kann sich darunter eine „Menge" vorstellen, welche keine Elemente enthält. Dieses „künstlich erschaffene" Objekt zählen wir zu den Mengen. Als Symbol für die leere Menge verwenden wir { }.

Die leere Menge wird in der Schulbuchliteratur manchmal auch Nullmenge genannt. Allerdings ist zu beachten, dass die leere Menge null Elemente (also keine Elemente) und nicht die Zahl 0 (Null) enthält.

Ist die Anzahl der Elemente durch eine natürliche Zahl ausdrückbar, spricht man von einer **endlichen Menge**.

So ist z. B. die Menge $A = \{a, b, c\}$ ebenso wie die Menge $B = \{3, 9, 11, 17\}$ eine endliche Menge. A enthält drei, B enthält vier Elemente. Ist die Anzahl der Elemente einer Menge durch eine natürliche Zahl nicht ausdrückbar, spricht man von einer **unendlichen Menge**.

Die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}_g$, $\mathbb{N}_u$, $\mathbb{P}$ sind Beispiele für unendliche Mengen.[1)]

Die leere Menge wird zu den endlichen Mengen gerechnet.

2. Beziehungen zwischen Mengen

2.1 Teilmenge

Betrachtet man die Mengen $X = \{5, 7, 9, 11, 13\}$, $Y = \{5, 7, 11\}$, $Z = \{5, 7, 9, 11, 13\}$ so fällt auf: Jedes Element der Menge Y ist auch Element der Menge X. Die Menge Y wird als **Teilmenge** der Menge X bezeichnet. Auch die Menge Z gilt als Teilmenge von X, weil jedes Element der Menge Z auch Element der Menge X ist.

Beispiel:

Welche der folgenden Mengen sind Teilmengen der Menge $\mathbb{N}$?

a) $M = \{2, 4, -5, 0\}$ **b)** $\mathbb{N}_g$ **c)** $\mathbb{N}_u$ **d)** $\mathbb{N}$ **e)** $\mathbb{P}$ **f)** { }

Lösung:

Alle angeführten Mengen mit Ausnahme der Menge M sind Teilmengen der Menge $\mathbb{N}$!

1) In der Mengenlehre gibt es wichtige, aber nicht mehr anschauliche Sätze für unendliche Mengen.

Wie lässt sich die Lösung des links unten stehenden Beispiels begründen? Nun: Die Teilmengen sind in der Menge ℕ enthalten, d. h. jedes ihrer Elemente ist ein Element der Menge ℕ. Bei der Menge M ist das Element „– 5" kein Element der Menge ℕ!

Wenn man ausdrücken will, dass A nicht Teilmenge von B ist, schreibt man: $A \not\subseteq B$

Beispiel:
Man bilde alle Teilmengen der Mengen **a)** A = {a, b} **b)** B = {1, 2, 3}

Lösung:
a) {a}, {b}, {a, b}, { } **b)** {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}, { }

Es gibt beim Enthaltensein zweier Mengen zwei Sonderfälle:

(1) Jede Menge enthält sich selbst als Teilmenge.

(2) Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

Wenn die Menge B außer den Elementen der Teilmenge A noch andere Elemente enthält, bezeichnet man A als **echte Teilmenge** von B. Wenn es kein Element von B gibt, das nicht zu A gehört, bezeichnet man A als **unechte Teilmenge** von B bzw. man sagt, dass die Mengen gleich sind.

Symbole:

$\subset$..... ist **echte** Teilmenge von
$\subseteq$..... ist Teilmenge von

2.2 Gleichheit von Mengen

Die Mengen $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 5\}$ und B = {0, 1, 2, 3, 4} sind gleich. Man begründe diesen Sachverhalt selbstständig und gebe Beispiele für gleiche und für ungleiche Mengen an.

Wenn man ausdrücken will, dass die Menge A ungleich der Menge B ist, schreibt man: $A \neq B$.

Definition:
Zwei Mengen A und B sind gleich (geschrieben: A = B), wenn jedes Element von A auch Element von B ist und umgekehrt. Es gilt also: $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

3. Verknüpfung von Mengen

3.1 Durchschnittsmenge

Betrachtet man die Mengen A = {1, 3, 5, 7, 9}, B = {3, 5, 7, 11, 25}, C = {3, 5, 7} so fällt auf: Jedes Element der Menge C ist sowohl Element der Menge A als auch Element der Menge B.

Die Menge C wird als **Durchschnittsmenge** der Mengen A und B bezeichnet: $C = A \cap B$.

Definition:
Unter der **Durchschnittsmenge** $A \cap B$ (gesprochen: A geschnitten mit B) der beiden Mengen A und B versteht man die Menge aller Elemente, die sowohl der Menge A als auch der Menge B angehören. Es gilt also: $(A \cap B \subseteq A) \wedge (A \cap B \subseteq B)$

Beispiel:
M_1 = {49, 23, 27, 665}, M_2 = {9, 66, 37, 49, 23, 88}, M_3 = {48, 665, 666}

(1) Es ist zu ermitteln: **a)** $M_1 \cap M_2$ **b)** $M_1 \cap M_3$ **c)** $M_2 \cap M_3$

(2) Die Lösungen **a)** bis **c)** sind grafisch zu veranschaulichen!

Lösung:

(1) **a)** $M_1 \cap M_2$ = {49, 23} **b)** $M_1 \cap M_3$ = {665} **c)** $M_2 \cap M_3$ = { }

(2) **a)**

b)

c)

Definition:

Unter der **Vereinigungsmenge** $A \cup B$ (gesprochen: A vereinigt mit B) der beiden Mengen A und B versteht man die Menge aller Elemente, die der Menge A oder der Menge B oder auch beiden Mengen angehören. Es gilt also: $(A \subseteq A \cup B) \wedge (B \subseteq A \cup B)$

3.2 Vereinigungsmenge

Betrachtet man die Mengen $A = \{17, 33, 47, 12\}$, $B = \{15, 33, 19, 20\}$ und $C = \{12, 15, 17, 19, 20, 33, 47\}$ so fällt auf: Jedes Element der Menge C ist Element der Menge A oder der Menge B.

Die Menge C wird als **Vereinigungsmenge** der Mengen A und B bezeichnet: $C = A \cup B$.

Beispiel:

$M_1 = \{49, 23, 27, 665\}$, $M_2 = \{9, 66, 37, 49, 23, 88\}$, $M_3 = \{48, 665, 666\}$

(1) Es ist zu ermitteln: **a)** $M_1 \cup M_2$ **b)** $M_1 \cup M_3$ **c)** $M_2 \cup M_3$

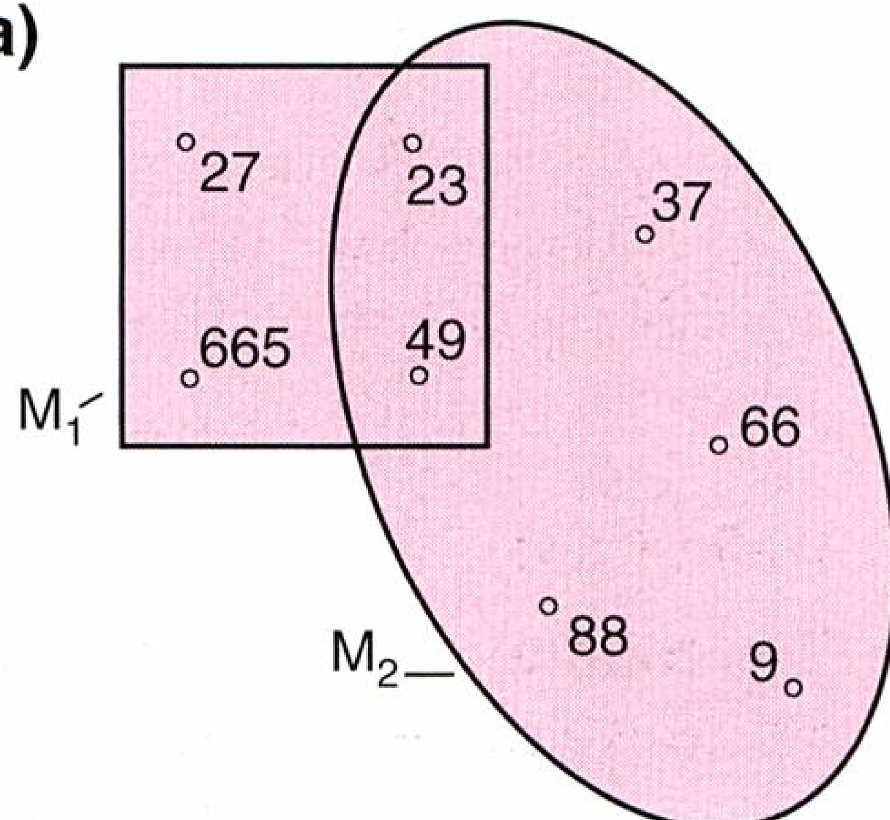
(2) Die Lösungen **a)** bis **c)** sind grafisch zu veranschaulichen!

Lösung:

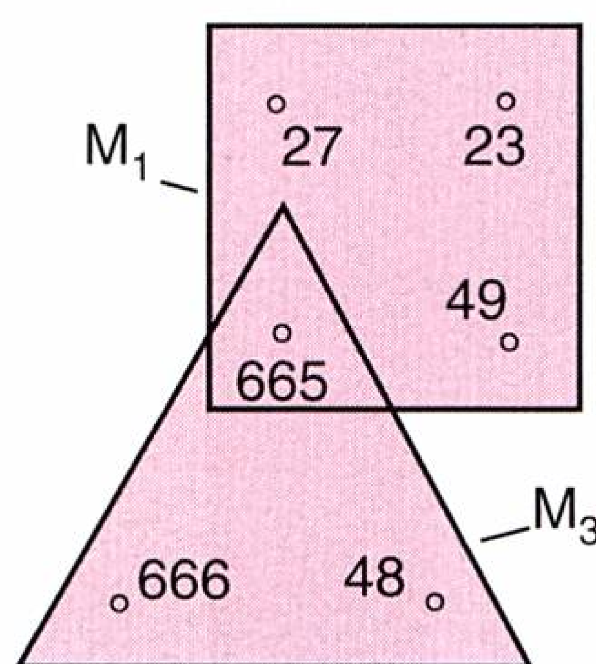
(1) **a)** $M_1 \cup M_2 = \{9, 66, 37, 49, 23, 27, 88, 665\}$ **b)** $M_1 \cup M_3 = \{48, 49, 23, 27, 665, 666\}$

c) $M_2 \cup M_3 = \{9, 66, 37, 48, 49, 23, 88, 665, 666\}$

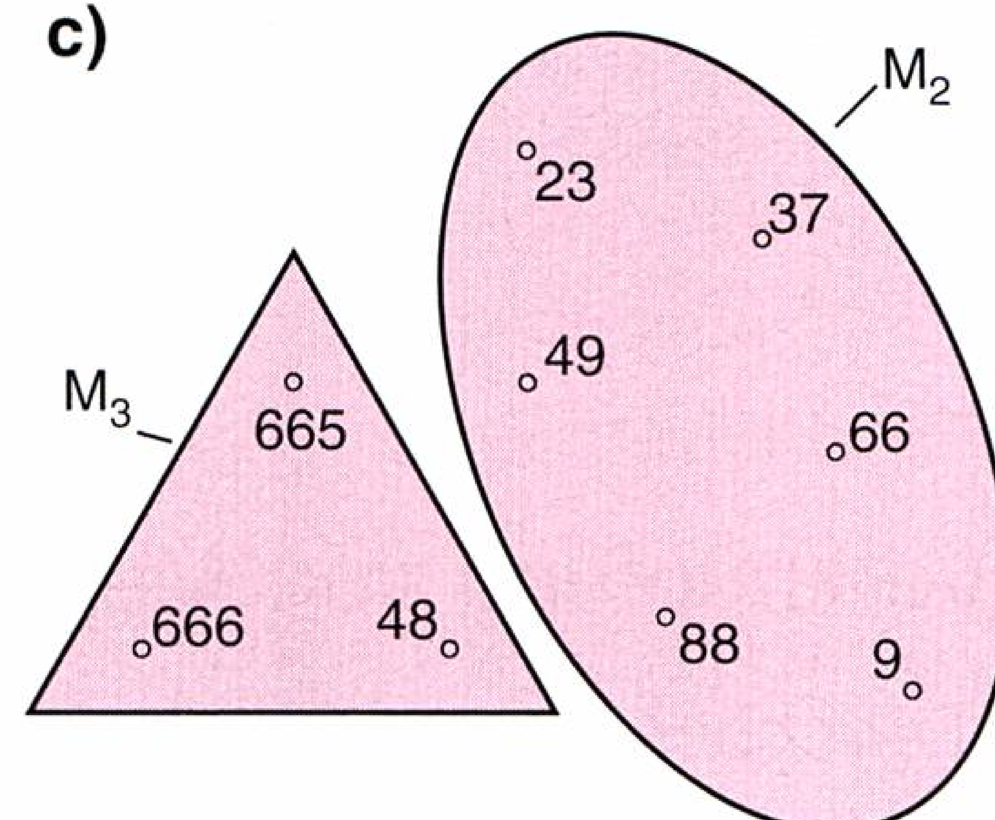
(2) **a)**



b)



c)



Definition:

Unter der **Differenzmenge** $A \setminus B$ (gesprochen: A ohne B) der beiden Mengen A und B versteht man die Menge aller Elemente, die zu A und nicht zu B gehören.

3.3 Differenzmenge

Betrachtet man die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4\}$ und $C = \{1, 2, 5\}$ so fällt auf: Jene Elemente der Menge A, die nicht Elemente der Menge B sind, sind genau die Elemente der Menge C.

Die Menge C wird als **Differenzmenge** der Mengen A und B bezeichnet: $C = A \setminus B$.

Beispiel:

$M_1 = \{9, 10, 11\}$, $M_2 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 11\}$

(1) Es ist zu ermitteln: **a)** $M_1 \setminus M_2$ **b)** $M_2 \setminus M_1$

(2) Die Ergebnisse von **(1)** sind grafisch zu veranschaulichen!

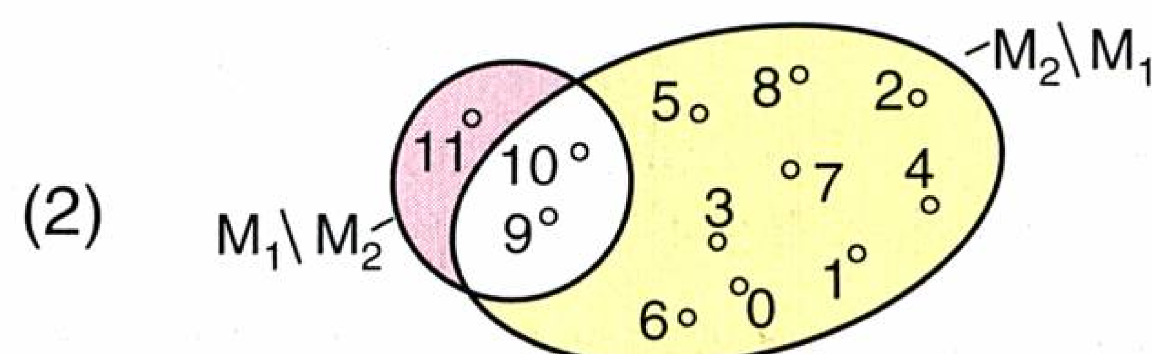
Lösung:

$M_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

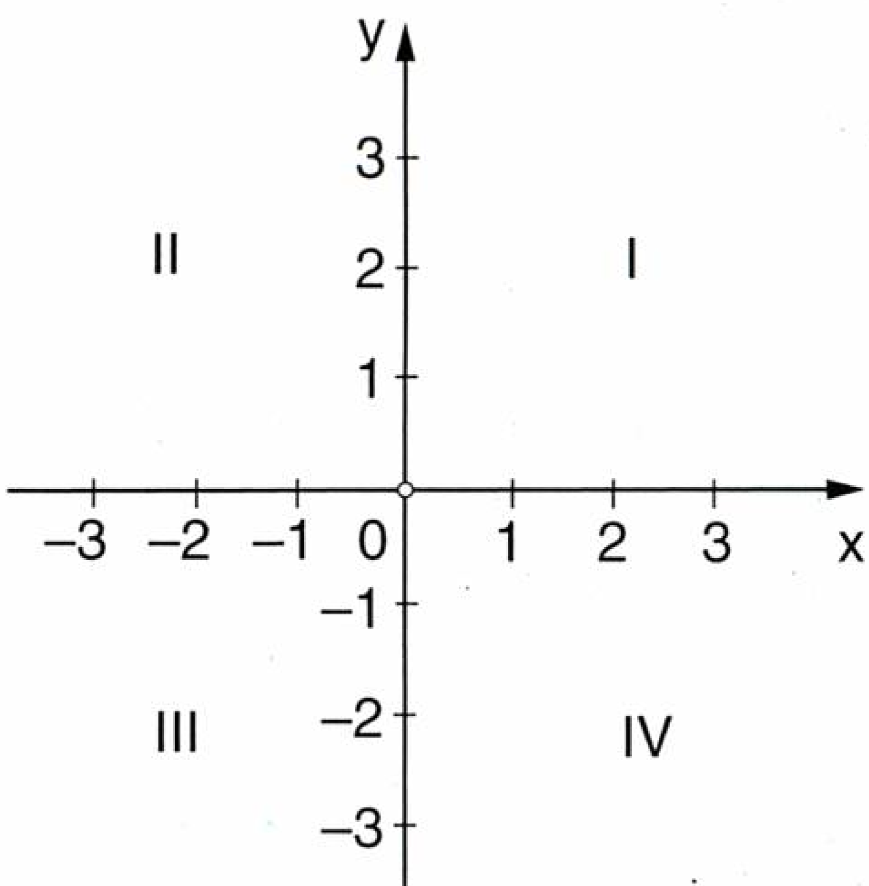
(1) **a)** $M_1 \setminus M_2 = \{11\}$

b) $M_2 \setminus M_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(2)



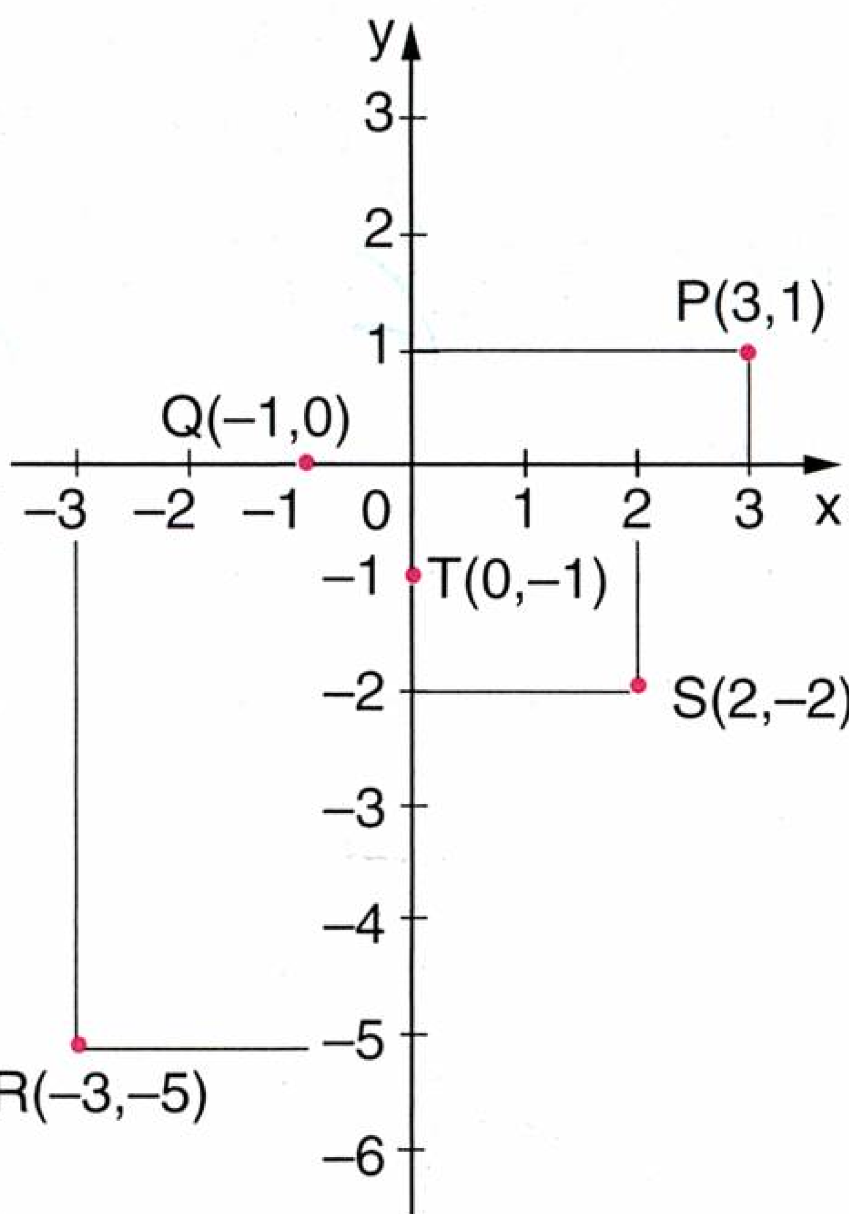
3.4 Geordnete Paare



Erinnern wir uns an das **rechtwinkelige Koordinatensystem:**

Die Koordinatenachsen x, y schneiden einander im **Ursprung 0** unter einem rechten Winkel. Man bezeichnet die waagrecht liegende Achse als **x-Achse** oder **Abszissenachse**, die dazu senkrechte Achse als **y-Achse** oder **Ordinatenachse**. Die xy-Ebene wird in vier Felder, die sogenannten **Quadranten** aufgeteilt, die in der Abbildung mit I, II, III, IV gekennzeichnet sind. Die Einheiten werden auf der Abszissen- und Ordinatenachse meistens im gleichen Maßstab eingetragen. Solche Koordinatensysteme heißen **kartesisch**.

In der nebenstehenden Figur sind die Punkte P(3, 1), Q(−1, 0), R(−3, −5), S(2, −2), und T(0, −1) eingezeichnet.



Durch (0, −1) wird ein anderer Punkt festgelegt als durch (−1, 0). Offensichtlich kommt es auf die Reihenfolge an: Die Koordinaten eines Punktes sind ein **geordnetes Paar**.

Bei einem geordneten Paar (a, b) nennt man a die **erste Komponente (erste Koordinate)**, b die **zweite Komponente (zweite Koordinate)**. Die beiden Komponenten eines geordneten Paares dürfen für $a \neq b$ nicht miteinander vertauscht werden.

Jedes geordnete Zahlenpaar (x, y) entspricht **genau einem Punkt** P(x, y) im rechtwinkeligen Koordinatensystem. Umgekehrt wird jeder Punkt P(x, y) des rechtwinkeligen Koordinatensystems durch ein geordnetes Zahlenpaar eindeutig festgelegt.

Definition:

Wenn bei einem Paar (a, b) die Reihenfolge der Elemente — zuerst a, dann b — eindeutig festgelegt ist, dann bezeichnet man (a, b) als **geordnetes Paar**. Zwei geordnete Paare (a, b) und (c, d) sind genau dann gleich, wenn a = c und b = d gilt.

3.5 Produktmenge

Betrachtet man die Menge jener geordneten Paare, die man aus den Mengen A = {1, 2} und B = {5} bilden kann, wenn man als erste Komponente nur die Elemente der Menge A und als zweite Komponente nur die Elemente der Menge B zulässt, so erhält man folgende geordnete Paare: (1, 5), (2, 5).

Die Menge dieser Zahlenpaare wird als **Produktmenge** der Mengen A und B bezeichnet. Manchmal wird auch die Bezeichnung **kartesisches Produkt** verwendet.

Definition:

Unter der **Produktmenge** $A \times B$ (gesprochen: A kreuz B) zweier Mengen A und B versteht man die Menge aller geordneten Paare (a, b), deren erste Komponente ein Element von A und deren zweite Komponente ein Element von B ist.

Beispiel:

A = {1, 2, 3}, B = {3, 4}. Die Produktmenge $A \times B$ ist **a)** zu bilden und **b)** in Tabellenform darzustellen.

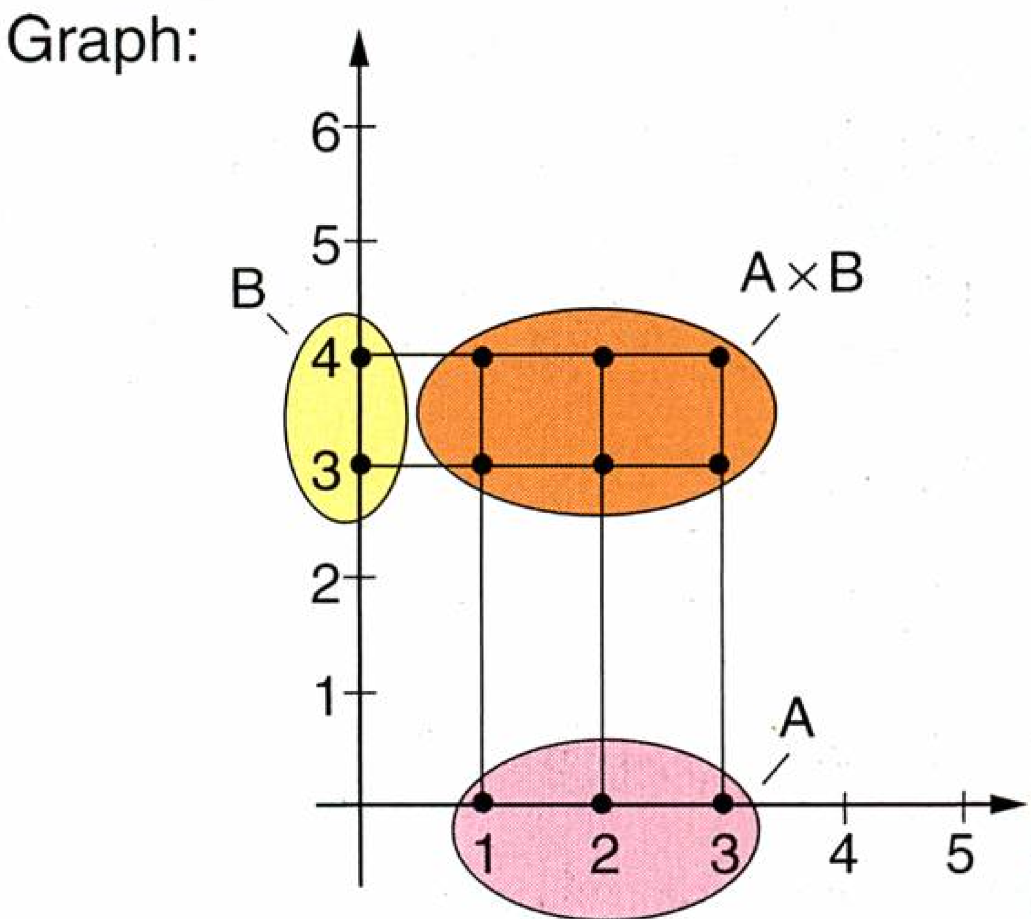
Lösung:

a) $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$

b)

	3	4
1	(1, 3)	(1, 4)
2	(2, 3)	(2, 4)
3	(3, 3)	(3, 4)

Graph:



Mit den Zahlenmengen A und B lässt sich jedes Zahlenpaar aus $A \times B$ als Punkt in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen. Die Menge dieser Punkte heißt **Graph** der Produktmenge.

In nebenstehender Abbildung wird der Graph der im obigen Beispiel angegebenen Produktmenge veranschaulicht.

AUFGABEN

61. Es sind jene Formulierungen anzukreuzen, bei denen der Begriff „Menge“ im mathematischen Sinn verwendet wird:

○ **a)** Die Menge der Zuschauerinnen und Zuschauer im Stadion.

○ **b)** Im Stadion waren eine Menge Zuschauerinnen und Zuschauer.

○ **c)** Die Menge der Buchstaben des Wortes „OTTO“.

○ **d)** Die Menge der Nadelbäume in einem Laubwald.

○ **e)** Die Menge der Meter[1], die einen Kilometer ausmachen.

62. Die nachstehende Tabelle ist — durch Verwendung der Symbole $\in$ bzw. $\notin$ — zu vervollständigen:

	3	8	0,7	11	$\frac{3}{4}$	198	$\pi = 3{,}14...$
$\mathbb{N}$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\mathbb{N}_g$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\mathbb{N}_u$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\mathbb{P}$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

63. Die wahren Aussagen sind anzukreuzen:

○ **a)** $0 \in \{\,\}$

○ **b)** $27 \in \{2, 7, 72\}$

○ **c)** $43 \in \{x \mid x$ ist ein Teiler von $430\}$

○ **d)** $0 \notin \{100\,000\}$

○ **e)** $216 \notin \{x \mid x$ ist ein Vielfaches von $8\}$

○ **f)** $7 \in \{x \mid x$ ist ein Vielfaches von $3\}$

64. Die folgenden Mengen sind in **aufzählender Form** anzugeben:

a) $A = \{x \mid x = 5\}$

b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 3\}$

c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}_g \wedge 5 < x < 9\}$

d) $D = \{x \mid x$ ist ein eckiger Kreis$\}$

e) $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}_g \wedge x \in \mathbb{P}\}$

f) $F = \{x \mid x \in \mathbb{N}_u \wedge 6 > x > 3\}$

g) $G = \{x \mid x$ ist ein Vielfaches von $3 \wedge 0 < x < 19\}$

h) $H = \{x \mid x$ ist ein verheirateter Junggeselle$\}$

65. Die folgenden Mengen sind in **beschreibender Form** anzugeben:

a) $A = \{12, 14, 16, 18\}$

b) $B = \{3, 4, 5\}$

c) $C = \{101, 102, 103, ..., 199\}$

d) $D = \{17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ...\}$

e) $E = \{5, 10, 15, 20\}$

f) $F = \{18, 21, 24, 27, 30\}$

g) $G = \{29, 30\}$

h) $H = \{a\}$

66. Die Leerstellen sind — durch Verwendung der Symbole $\subseteq$ bzw. $\not\subseteq$ — zu vervollständigen!

$M_1 = \{3, 4, 5\}$, $M_2 = \{5, 3\}$, $M_3 = \{5, 6, 7\}$, $M_4 = \{\,\}$

a) M_1 ..... M_2

b) M_2 ..... M_1

c) M_2 ..... M_3

d) M_3 ..... M_4

67. Von der Menge $M = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 10 > x > 2\}$ sind folgende Teilmengen zu bestimmen:

a) A, Menge aller durch 4 teilbaren Zahlen von M

b) B, Menge aller geraden Zahlen von M

c) C, Menge aller ungeraden Zahlen von M

d) D, Menge aller Primzahlen von M

---

[1]) Die einzelnen Meter sind **nicht** voneinander unterscheidbar.

68. Wie lauten alle echten Teilmengen der Menge $M = \{x | x \in \mathbb{N}_g \wedge 0 < x < 7\}$?

69. Der fehlende Text ist einzusetzen:

a) Für die Bezeichnung von Mengen verwenden wir ..... (Großbuchstaben/Kleinbuchstaben). Für die Bezeichnung von Elementen einer Menge gebrauchen wir ..... (Großbuchstaben/Kleinbuchstaben).

b) Wenn a ein Element von M ist, schreibt man: ..... ($a \in M$ / $a = M$ / $M \in a$).

c) Bei der Festlegung von Mengen ist die Reihenfolge der Elemente ..... (von/ohne) Bedeutung.

d) Bei der Darstellung einer Menge in der aufzählenden Form wird jedes Element der Menge ..... (mindestens/wenigstens/höchstens/genau) einmal angeschrieben.

e) Jede Teilmenge einer endlichen Menge ist eine ..... (endliche/unendliche) Menge.

f) Jede Menge, die eine unendliche Menge als Teilmenge hat, ist eine ..... (endliche/unendliche) Menge.

g) Wenn die Menge A mindestens ein Element enthält, das nicht Element der Menge B ist und die Menge B kein Element enthält, das nicht Element der Menge A ist, so gilt: ..... ($A = B$ / $B \subseteq A$ / $A \subset B$ / $A \subset A$). Wie könnte man den Sachverhalt grafisch veranschaulichen?

h) Wenn die Menge A Teilmenge der Menge B ist und gleichzeitig die Menge B Teilmenge der Menge A ist, so gilt ..... ($A = B$ / $A \neq B$), und man bezeichnet A als ..... (echte/unechte) Teilmenge von B.

70. Die wahren Aussagen sind anzukreuzen:

○ **a)** $\{\,\} = \{0\}$ ○ **b)** $\{3\} \neq \{5\}$

○ **c)** $\{99, 81\} \neq \{81, 99\}$ ○ **d)** $\{x | x \in \mathbb{N}_g \wedge 0 < x < 2\} \neq \{\,\}$

71. Wenn es kein Element der Menge A gibt, das nicht Element der Menge B ist und es gleichzeitig kein Element der Menge B gibt, das nicht Element der Menge A ist, so gilt: .....

72. a) Können zwei endliche Mengen, die eine verschiedene Anzahl von Elementen haben, jemals gleich sein?

b) Sind zwei endliche Mengen, die eine gleiche Anzahl von Elementen haben, immer gleich?

c) Haben zwei gleiche Mengen immer die gleiche Anzahl von Elementen?

73. Es sind die Mengen $M_1 = \{3, 4, 5\}$, $M_2 = \{1, 3, 4\}$, $M_3 = \{4, 5, 6, 8, 9\}$, $M_4 = \{\,\}$ gegeben. Man ermittle:

a) $M_1 \cap M_2$ **b)** $M_2 \cap M_3$ **c)** $M_1 \cap M_1$

d) $M_1 \cap M_4$ **e)** $M_1 \cap M_3$ **f)** $M_4 \cap M_3$

74. Folgende Durchschnittsmengen sind zu ermitteln:

a) $\mathbb{N} \cap \mathbb{N}_g$ **b)** $\mathbb{N} \cap \mathbb{N}_u$ **c)** $\mathbb{N}_g \cap \mathbb{N}_u$

d) $\mathbb{N} \cap \mathbb{P}$ **e)** $\mathbb{N}_g \cap \{\,\}$ **f)** $\mathbb{N} \cap \mathbb{N}$

75. Es sind die Mengen $M_1 = \{7, 9, 11, 13\}$ und $M_2 = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x < 11\}$ gegeben.
Man ermittle den Wahrheitswert der folgenden Aussagen:

a) $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$ **b)** $M_1 \cap M_2 \subseteq M_1$

c) $M_2 \cap M_1 \subseteq M_2$ **d)** $M_2 \cap M_1 = M_2$

76. Es ist der Durchschnitt der folgenden Mengen in **(1)** aufzählender **(2)** beschreibender Form anzugeben:

a) $A = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge 5 > x > 1\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{N}_g \wedge 0 < x < 10\}$

b) $C = \{x | x \in \mathbb{N}_u \wedge 9 < x < 15\}$, $D = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x < 16\}$

c) $E = \{x | x \in \mathbb{N}_g \wedge 0 < x < 8\}$, $F = \{x | x \in \mathbb{P} \wedge 2 < x < 12\}$

77. Wenn man die „größte“ Menge M, die in den Mengen A und B enthalten ist, darstellen will, so gilt: $M = ...$

78. Es sind die Mengen $M_1 = \{2, 4, 9\}$, $M_2 = \{1, 2, 3\}$, $M_3 = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x < 10\}$, $M_4 = \{\,\}$ gegeben. Man ermittle:

a) $M_1 \cup M_2$ **b)** $M_2 \cup M_3$ **c)** $M_4 \cup M_4$

d) $M_2 \cup M_4$ **e)** $M_4 \cup M_1$ **f)** $M_1 \cup M_3$

79. Folgende Vereinigungsmengen sind zu ermitteln:

a) $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_g$ **b)** $\{\,\} \cup \{\,\}$ **c)** $\mathbb{N}_g \cup \mathbb{N}_u$
d) $\mathbb{N} \cup \mathbb{P}$ **e)** $\mathbb{N}_g \cup \{\,\}$ **f)** $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}$

80. Es sind die Mengen $M_1 = \{8, 9, 12, 13, 17, 20\}$ und $M_2 = \{x \mid x \in \mathbb{N}_g \wedge 9 > x > 3\}$ gegeben. Man ermittle den Wahrheitswert der folgenden Aussagen:

a) $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ **b)** $M_1 \subseteq M_1 \cup M_2$
c) $M_2 \subseteq M_1 \cup M_2$ **d)** $M_1 \cup \{\,\} = M_2$

81. Es ist die Vereinigungsmenge der folgenden Mengen in (1) aufzählender (2) beschreibender Form anzugeben:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 9 > x > 2\}$, $B = \{x \mid x = 13\}$
b) $C = \{x \mid x \in \mathbb{P} \wedge x < 12\}$, $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}_g \wedge 5 > x > 1\}$
c) $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}_u \wedge 9 < x < 19\}$, $F = \{x \mid x \in \mathbb{N}_g \wedge 6 < x < 12\}$

82. Wenn man die „kleinste" Menge M, die die Mengen A und B enthält, darstellen will, so gilt: M = ...

83. Es sind die Mengen $M_1 = \{1, 2, 3\}$, $M_2 = \{3, 7\}$, $M_3 = \{4, 7\}$ gegeben. Man ermittle:

a) $M_1 \setminus M_2$ **b)** $M_2 \setminus M_1$ **c)** $M_1 \setminus M_3$
d) $M_3 \setminus M_1$ **e)** $M_2 \setminus M_3$ **f)** $M_3 \setminus M_2$

84. Folgende Differenzmengen sind zu ermitteln:

a) $\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}_g$ **b)** $\mathbb{N}_g \setminus \{\,\}$ **c)** $\mathbb{N}_g \setminus \mathbb{P}$
d) $\mathbb{N}_u \setminus \{0\}$ **e)** $\mathbb{P} \setminus \mathbb{P}$ **f)** $\{\,\} \setminus \mathbb{N}_u$

85. Es sind die Mengen $M_1 = \{3, 6, 12, 24\}$, $M_2 = \{1, 3\}$, $M_3 = \{18, 19, 20, 27, 32\}$ gegeben. Der Wahrheitswert der folgenden Aussagen ist zu bestimmen:

a) $M_1 \setminus M_2 \neq M_2 \setminus M_1$ **b)** $(M_1 \cap M_2) \setminus M_3 = (M_1 \setminus M_3) \cap M_2$
c) $(M_1 \cup M_2) \setminus M_3 = (M_1 \setminus M_3) \cup (M_2 \setminus M_3)$ **d)** $(M_3 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_3) = M_2 \cup M_3$

86. Es sind die Differenzmengen der folgenden Mengen in (1) aufzählender (2) beschreibender Form anzugeben:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 12\}$, $B = \{x \mid x = 11\}$
b) $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}_g \wedge 5 < x < 10\}$, $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}_u\}$
c) $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}_u \wedge 9 > x > 1\}$, $F = \{x \mid x \in \mathbb{N}_u \wedge 7 < x < 9\}$

87. $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = ?$

○ **a)** $A \cap B$ ○ **b)** $B \cup A$ ○ **c)** $\{\,\}$ ○ **d)** $(B \setminus A) \cup (A \setminus B)$

88. Die wahren Aussagen sind anzukreuzen:

○ **a)** $\{1, 3\} = \{3, 1\}$ ○ **b)** $\{1, 3\} \neq (1, 3)$ ○ **c)** $(1, 3) = (3, 1)$ ○ **d)** $(1, 3) = \{(1, 3)\}$

89. In einem kartesischen Koordinatensystem sind folgende Punkte einzuzeichnen:
$P_1(3, 5)$, $P_2(-3, 1)$, $P_3(-5, -5)$, $P_4(5, -1)$, $P_5(0, 0)$

90. Man ermittle durch Abmessung den Umfang des Dreiecks ABC, das durch die Punkte A, B, C der geordneten Zahlenpaare $(9, -3)$, $(-3, 2)$, $(-3, -3)$ festgelegt ist!

91. Der fehlende Text ist einzusetzen:

a) Ein Punkt liegt unterhalb der Abszissenachse, wenn seine ..... (erste/zweite) Koordinate ..... (positiv/negativ) ist.

b) Ein Punkt liegt im ersten Quadranten, wenn seine erste Koordinate ..... (positiv/negativ) ist und seine zweite Koordinate ..... (positiv/negativ) ist.

92. Es sind die Mengen A = {7, 8} und B = {1, 9} gegeben.
Die Produktmenge **a)** A × B **b)** B × A **c)** A × A **d)** B × B ist **(1)** zu bilden und **(2)** in Tabellenform darzustellen.

93. Es ist die Produktmenge der beiden Mengen A = {1, 2, 3} und B = {4, 5, 6, 7} zu bilden! Der Graph der Produktmenge ist in einem kartesischen Koordinatensystem darzustellen!

94. Es sind die Mengen A = {x | x ∈ $\mathbb{N}_g$ ∧ x < 8} und B = {3, 4} gegeben. Man ermittle:
a) A × (B ∩ A) **b)** B × (A ∪ B) **c)** A × { } **d)** A × (B \ A)

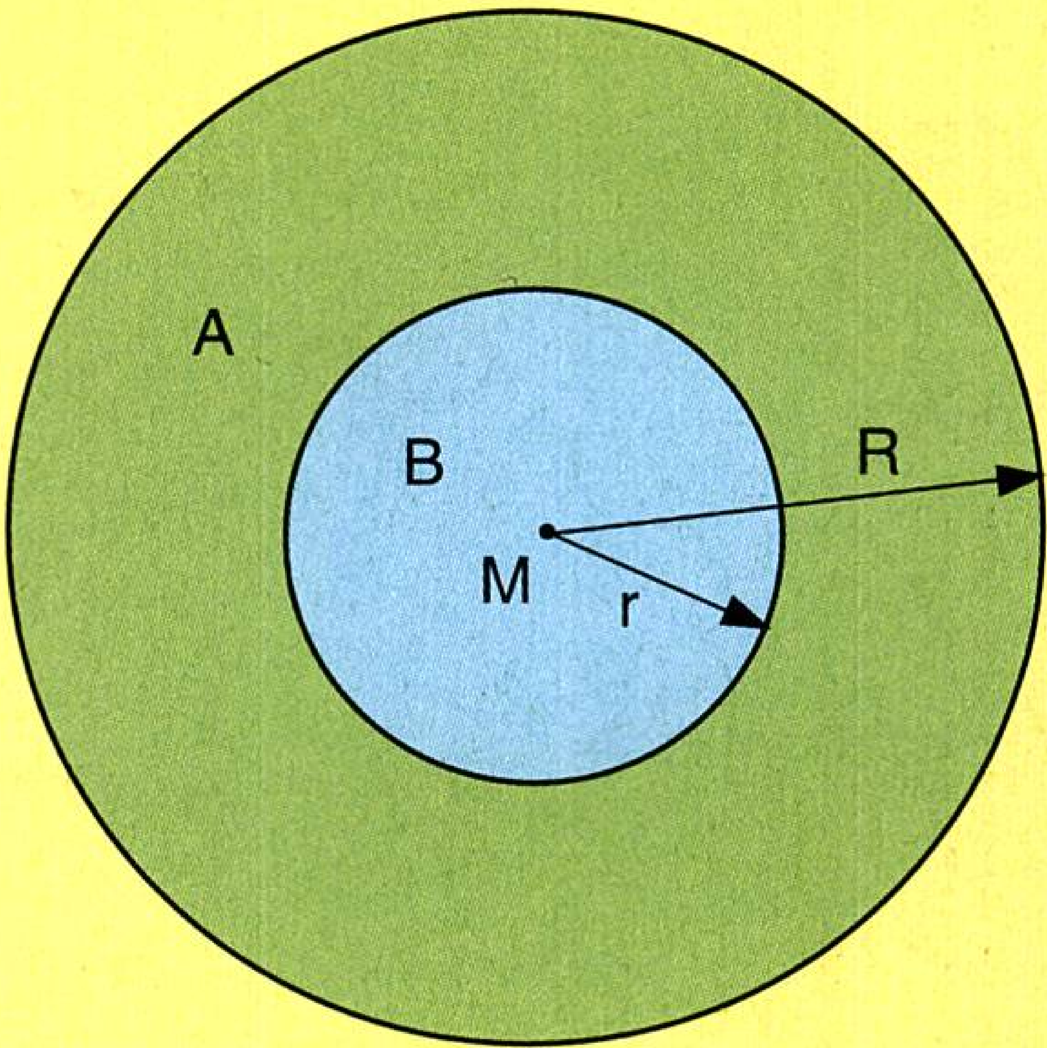
95. a) Die Menge A enthält 3 Elemente, die Menge B enthält 9 Elemente. Aus wie vielen geordneten Paaren besteht die Produktmenge A × B?
b) Die Menge A enthält 17 Elemente. Aus wie vielen geordneten Paaren besteht A × A?

96. Welche der folgenden Mengen sind Produktmengen?
○ **a)** {(1, 2), (2, 1), (1, 3)} ○ **b)** {(x, x), (y, x), (z, x)}
○ **c)** {(Graz, Linz), (Linz, Graz), (Graz, Graz), (Linz, Linz)} ○ **d)** {(a, b), (a, c), (b, b), (c, b)}
○ **e)** {(5, 2), (6, 2), (7, 2), (5, 3), (7, 3), (6, 3)} ○ **f)** {(3, 4), (4, 3), (3, 3), (4, 4)}

97. Gegeben sind die Mengen A = {1, 2, 3}, B = {4, 5}, C = {2, 3, 4} und D = { }. In der nachstehenden Tabelle sind den waagrecht stehenden Mengenverknüpfungen durch Ankreuzen die richtigen Ergebnisse zuzuordnen:

Mengenverknüpfung / Lösung	A ∩ B (1)	B ∩ D (2)	B ∪ C (3)	A ∪ D (4)	C \ A (5)	B \ C (6)	D \ A (7)	B × B (8)
a) {(4, 4), (5, 5)}								
b) {4, 5}								
c) {2, 4}								
d) { }	✓	✓					✓	
e) {1, 2, 3}				✓				
f) {(4, 5), (5, 4)}								
g) {5}						✓		
h) Keine der von a) bis g) angeführten Lösungen trifft zu.			✓		✓			✓

98. Gegeben sind zwei Kreise mit dem gleichen Mittelpunkt M und den Radien R und r. Die Punktmenge A des Kreises mit dem Radius R sei als Menge der Punkte im Inneren dieses Kreises (unter Ausschluss des Randes) gegeben. Entsprechendes gilt für die Punktmenge B — vgl. nebenstehende Figur. Welche Punktmengen werden durch nachstehende Mengenverknüpfungen dargestellt:



a) A ∩ B für (1) R > r (2) R = r
b) A ∪ B für (1) R > r (2) R = r
c) A \ B für (1) R > r (2) R = r
d) B \ A für (1) R > r (2) R = r

99. Drei Freunde — Peter, Martin und Christoph — sind zum Mittagessen im Gasthof „Zum Schwarzen Raben“. Sie wählen aus der Speisekarte folgende Menüs aus:
Peter: Nudelsuppe, Wiener Schnitzel und Apfelstrudel
Martin: Nudelsuppe, Surbraten und eine Obstschnitte
Christoph: Zwiebelsuppe, Grillwürstel und Apfelstrudel

Hier die Speisekarte:

(S)	SUPPEN:	Nudelsuppe	(n)
		Leberknödelsuppe	(l)
		Zwiebelsuppe	(z)
(H)	HAUPTSPEISEN:	Wiener Schnitzel	(w)
		Fleischknödel	(f)
		Grillwürstel	(g)
		Surbraten	(s)
(N)	NACHSPEISEN:	Obstschnitte	(o)
		Apfelstrudel	(a)

Es sei S die Menge der Suppen, H die Menge der Hauptspeisen und N die Menge der Nachspeisen. Die Gerichte n, l, z usw. sind dann die Elemente dieser drei Mengen: $S = \{n, l, z\}$, $H = \{w, f, g, s\}$, $N = \{o, a\}$. Jedes Menü, das aus Suppe, Hauptspeise und Nachspeise besteht, ist dann ein Element der Menge $S \times H \times N$.

a) Wie viele Menüs kann man aus obiger Speisekarte zusammenstellen?

b) Wie kann man die Menüs von Peter (x_P), Martin (x_M) und Christoph (x_C) mathematisch anschreiben (wenn wir die in obiger Speisekarte angeführten Symbole verwenden wollen)?

100. Ein Institut für statistische Erhebungen befragt 1000 Personen, welche Zeitung sie lesen: 301 Personen lesen den Kurier, 403 Personen lesen die Kronen-Zeitung und 473 die Salzburger Nachrichten (SN). Jeder der befragten Kurier-Leser liest auch die Kronen-Zeitung oder die SN (oder beide). Obwohl etliche Leute die Kronen-Zeitung lesen, gibt es niemanden, der Kronen-Zeitung und SN liest. 240 Personen lesen nur die SN und 100 Personen alle 3 Zeitungen. Man stelle ein Mengendiagramm mit der vollständigen Verteilung der Befragten auf.

101. 1000 Jugendliche werden über ihre Lesegewohnheiten befragt: 480 Personen lesen die Zeitschrift Hobby und 321 lesen Asterix. Jeder der befragten Micky-Maus-Leser liest auch Hobby oder Asterix (oder beides). 140 Personen lesen alle 3 Zeitschriften. 5 Personen lesen nur Hobby und Asterix, 100 lesen nur Micky-Maus und Hobby, 147 lesen nur Asterix. Ein Mengendiagramm mit der vollständigen Verteilung der 1000 Personen ist zu erstellen.



THINK ThInk THINK THINK THINK ThInk THINK



102. Datenbanken sind nicht für jedermann zugänglich. So werden z. B. in folgender Datenbank die Personengruppen A (Raucherinnen und Raucher), B (Sportlerinnen und Sportler) und C (Unfallopfer) — mit Nummern versehen — gespeichert. Doch auch diese Information kann man nicht unmittelbar abfragen. Nur folgende Auswahlen sind verfügbar:

$A \cup B$ ..... Raucher(innen) oder Sportler(innen): $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$A \cap B$ ..... Raucher(innen) und Sportler(innen): $\{2\}$
$B \cup C$ ..... Sportler(innen) oder Unfallopfer: $\{1, 2, 4, 6, 8\}$
$B \cap C$ ..... Sportler(innen) und Unfallopfer: $\{2, 4, 8\}$
$A \cup C$ ..... Raucher(innen) oder Unfallopfer: $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$
$A \cap C$ ..... Raucher(innen) und Unfallopfer: $\{2\}$

Kann man aus diesen Informationen die Mengen A, B und C rekonstruieren?

ZAHLBEREICHE UND RECHENOPERATIONEN

1. Einführung

Welche Bezeichnungen werden bei den Grundrechnungsarten verwendet?

Die folgende Tabelle ist anhand von Zahlenbeispielen zu erklären!

Grundrechnungsart:	Glieder der Rechnung:	Ergebnis:	Rechenoperation:
Addition	Summand + Summand	Summe	1. Stufe
Subtraktion	Minuend – Subtrahend	Differenz	
Multiplikation	Faktor · Faktor	Produkt	2. Stufe
Division	Dividend : Divisor	Quotient	

Beispiele für Potenzen:

$4 \cdot 4 = 4^2$ (gesprochen: 4 hoch zwei bzw. 4 zum Quadrat)

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ (gesprochen: 2 hoch drei)

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$ (gesprochen: 5 hoch vier)

.

.

.

$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ (gesprochen: a hoch n)

Bemerkung: Die Basis muss keineswegs eine natürliche Zahl sein!

Definition:

Ausdrücke der Form a^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ heißen **Potenzen** (mit natürlichen Exponenten). Potenzen werden zunächst als Abkürzung einer Multiplikation mit lauter gleichen Faktoren eingeführt. Dabei wird a als **Basis** oder **Grundzahl** und n als **Exponent** oder **Hochzahl** bezeichnet.

Diese Rechenoperation heißt **Potenzieren**.

Gegeben ist die Zahl 3. Das Quadrat von 3 ist 9: $3^2 = 9$. Ist nun umgekehrt die Zahl 9 gegeben und es ist jene nichtnegative Zahl zu ermitteln, deren Quadrat 9 ist, so schreibt man: $\sqrt{9} = 3$ (gesprochen: Quadratwurzel aus 9 ist gleich 3).

Analog gilt: $2^3 = 8$, wobei 2 die dritte Wurzel (Kubikwurzel) aus 8 ist: $\sqrt[3]{8} = 2$ (gesprochen: Dritte Wurzel aus 8 ist gleich 2).

Definition:

Unter der **n-ten Wurzel** aus der nichtnegativen Zahl a $(n \in \mathbb{N}^*)$ versteht man jene nichtnegative Zahl b, deren n-te Potenz a ist.

Man schreibt: $\sqrt[n]{a} = b$

(gesprochen: n-te Wurzel aus a ist gleich b).

Bezeichnungen:

a heißt **Radikand**.
n heißt **Wurzelexponent**.
b heißt **Wurzel** (Wurzelwert).
Die Rechenoperation wird **Wurzelziehen** oder **Radizieren** genannt.

Sonderfall: $\sqrt[n]{0} = 0$ für $n \neq 0$.

Weitere Beispiele:

$\sqrt{16} = 4$, weil $4^2 = 16$ $\quad$ $\sqrt[3]{27} = 3$, weil $3^3 = 27$

$\sqrt[4]{256} = 4$, weil $4^4 = 256$ $\quad$ $\sqrt[5]{32} = 2$, weil $2^5 = 32$

Addition und Subtraktion werden als **„Rechenoperationen erster Stufe“** bezeichnet. Multiplikation und Division nennt man **„Rechenoperationen zweiter Stufe“**. Potenzieren und Wurzelziehen werden zu den **„Rechenoperationen dritter Stufe“** gezählt.

Übersichtlich dargestellt:

Potenzieren	Wurzelziehen	3. Rechenstufe
Multiplizieren	Dividieren	2. Rechenstufe
Addieren	Subtrahieren	1. Rechenstufe

Rechenstufensymbol:

$(\ )^n$	$\sqrt[n]{\ }$
×	÷
+	−

Höhere Rechenstufe geht vor niedrigerer!

Wollen wir dieses Grundgesetz bewusst umgehen, so müssen wir Klammern setzen!

Definition:

Die **Klammer** ist ein mathematisches Symbol, das eine Reihenfolge beim Rechnen angibt, und zwar, dass die in der Klammer stehende Rechnung vor den anderen ausgeführt werden soll.

Wenn in einer Rechnung Rechenoperationen verschiedener Stufen vorkommen, so ist die Reihenfolge, in der sie ausgeführt werden, von größter Bedeutung: So erhält man als Resultat für die Berechnung von $2 \cdot 5 + 3$ einerseits $10 + 3 = 13$, wenn man **zuerst multipliziert** und **dann addiert**, andererseits $2 \cdot 8 = 16$, wenn man **zuerst addiert** und **dann multipliziert**. Um Eindeutigkeit zu erzielen, verabreden wir: Die Rechenoperation höherer Stufe wird zuerst ausgeführt.

Wenn die Rechenoperationen in anderer Reihenfolge ausgeführt werden sollen, müssen wir Klammern verwenden.

Beispiel:

$3 \cdot (4 + 1) = 3 \cdot 5 = \mathbf{15}$ $\qquad$ $7 \cdot 2 + 3 = 14 + 3 = \mathbf{17}$

$3 \cdot 4 + 1 = 12 + 1 = \mathbf{13}$ $\qquad$ $7 \cdot (2 + 3) = 7 \cdot 5 = \mathbf{35}$

2. Rechnen mit natürlichen Zahlen

„Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk“, sagte der Berliner Mathematiker Leopold KRONECKER (1823–1891). Damit wollte er ausdrücken, dass die **natürlichen Zahlen** in unserer Begriffswelt unmittelbar vorhanden sind und angeblich keiner Begründung bedürfen.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

Für die Menge, die aus den natürlichen Zahlen mit Ausnahme der Zahl 0 besteht, schreiben wir $\mathbb{N}^*$:

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$

Wir verwenden die natürlichen Zahlen, um zu zählen oder um eine Reihenfolge festzulegen.[1] Wenn wir mit natürlichen Zahlen rechnen, geschieht dies mit einer Selbstverständlichkeit, die uns vergessen lässt, dass wir ja bestimmte **Rechengesetze** anwenden.

Einige dieser Gesetze sind uns schon von der Volksschule her vertraut, z. B.: $5 + 12 = 12 + 5 = 17$
$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12$

In diesem Kapitel wollen wir uns mit den Grundrechnungsarten und den für sie geltenden Rechengesetzen näher beschäftigen.

Die **Addition** ist die einfachste Rechenoperation mit natürlichen Zahlen. Für die Addition natürlicher Zahlen gelten u. a. folgende Gesetze:

(1) Die Reihenfolge der Summanden hat keinen Einfluss auf das Resultat; so ist z. B.: $3 + 4 = 4 + 3 = 7$.
Die Vertauschbarkeit der Summanden gilt für alle natürlichen Zahlen. Dieser Sachverhalt lässt sich kurz, unter Verwendung der Variablen a und b, ausdrücken:

$$a + b = b + a$$

(Kommutativgesetz[2] der Addition)

[1]) Z. B.: der Erste, der Zweite, der Dritte usw.

[2]) commutare (lat.): vertauschen.

(2) Wenn mehr als zwei Zahlen addiert werden sollen, können beliebige Teilsummen gebildet werden,

z. B.: $3 + 5 + 7 = (3 + 5) + 7 = 8 + 7 = 15$
$3 + 5 + 7 = 3 + (5 + 7) = 3 + 12 = 15$

Es gilt:

$(a + b) + c = a + (b + c)$
(Assoziativgesetz[1] der Addition)

(3) Die Kleinerrelation zwischen zwei natürlichen Zahlen bleibt erhalten, wenn zu beiden Zahlen die gleiche natürliche Zahl addiert wird,

z. B.: $3 < 5 \Rightarrow 3 + 6 < 5 + 6$

Es gilt:

$a < b \Rightarrow a + c < b + c$
(Monotoniegesetz der Addition)

(4) $a + 0 = 0 + a = a$ Insbesondere gilt: $0 + 0 = 0$
(In diesem Zusammenhang heißt 0 das **neutrale Element der Addition**.)

Die Addition ist in $\mathbb{N}$ stets ausführbar, d. h. die **Summe** zweier natürlicher Zahlen ist stets eine natürliche Zahl.

Die **Subtraktion** ist die Umkehrung der Addition. Sie ist in $\mathbb{N}$ — im Gegensatz zur Addition — nur ausführbar, wenn der Minuend nicht kleiner als der Subtrahend ist, z. B.: $10 - 4 = 6$, $10 - 10 = 0$, $4 - 10 = ?$

Welche der unter **(1)** bis **(4)** aufgezeigten Gesetze für die Addition besitzen auch für die Subtraktion Gültigkeit?

Die **Multiplikation** entsteht durch verkürzte Schreibweise der Addition von gleichen Summanden, z. B.: $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3 = 12$.

Für die Multiplikation natürlicher Zahlen gelten u. a. folgende Gesetze:

(1) Die Faktoren eines Produktes dürfen — ohne Einfluss auf das Resultat — vertauscht werden,

z. B.: $2 \cdot 3 = 3 + 3 = 6$, $3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 = 6 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$

Durch Variable ausgedrückt:

$a \cdot b = b \cdot a$
(Kommutativgesetz der Multiplikation[2])

(2) Wenn mehr als zwei Zahlen multipliziert werden sollen, können beliebige Teilprodukte gebildet werden,

z. B.: $2 \cdot 4 \cdot 5 = (2 \cdot 4) \cdot 5 = 8 \cdot 5 = 40$, $2 \cdot 4 \cdot 5 = 2 \cdot (4 \cdot 5) = 2 \cdot 20 = 40$

Es gilt:

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
(Assoziativgesetz der Multiplikation)



Leopold KRONECKER (1823–1891) war einer der einflussreichsten Mathematiker des 19. Jahrhunderts. Nach intensiven mathematischen Studien in Berlin verwaltete er (mit großem finanziellen Erfolg) das Erbe seines Onkels. Als wohlhabender Privatmann war er somit nicht gezwungen, einen Lehrstuhl in einer kleinen Stadt anzunehmen. In Berlin, dem deutschsprachigen Zentrum der Wissenschaft des 19. Jahrhunderts, beschäftigte er sich mit vielen Teilgebieten der Mathematik. KRONECKER war ein Anhänger der sogenannten „konstruktiven" Mathematik. Er hat seine Ansichten stets sehr fest vertreten. Dies führte zu Konflikten wie zum Beispiel mit CANTOR, den er als *„Verderber der Jugend"* bezeichnete.

1) associare (lat.): sich verbinden.
2) Das Kommutativgesetz der Multiplikation gilt keinesfalls für alle mathematischen Objekte, für die man sinnvoller Weise eine Multiplikation definieren kann.

(3) Die Kleinerrelation zwischen zwei natürlichen Zahlen bleibt erhalten, wenn beide Zahlen mit der gleichen natürlichen Zahl ungleich 0 multipliziert werden, z. B.: $2 < 3 \Rightarrow 2 \cdot 5 < 2 \cdot 5$

Es gilt:

> $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \quad (c \neq 0)$
> **(Monotoniegesetz der Multiplikation)**

(4) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ und $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
z. B.: $4 \cdot 0 = 0 \cdot 4 = 0$; $5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = 5$
(In diesem Zusammenhang heißt 1 das **neutrale Element der Multiplikation**.)

Die Multiplikation ist in ℕ stets ausführbar, d. h. das **Produkt** zweier natürlicher Zahlen ist stets eine natürliche Zahl.

Die **Division** ist die Umkehrung der Multiplikation. Sie ist in ℕ nicht immer ausführbar, z. B.: $6 : 2 = 3$, $6 : 7 = ?$

> Die Division durch 0 ist nicht definiert!

Die Division durch 0 ist grundsätzlich unmöglich. Ist $b \neq 0$ und wäre $\frac{b}{0} = c$, so müsste $0 \cdot c = b$ sein, also $0 \cdot c \neq 0$. Das ist aber nicht möglich. Die Division $\frac{b}{0}$ hat daher keinen Sinn.

Wir wollen nun untersuchen, welche Rechenoperationen ohne Einschränkung mit zwei natürlichen Zahlen so durchgeführt werden können, dass das Ergebnis wieder eine natürliche Zahl ist.

Man sagt dann in der Mathematik, die natürlichen Zahlen sind gegenüber dieser Rechenoperation **abgeschlossen.**

In unserem Rechenstufensymbol werden die entsprechenden Felder schraffiert:

$(\ )^n$ (schraffiert)	$\sqrt[n]{\ }$
$\times$ (schraffiert)	$\div$
$+$ (schraffiert)	$-$

Welche Zahlen müssen wir „hinzu nehmen“, um auch ohne Einschränkung **subtrahieren** zu können?

Anhand selbstgewählter Beispiele ist zu zeigen: Das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz sind für die Division in ℕ nicht gültig!

Einen Zusammenhang zwischen Rechenoperationen verschiedener Stufen drückt das Distributivgesetz aus,

z. B.: $3 \cdot (4 + 2) = 3 \cdot 6 = 18$, aber auch $3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 12 + 6 = 18$,
d. h. $3 \cdot (4 + 2) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2$.

Dieser Zusammenhang gilt für alle natürlichen Zahlen. Mit Variablen dargestellt:

> $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
> (Distributivgesetz[1])

Beispiel:

a) $2 \cdot 9^2 - 4 \cdot 5 + 7 = 2 \cdot 81 - 20 + 7 = 162 - 20 + 7 = \mathbf{149}$

b) $2 \cdot 9^2 - 4 \cdot (5 + 7) = 2 \cdot 81 - 4 \cdot (12) = 162 - 48 = \mathbf{114}$

c) $2 \cdot (9^2 - 4 \cdot 5 + 7) = 2 \cdot (81 - 20 + 7) = 2 \cdot (68) = \mathbf{136}$

d) $2 \cdot (9^2 - 4) \cdot 5 + 7 = 2 \cdot 5 \cdot (81 - 4) + 7 = 10 \cdot (77) + 7 = 770 + 7 = \mathbf{777}$

e) $(2 \cdot 9^2 - 4) \cdot 5 + 7 = (2 \cdot 81 - 4) \cdot 5 + 7 = (162 - 4) \cdot 5 + 7 =$
$= (158) \cdot 5 + 7 = 790 + 7 = \mathbf{797}$

---

[1]) distribuere (lat.): verteilen, auseinanderlegen.

3. Rechnen mit ganzen Zahlen

Wir benötigen die positiven und die negativen Zahlen, um **„gerichtete Unterschiede"** angeben zu können.

Im täglichen Leben gibt es dafür viele Beispiele:

Temperaturmessung:

Wenn am Tag das Thermometer 4° C anzeigt und die Temperatur in der Nacht um 6° C fällt, so hat man 2° C „Kälte". Man bezeichnet auch oft die „Wärmegrade" mit einem positiven, die „Kältegrade" mit einem negativen Vorzeichen. Dann hat man $+4°C - 6°C = -2°C$

Durch Vereinigung der Menge der positiven ganzen Zahlen, der Null und der negativen ganzen Zahlen erhält man die **Menge der ganzen Zahlen**, die mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet wird:

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Wirtschaft:

Gewinne und Guthaben werden mit positiven Zahlen, Verluste und Schulden mit negativen Zahlen angegeben.

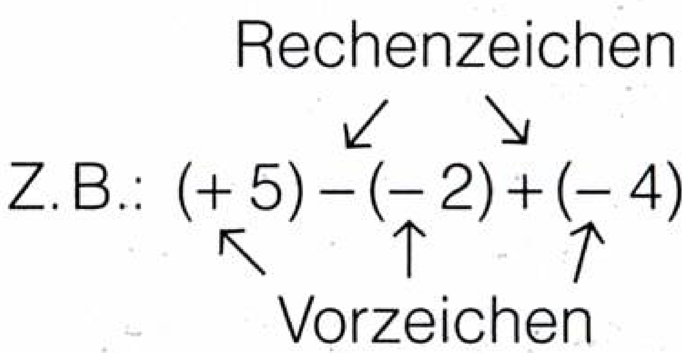
Höhenangaben:

Geländepunkte, die über dem Meeresspiegel liegen, werden durch positive Höhenangaben, Geländepunkte die unter dem Meeresspiegel liegen, durch negative Höhenangaben gekennzeichnet.

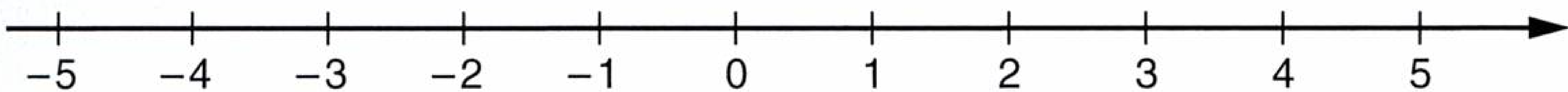
Die Einführung der ganzen Zahlen ist notwendig, um einen Zahlbereich zu gewinnen, in dem außer der Addition und der Multiplikation auch die Subtraktion stets ausführbar ist. So hat z. B. die Subtraktion $4 - 10 = ?$ in $\mathbb{N}$ keine Lösung, während wir in $\mathbb{Z}$ diese Aufgabe lösen können.

Die ganzen Zahlen bilden einen Zahlbereich, in dem jede Subtraktionsaufgabe eine Lösung hat.

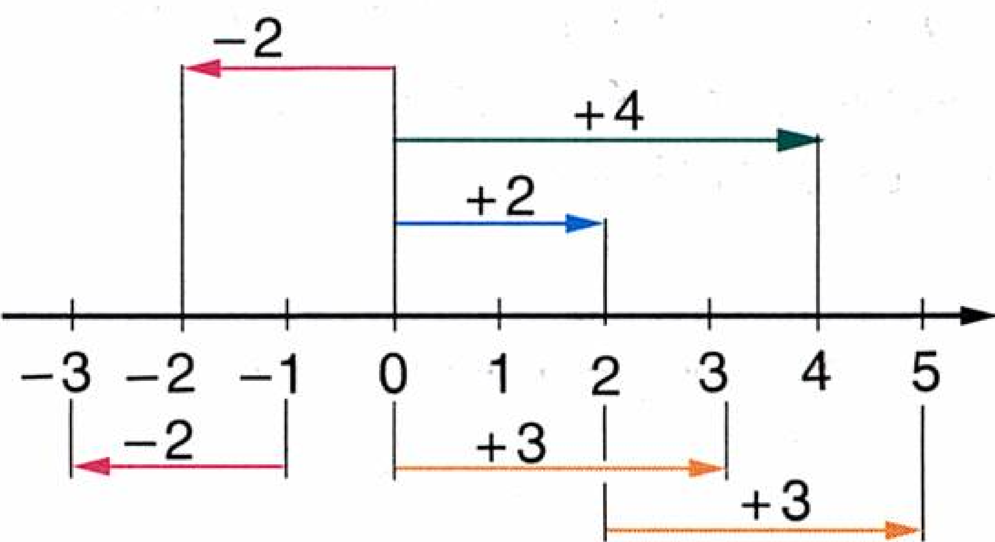
Bei Ausführung von Rechenoperationen erster Stufe mit ganzen Zahlen ist es notwendig, **Vorzeichen** und **Rechenzeichen**[1] zu unterscheiden. Es ist üblich — um der Unterscheidung gerecht zu werden — die ganzen Zahlen in Klammern einzuschließen. (Vgl. Außenspalte!)



Ganze Zahlen können durch regelmäßig angeordnete Punkte auf der **Zahlengeraden** veranschaulicht werden. Man schreitet von links nach rechts zu immer größeren Zahlen fort:



Ganze Zahlen können aber auch durch Pfeile dargestellt werden, wie die nebenstehende Figur zeigt.



Zu den Zahlen (−2) und (+2) gehören zwei Pfeile, die die gleiche Länge haben (nämlich 2), aber entgegengesetzte Orientierung. Die Länge des Pfeiles bezeichnet man als den **Betrag der Zahl** und schreibt $|a|$.

(−2) und (+2) haben also den gleichen Betrag.

Man schreibt: $|-2| = |+2| = \mathbf{2}$

Allgemein gilt für $a \geqslant 0$[2]: $|a| = a$, also z. B. $|4| = \mathbf{4}$

bzw. für $a < 0$: $|a| = -a$, also z. B. $|-4| = -(-4) = \mathbf{4}$

Z. B.: $|+5| = \mathbf{5}$; $|-23| = \mathbf{23}$, $|0| = \mathbf{0}$, $|-1124| = \mathbf{1124}$ usw.

Definition:

Die „Größe" einer Zahl unabhängig von ihrem Vorzeichen heißt **Betrag** oder **Absolutwert** der Zahl.

Genauer:

$|a| = a$, wenn $a \geqslant 0$

$|a| = -a$, wenn $a < 0$

$\Leftrightarrow |a|$ ist stets größer oder gleich 0.

Zahlen mit gleichem Betrag, aber verschiedenen Vorzeichen bezeichnet man als **entgegengesetzte Zahlen**.

+2 und −2, −99 und +99, ... sind Beispiele für entgegengesetzte Zahlen.

---

1) Das Vorzeichen wirkt nur auf die eine Zahl danach. Das Rechenzeichen hingegen verknüpft zwei Zahlen. Auf Taschenrechnern belegt das Minus als Vorzeichen und als Rechenzeichen verschiedene Tasten.

2) Das Zeichen „⩾" bedeutet „größer oder gleich". Für „kleiner oder gleich" schreibt man „⩽".

Wir wollen nun anhand von Beispielen die schon in der Hauptschule bzw. AHS-Unterstufe erklärten Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen wiederholen.

Vorzeichenregeln:

$+(+a) = +a$
$+(-a) = -a$
$-(+a) = -a$
$-(-a) = +a$

Beispiel:

a) $(-2)+(+4) = -2+4 = 2$ **b)** $(-5)+(-3) = -5-3 = -8$

c) $(+4)-(+3) = 4-3 = 1$ **d)** $(+17)-(-8) = 17+8 = 25$

e) $(-3)-(-5) = -3+5 = 2$ **f)** $(-4)-(+1) = -4-1 = -5$

$(+a)\cdot(+b) = +(a\cdot b)$
$(+a)\cdot(-b) = -(a\cdot b)$
$(-a)\cdot(+b) = -(a\cdot b)$
$(-a)\cdot(-b) = +(a\cdot b)$

Beispiel:

a) $(+8)(+2) = 16$ **b)** $(+8)(-4) = -32$

c) $(-9)(+3) = -27$ **d)** $(-10)(-2) = 20$

e) $(-3)(+5)(-1) = (-15)(-1) = 15$

f) $(-3)(-4)(-1) = (+12)(-1) = -12$

Wenn bei einer Multiplikation die Anzahl der negativen Faktoren ungerade ist, dann ist das Produkt negativ, sonst ist es positiv!

Für $b \neq 0$ gilt:

$(+a):(+b) = +(a:b)$
$(+a):(-b) = -(a:b)$
$(-a):(+b) = -(a:b)$
$(-a):(-b) = +(a:b)$

Beispiel:

a) $(+8):(+2) = 4$ **b)** $(+8):(-4) = -2$

c) $(-9):(+3) = -3$ **d)** $(-10):(-2) = 5$

e) $0:(-7) = 0$ **f)** $(-3):(+1) = -3$

Bemerkung: Für alle $a \neq 0$ gilt: $0 : a = 0$, $a : 1 = a$

Eine Potenz mit negativer Basis hat einen positiven Wert bei geradem Exponenten und einen negativen Wert bei ungeradem Exponenten.

Beispiel:

a) $(+2)^4 = 16$ **b)** $(+3)^3 = 27$

c) $(-2)^4 = 16$ **d)** $(-3)^3 = -27$

e) $(-1)^{99} = -1$ **f)** $(-1)^{100} = 1$

4. Teilbarkeit, Primfaktorenzerlegung, kgV, ggT

Definition:

Eine natürliche Zahl a ($a \neq 0$) wird **Teiler** einer natürlichen Zahl b genannt, wenn es eine natürliche Zahl q gibt, sodass $a \cdot q = b$ gilt.

b nennen wir ein **Vielfaches** von a.

Beispiel:

Es sind alle „Teiler“ der Zahl 24 zu bestimmen.

Lösung:

Die Zahl 24 kann durch jede der folgenden Zahlen **ohne Rest** dividiert werden: **1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.**

1 und 24 sind die trivialen Teiler von 24. Die echten Teiler sind **2, 3, 4, 6, 8, 12.**

Gleichzeitig ist 24 ein Vielfaches von **1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.**

Zunächst einige Teilbarkeitsregeln:
Eine natürliche Zahl ist genau dann
- durch 2 bzw. 5 teilbar, wenn ihre Einerstelle durch 2 bzw. 5 teilbar ist,
- durch 4 bzw. 25 teilbar, wenn die aus ihren zwei letzten Ziffern gebildete Zahl durch 4 bzw. 25 teilbar ist,
- durch 8 bzw. 125 teilbar, wenn die aus ihren drei letzten Ziffern gebildete Zahl durch 8 bzw. 125 teilbar ist,
- durch 3 bzw. 9 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 bzw. 9 teilbar ist.

Es ist auch Aufgabe der Mathematik, Ordnung in die vielfach falsch verwendeten Begriffe „Zahl“ und „Ziffer“ zu bringen.

Zahlen sind z. B. die Elemente von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

Ziffern sind die Bausteine, aus denen Zahlen zusammengesetzt sind.

Richtig:

Diese Tabelle ist unleserlich, da die Ziffern zu klein sind. In dieser Zahl kommt die Ziffer 1 nicht vor.

Falsch:

Bei der Budgetdebatte ist von Ziffern die Rede, die sich niemand vorstellen kann.

Beispiel:

Sind die Zahlen **a)** 2 **b)** 3 **c)** 5 **d)** 25 Teiler der Zahl 4512?

Lösung:

a) 4512 ist durch 2 teilbar, weil ihre Einerziffer 2 durch 2 teilbar ist.

b) 4512 ist durch 3 teilbar, weil ihre Ziffernsumme 12 durch 3 teilbar ist: $4 + 5 + 1 + 2 = 12$.

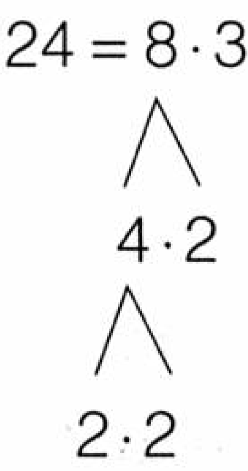
c) 4512 ist nicht durch 5 teilbar, weil ihre Einerziffer 2 nicht durch 5 teilbar ist.

d) 4512 ist nicht durch 25 teilbar, weil das zweistellige Ende 12 nicht durch 25 teilbar ist.
(Wenn eine Zahl nicht durch 5 teilbar ist, ist sie selbstverständlich auch nicht durch ein Vielfaches von 5 — also etwa 25 — teilbar!)

Die Zahl 24 lässt sich wie in der Außenspalte dargestellt zerlegen. Somit kann man die Zahl 24 als Produkt von Primzahlen darstellen: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

Auch andere natürliche Zahlen kann man — wie man sagt — in **„Primfaktoren zerlegen“**. Es gilt sogar der nebenstehende Satz, dass für **alle** natürlichen Zahlen größer 1 die Primfaktorenzerlegung möglich ist.

Wie man die Primfaktorenzerlegung ausführen kann, zeigt das nächste Beispiel.



Hauptsatz der Teilbarkeit[1]: Jede natürliche Zahl n, die größer als 1 ist, lässt sich — abgesehen von der Reihenfolge der Faktoren — eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen.

Beispiel:

Für die Zahl 624 ist die Primfaktorenzerlegung zu bestimmen.

Lösung:

Man schreibt zunächst:

624 | und bestimmt sodann mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln eine der Primzahlen, die in 624 enthalten ist.

624 ist sicher durch 2 teilbar. Es wird dividiert und der Quotient unter 624 geschrieben:

624	2	
312	2	312 ist wieder durch 2 teilbar,
156	2	desgleichen 156
78	2	und 78.
39	3	39 ist durch 3 teilbar.
13	13	13 ist eine Primzahl.
1		

Die Primfaktorenzerlegung von 624 lautet:
$624 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 = \mathbf{2^4 \cdot 3 \cdot 13}$

[1]) Auf den Beweis wird verzichtet.

Soll eine Zahl $n \in \mathbb{N}^*$ in Primfaktoren zerlegt werden genügt es, bei allen Primzahlen $p \leq \sqrt{n}$ zu probieren, ob sie Teiler von n sind.

Beispiel:
Für die nachstehenden Zahlen sind die Primfaktorenzerlegungen zu bestimmen: **a)** 6930 **b)** 54684

Lösung:

a)

6930	2
3465	5
693	3
231	3
77	7
11	11
1	

$6930 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 =$
$= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

b)

54684	2
27342	2
13671	3
4557	3
1519	7
217	7
31	31
1	

$54684 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 31 =$
$= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 31$

Ist es möglich, dass zwei verschiedene natürliche Zahlen gemeinsame Vielfache[1] haben? Überlegen wir uns diese Frage anhand der Zahlen 4 und 6.

Vielfache von 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 36, ...

Vielfache von 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, ...

Die Zahlen 12, 24, 36, ... sind gemeinsame Vielfache der Zahlen 4 und 6.

12 ist das **kleinste gemeinsame Vielfache** der beiden Zahlen!

Umgekehrt ist es auch möglich, dass zwei verschiedene natürliche Zahlen gemeinsame Teiler haben. Wir zeigen dies anhand der Zahlen 24 und 30.

Teiler von 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Teiler von 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

Die Zahlen 2, 3, 6 sind gemeinsame Teiler von 24 und 30.

6 ist der **größte gemeinsame Teiler** der beiden Zahlen!

Definition:
Das **kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)** mehrerer natürlicher Zahlen ist jene kleinste Zahl, die alle gegebenen Zahlen als Teiler enthält.

Der **größte gemeinsame Teiler (ggT)** mehrerer natürlicher Zahlen ist jene größte Zahl, die Teiler aller gegebenen Zahlen ist.

Ist von zwei Zahlen a und b der größte gemeinsame Teiler $ggT(a, b) = 1$, heißen a und b **relativ prim**.

Beispiel:
Man ermittle **a)** das kleinste gemeinsame Vielfache **b)** den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 28, 34 und 238.
Kurzschreibweise: **a)** kgV(28, 34, 238) = ? **b)** ggT(28, 34, 238) = ?

Lösung:
Primfaktorenzerlegung:

28	2
14	2
7	7
1	

34	2
17	17
1	

238	2
119	7
17	17
1	

$28 = 2^2 \cdot 7$
$34 = 2 \cdot 17$
$238 = 2 \cdot 7 \cdot 17$

a) $kgV(28, 34, 238) = 2^2 \cdot 7 \cdot 17 = \mathbf{476}$ **b)** $ggT(28, 34, 238) = \mathbf{2}$

Das kgV erhält man als das Produkt der höchsten auftretenden Potenz aller vorkommenden Primfaktoren.

Den ggT erhält man als das Produkt der niedrigsten Potenz der in jeder Zahl vorkommenden Primfaktoren.

[1]) Da die Zahl 0 durch jede natürliche Zahl $a \neq 0$ teilbar ist, ist die Zahl 0 auch ein Vielfaches von jeder natürlichen Zahl $a \neq 0$, wird aber bei der Bestimmung von gemeinsamen Vielfachen nicht berücksichtigt.

5. Rechnen mit rationalen Zahlen

Bruchzahlen werden eingeführt, um auch Teile von „ganzen Einheiten" in Zahlen erfassen zu können, z. B. „ein halbes kg Äpfel", „zwei Drittel der Klasse sind Mädchen", ...

Beispiele für Bruchzahlen bzw. Brüche: $\frac{7}{8}$, $-\frac{5}{122}$, $\frac{145}{2}$, ...

Brüche lassen sich auf verschiedene Weise darstellen. Zwei wichtige Deutungen sollen am Beispiel $\frac{2}{3}$ gegeben werden:

1 Einheit | 1 Einheit 1 Einheit

Zwei Drittel der Einheit:

$2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Ein Drittel von **zwei Einheiten:**

$(2 \cdot 1) : 3 = 2 : 3$

So gesehen kann man also sagen: Der Bruchstrich ist eine andere Schreibweise für das Divisionszeichen bzw. ein Bruch ist eine nicht ausgeführte Division. Führt man die Division aus, erhält man eine **Dezimalzahl:** den **Wert** des Bruches.

$$\frac{3}{4} = 0{,}75 \quad \frac{5}{18} = 0{,}2\dot{7}^{1)} \quad \frac{-94}{11} = -8{,}\dot{5}\dot{4}^{2)}$$

Wert des Bruches

Die so entstehenden Zahlen heißen **rationale Zahlen**.

In der Menge der rationalen Zahlen kann man unbeschränkt addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren (wenn der Divisor ungleich Null ist).

Wie man mit Brüchen rechnet, bestimmen die Regeln der Bruchrechnung. Diese wurden im Mathematikunterricht vergangener Jahre ausführlich behandelt. Wir beschränken uns auf eine kurze Wiederholung von Begriffen und Regeln[3].

— Ein Bruch, dessen Betrag kleiner als 1 ist, heißt **echter Bruch**, z.B.: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$, ...

— Ein echter Bruch, dessen Zähler 1 ist, heißt **Stammbruch**, z.B.: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{20}$, ...

— Ein Bruch, dessen Betrag größer als 1 ist, heißt **unechter Bruch**, z.B.: $\frac{5}{2}$, $\frac{17}{9}$, $\frac{128}{127}$, ...

— Ein Bruch, dessen Nenner eine Zehnerpotenz ist, heißt **Dezimalbruch**, z.B.: $-\frac{3}{10} = -0{,}3$, $\frac{5}{100} = 0{,}05$, $\frac{1701}{1000} = 1{,}701$, ...

— Ist der Zähler eines Bruches gleich dem Nenner eines anderen und umgekehrt, so heißen die Brüche **zueinander reziprok**, z.B.: $\frac{3}{7}$ und $\frac{7}{3}$, $\frac{15}{19}$ und $\frac{19}{15}$, ...

— Brüche mit gleichen Nennern heißen **gleichnamig**, z.B.: $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{9}{5}$, ...

— Brüche mit ungleichen Nennern heißen **ungleichnamig**, z.B.: $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{19}{3}$, ...

Jeder **Bruch** hat die Form $\frac{a}{b}$ für $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ (Die Division durch 0 hat ja keinen Sinn!):



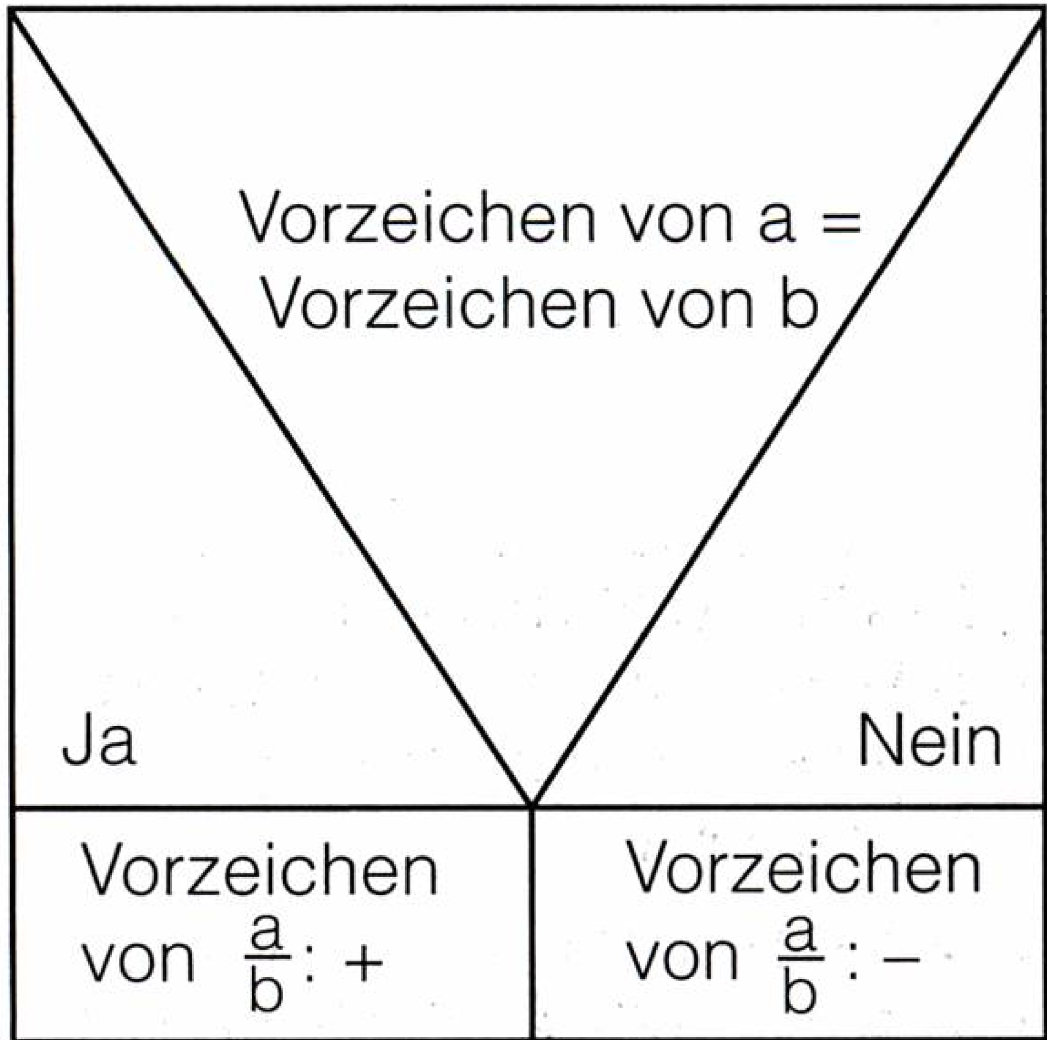
Die **Bruchzahlen** (also diejenigen Zahlen, welche sich als Quotient ganzer Zahlen ergeben) heißen auch **rationale Zahlen**.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

Die Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen enthält die Menge $\mathbb{Z}$ als echte Teilmenge: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Auch ganze Zahlen lassen sich als Bruchzahlen schreiben, z.B. $4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3}$, $5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3}$ usw. Die Menge aller Bruchzahlen bildet somit eine Erweiterung der ganzen Zahlen.

Das nachstehende „Struktogramm", in dem a und b stellvertretend für ganze Zahlen stehen, gibt Auskunft über die Vorzeichenregeln bei Brüchen:



---

1) $0{,}2\dot{7} = 0{,}277777...$

2) $-8{,}\dot{5}\dot{4} = -8{,}54545454...$

3) Bei den meisten Beispielen werden positive Brüche verwendet, trotzdem gilt alles sinngemäß auch für negative Brüche!

Was ist eine „gemischte Zahl"?

Da man jeden unechten Bruch in eine ganze Zahl und einen echten Bruch aufspalten kann, lässt sich jeder unechte Bruch als **gemischte Zahl** anschreiben, z. B.: $\frac{4}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}$

Zwischen der ganzen Zahl und dem echten Bruch hat man sich ein Additionszeichen zu denken! Umgekehrt kann natürlich jede gemischte Zahl als unechter Bruch geschrieben werden, z. B.: $2\frac{7}{5} = \frac{10}{5} + \frac{7}{5} = \frac{17}{5}$

Neben den in der Hauptspalte angeführten Formänderungen von Zahlen, die den Zahlenwert unverändert lassen, gibt es noch weitere:

Erweitern und Kürzen

Erweitern heißt: Zähler und Nenner eines Bruches mit der gleichen Zahl $a \neq 0$ $(a \in \mathbb{Z})$ multiplizieren.

Kürzen heißt: Zähler und Nenner eines Bruches durch die gleiche Zahl $a \neq 0$ $(a \in \mathbb{Z})$ dividieren[1].

Beispiel:

a) $\frac{5}{4}$ ist mit 6 zu erweitern. **b)** $\frac{12}{18}$ ist so weit wie möglich zu kürzen.

Lösung:

a) $\frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{30}{24}$ **b)** $\frac{12}{18} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$ Der Bruch wurde „durch 6 gekürzt".

Man beachte: Wenn man erweitert oder kürzt, ändert sich der Wert des Bruches nicht.

Wann ist es sinnvoll, einen Bruch zu kürzen? Die Antwort lautet: Meistens, wenn es möglich ist. Denn durch das Kürzen rechnet man mit kleineren Zahlen und erspart sich viel Rechenarbeit. „Erst kürzen, dann rechnen" ist ein Rat, den man wirklich befolgen sollte.

Und was nützt es einen Bruch zu erweitern? Nun: Wenn Brüche mit verschiedenen Nennern, sogenannte **ungleichnamige Brüche**, auf einen gemeinsamen Nenner — den Hauptnenner — gebracht werden sollen, muss man die Brüche entsprechend erweitern.

Beispiel:

Die Brüche $\frac{3}{28}, \frac{5}{34}, \frac{9}{238}$ sind auf gemeinsamen Nenner zu bringen! Anders formuliert: Die gegebenen Brüche sind **gleichnamig** zu machen.

Lösung:

Jedes gemeinsame Vielfache der Nenner 28, 34 und 238 kann als gemeinsamer Nenner gewählt werden. Um die Zahlen aber möglichst klein zu halten, **wählt man als Hauptnenner HN das kleinste gemeinsame Vielfache** aller Einzelnenner. Es wird also zunächst das kgV(28, 34, 238) bestimmt:

$\text{kgV}(28, 34, 238) = \ldots\ldots = 2^2 \cdot 7 \cdot 17 = 476$ (vgl. Seite 30)

Nun wird jeder Bruch mit genau den Faktoren erweitert, die seinem Nenner zum Hauptnenner „fehlen".

$\frac{3}{28} = \frac{3 \cdot 17}{17 \cdot 2^2 \cdot 7} = \frac{51}{476}$ (Erweiterungsfaktor: 17)

$\frac{5}{34} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 17} = \frac{70}{476}$ (Erweiterungsfaktor: $2 \cdot 7 = 14$)

$\frac{9}{238} = \frac{9 \cdot 2}{17 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{18}{476}$ (Erweiterungsfaktor: 2)

Addition und Subtraktion von Brüchen

Gleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die Zähler addiert bzw. subtrahiert, der Nenner bleibt unverändert.

Ungleichnamige Brüche werden vor dem Addieren bzw. Subtrahieren gleichnamig gemacht, indem man sie auf den Hauptnenner (= das kleinste gemeinsame Vielfache) erweitert.

Beispiel:

a) $\frac{4}{5} + \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4+3-2}{5} = \frac{5}{5} = 1$

b) $\frac{11}{10} - \frac{3}{10} - \frac{17}{10} + \frac{4}{10} = \frac{11-3-17+4}{10} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$

Beispiel:

a) $\frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$ **b)** $\frac{3}{16} - \frac{1}{7} = \frac{21}{112} - \frac{16}{112} = \frac{5}{112}$

[1] Genau genommen müssen Zähler und Nenner einen **gemeinsamen** Teiler haben, damit man durch diesen kürzen kann.

Beispiel:

a) $\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3\cdot 4}{7\cdot 5}=\frac{12}{35}$ **b)** $\frac{8}{15}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{11}=\frac{8\cdot \overset{1}{\cancel{5}}\cdot 2}{\underset{3}{\cancel{15}}\cdot 3\cdot 11}=\frac{16}{99}$

Hinweis: Vor der Ausführung der Multiplikation wird — wenn es möglich ist — gekürzt!

Beispiel:

a) $\frac{3}{7}:\frac{4}{5}=\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{4}=\frac{15}{28}$ **b)** $\left(\frac{8}{15}:\frac{5}{3}\right):\frac{2}{11}=\frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{5}{\cancel{15}}}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{5}\cdot\frac{11}{\underset{1}{\cancel{2}}}=\frac{44}{25}$

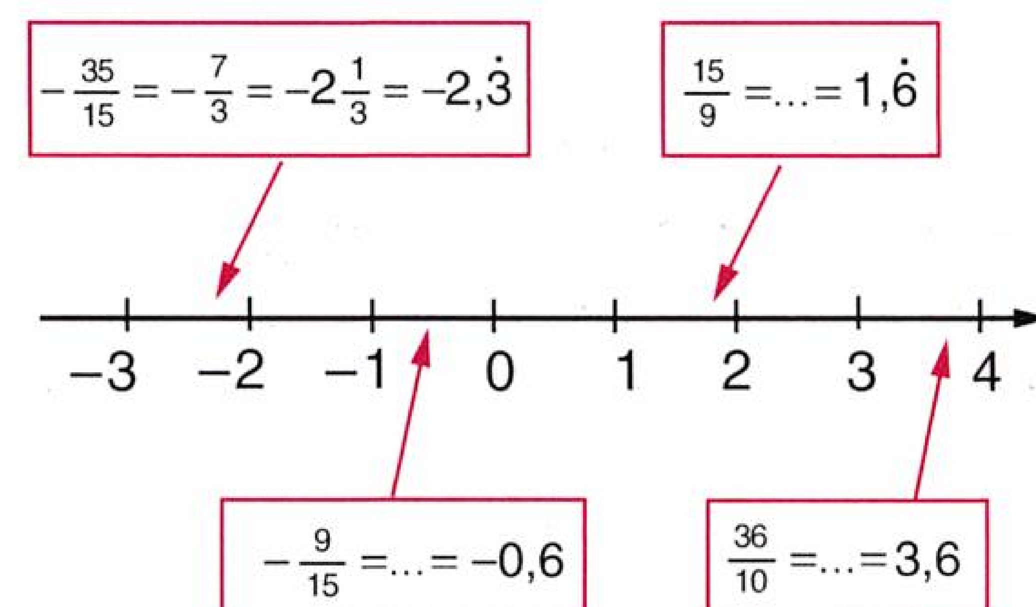
Multiplikation und Division von Brüchen

Brüche werden multipliziert, indem man das Produkt der Zähler in den Zähler und das Produkt der Nenner in den Nenner setzt.
Man dividiert durch einen Bruch, indem man den Dividenden mit dem reziproken Bruch des Divisors multipliziert.

Da wir die Division in $\mathbb{Q}$ auf die Multiplikation zurückgeführt haben, gilt: In der Menge der rationalen Zahlen ist jede Division — mit Ausnahme der durch 0 — durchführbar.

Bruchzahlen lassen sich — wie die ganzen Zahlen — auch als Punkte oder Pfeile auf der Zahlengeraden darstellen.

Es gilt: Je **kleiner** (größer) die Zahl ist, desto weiter **links** (rechts) liegt sie auf der Zahlengeraden.



Wir wissen, dass sich jede Bruchzahl als Dezimalzahl schreiben lässt:
$\frac{5}{4}=5:4=1,25$; $\frac{1}{3}=1:3=0,333\ldots=0,\dot{3}$ usw.
Außer den endlichen Dezimalzahlen können also dabei auch unendliche periodische Dezimalzahlen auftreten.

Umgekehrt kann man jede endliche und jede periodische Dezimalzahl als Bruch schreiben:

$1,37=1+\frac{3}{10}+\frac{7}{100}=\frac{137}{100}$

$x=0,\dot{3}\dot{2}=\frac{32}{99}$

Erklärung:

$$\begin{aligned} 100x &= 32,\dot{3}\dot{2} = 32,3232\ldots \\ x &= 0,\dot{3}\dot{2} = 0,3232\ldots \\ \hline 99x &= 32 \\ x &= \frac{32}{99} \end{aligned}$$

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist also die Vereinigung der Menge der endlichen und der periodischen Dezimalzahlen.

In unserem Rechenstufensymbol schraffieren wir jene Rechenoperationen, die ohne Einschränkung mit rationalen Zahlen durchgeführt werden können, sodass das Ergebnis wieder eine rationale Zahl ist:

$(\,)^n$	$\sqrt[n]{}$
$\times$	$\div$
$+$	$-$

Gibt es jetzt überhaupt noch Zahlen, die wir bisher nicht berücksichtigt haben? Auf unserer Zahlengeraden bleibt doch — zumindest optisch — kein „Loch" mehr frei!

Das händische Quadratwurzelziehen wurde bis vor ca. 20 Jahren gelehrt. Ein einziges Mal wollen wir uns dieses Verfahren vor Augen führen:

$\sqrt{2}=1,414$
 1|00 24·4
 4|00 281·1
 119|00 2824·4

Wir erkennen: Der Divisor wird immer größer. Wir können deshalb, wenn die Wurzel „nicht aufgeht" niemals auf eine Periode kommen, wie es bei nicht aufgehenden Brüchen immer der Fall war. $\sqrt{2}=1,414\ldots$ lässt sich **nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellen.**[1)]

Es gibt also **Dezimalzahlen,** die **nicht rational** sind. Man nennt sie **irrationale Zahlen**, z. B. 0,20220222022220...

Diese Zahl kann nicht rational sein, da sich beim Dividieren einer ganzen Zahl durch eine andere ganze Zahl ($\neq 0$) stets entweder eine **endliche** oder eine **periodische** Dezimalzahl ergibt!

1) Diese anschauliche Überlegung ist natürlich kein Beweis.

6. Rechnen mit reellen Zahlen

Die Vereinigung der Mengen aller **rationalen und irrationalen** Zahlen (also aller denkbaren Dezimalzahlen) bildet die Menge ℝ der **reellen Zahlen**.

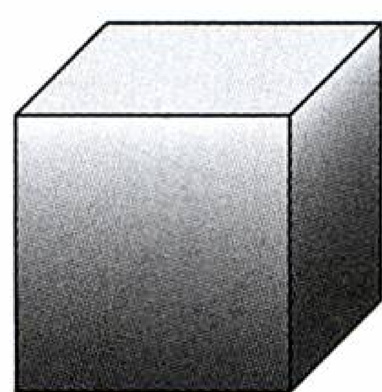
Man kann zeigen, dass für die Grundrechnungsarten mit reellen Zahlen die gleichen Rechengesetze gelten wie für die rationalen Zahlen.

Neben den endlichen und den periodischen Dezimalzahlen gibt es auch unendliche, nicht periodische Dezimalzahlen. Diese Zahlen bezeichnet man als **irrationale Zahlen**.

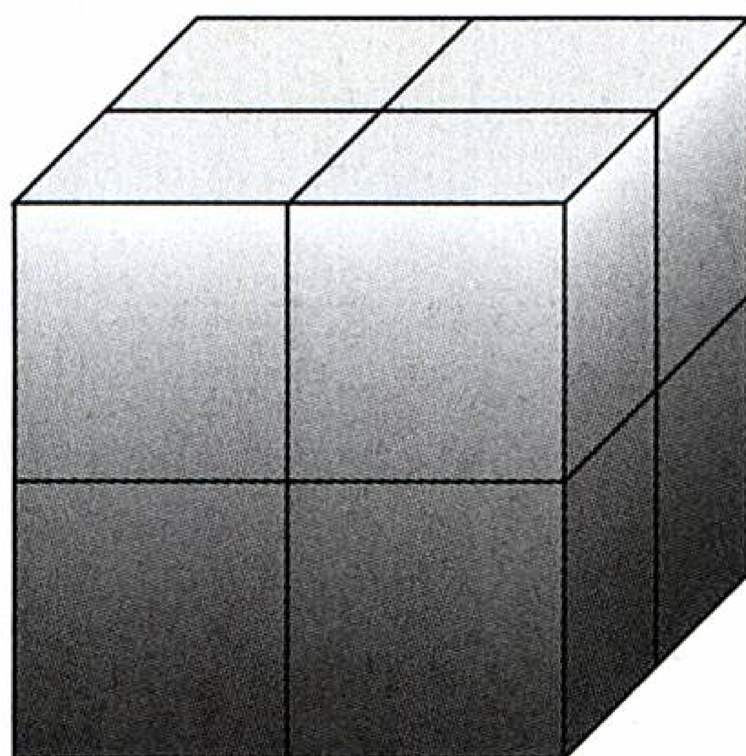
Irrationale Zahlen treten in der Praxis unter anderem beim Wurzelziehen auf, z. B. $\sqrt[3]{2}$.

Die Bestimmung des Wurzelwertes der so einfach aussehenden $\sqrt[3]{2}$ stellt uns zunächst vor Schwierigkeiten.

Das Delische Problem



$1^3 = 1$



$2^3 = 8$

Eine Problemstellung der alten Griechen, die auf irrationale Zahlen führt, beschreibt Paul KARLSON in seinem Buch „Zauber der Zahlen" wie folgt:

„Im Tempel des Apollo auf der griechischen Insel Delos stand ein Altar von der Gestalt eines regelmäßigen Körpers, eines Würfels. Als die Pest auszubrechen drohte, so erzählte man sich, befragten die Delier das Orakel. Und die Gottheit sprach: Setzt mir einen doppelt so großen, ebenfalls würfelförmigen Altar, so wird das Unheil abgewehrt werden können.

Eine leichte Aufgabe, so scheint es. Führen wir sie auf ihren mathematischen Gehalt zurück. Gegeben ist ein Würfel von, sagen wir, 1 Meter Kantenlänge, also 1 Kubikmeter Rauminhalt. Es soll ein doppelt so großer Würfel gemacht werden, d. h. einer mit 2 Kubikmeter Inhalt. ...

In unserer modernen Zeichenschrift fällt es uns ganz leicht, die Aufgabe zu formulieren. Haben wir einen Würfel von der Kantenlänge r, so beträgt sein Rauminhalt bekanntlich r^3 Kubikmeter; ein Würfel von 1 m Seitenlänge hat 1 m^3 Inhalt, einer von 2 m Seitenlänge bereits $2^3 = 8\,m^3$. Die Figur erklärt das besser als viele Worte. Nun suchen wir die Kantenlänge eines Würfels, der 2 m^3 Rauminhalt haben soll.

Sei seine Kantenlänge x, so muß die Gleichung bestehen $x^3 = 2$. Das ist eine Potenzaufgabe. Wir sehen ohne weiteres, daß x zwar größer als 1, aber kleiner als 2 sein muß. Suchen wir es weiterhin einzuengen. Wie steht es mit 1,5?

Nun, $1{,}5^3 = 3{,}375$, also noch wesentlich zu groß. Wählen wir die Werte 1,2 und 1,3, so ergeben sich die Volumina 1,728 und 2,197; zwischen diesen Werten muß also die gesuchte Zahl x liegen. So kann man fortfahren. Durch Probieren läßt sich die Genauigkeit immer weiter verbessern — wir finden Dezimalbrüche, deren 3. Potenz sich immer mehr der 2 annähert. Zu einem Ende aber kommen wir nicht.

... Das Delische Problem reduziert sich also auf die Aufgabe, die Kubikwurzel aus 2 zu finden, die Zahl $x = \sqrt[3]{2}$, und zwar soll es eine solche „Zahl zwischen den rationalen Zahlen", eine irrationale Zahl geben. Nun, das scheint eine etwas kühne Behauptung. Wir haben eben gesehen, daß wir mit unserer Annäherungsrechnung zwar immer weiter kommen, aber zweifellos bis jetzt das Ziel nicht ganz erreichen; und die Griechen hatten das Problem sogar für unlösbar erklärt. Die gesuchte neue Würfelkante ließ sich mit Zirkel und Lineal nicht konstruieren.

So schlossen die griechischen Mathematiker, daß es keine Zahl gebe, deren dritte Potenz gleich 2 sei, daß also die Kubikwurzel aus 2 nicht existiere; Näherungslösungen kannten sie natürlich auch.

Wie liegt dieser schwierige Fall? Man kann tatsächlich nachweisen, daß es keine rationale Zahl, d. h. keinen noch so komplizierten, aber mit einer endlichen Anzahl von Ziffern geschriebenen Bruch gibt, welcher genau gleich der 3. Wurzel aus 2 ist.

Andererseits führt die Näherungslösung immer weiter, und wenn wir Geduld und Zeit genug opfern, so nähern wir uns dem Wurzelwert offenbar immer weiter an. Und so sagen wir denn kühn: Die Wurzel existiert. Sie ist durch einen unendlichen Dezimalbruch gegeben, dessen erste Glieder lauten 1,2599..."

$\mathbb{R}^+$ ..... Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}^-$ ..... Menge der negativen reellen Zahlen

$\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$\mathbb{R}_0^- = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$

Die Menge der reellen Zahlen und die Punkte der Zahlengeraden entsprechen einander.

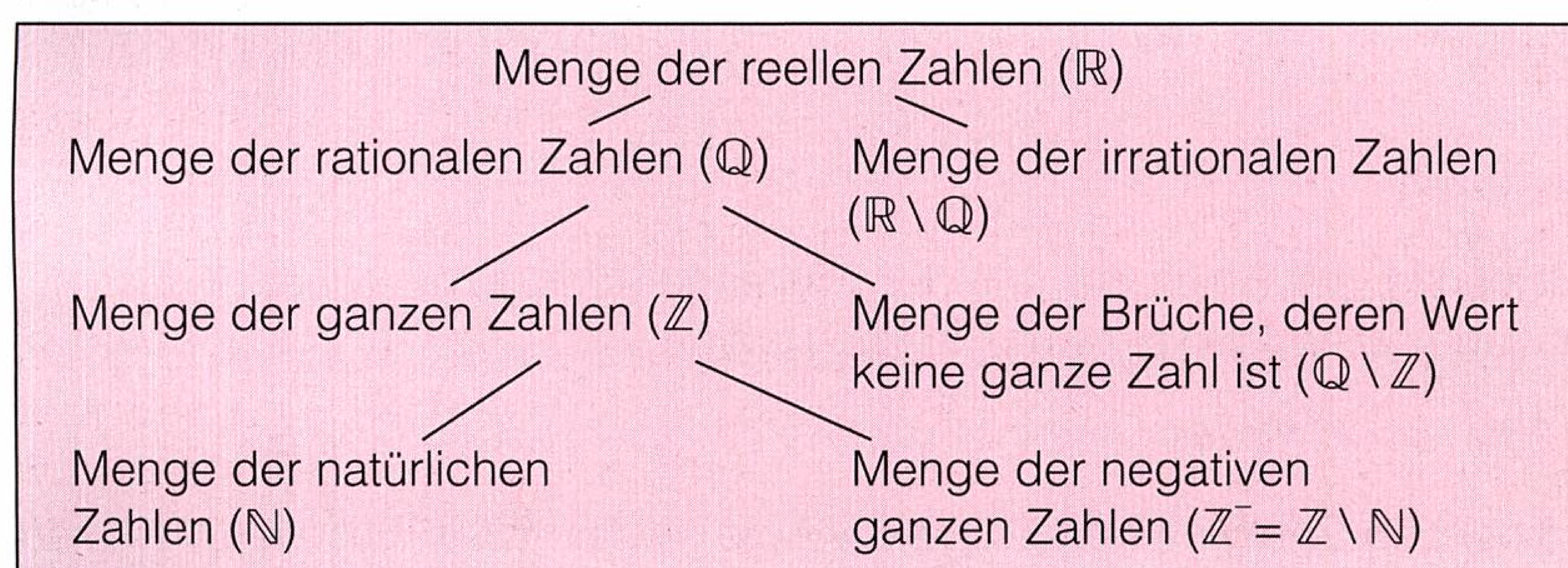
Fassen wir zusammen: In der Menge der rationalen Zahlen ist die Ausführung aller vier Grundrechnungsarten — mit Ausnahme der Division durch 0 — möglich. Die Operation des Wurzelziehens ist jedoch in der Menge $\mathbb{Q}$ nicht immer möglich.

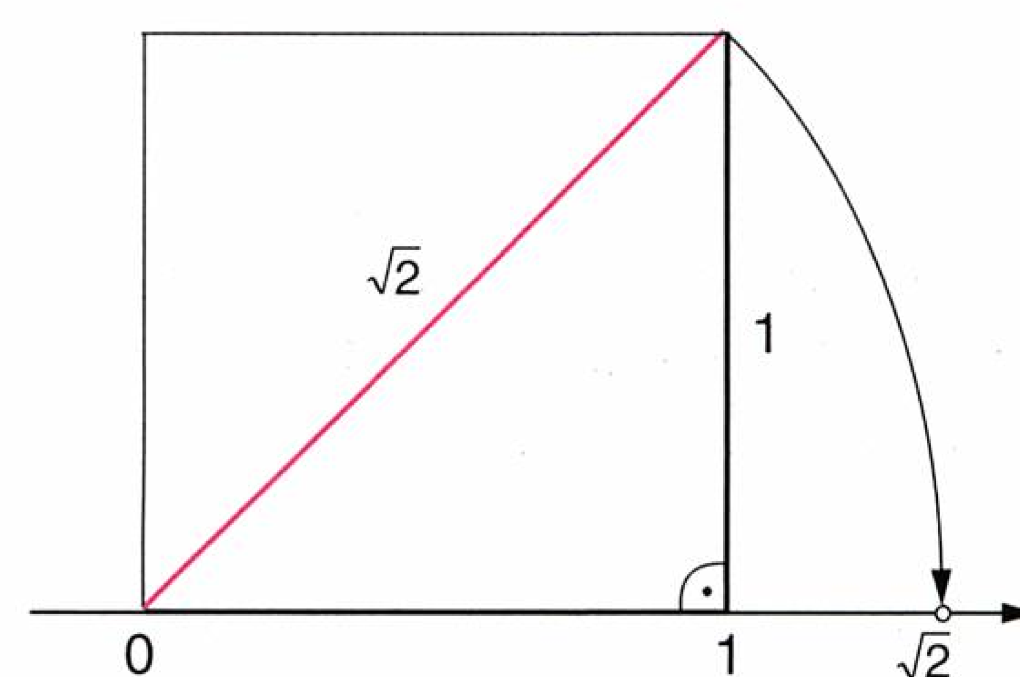
Man kann zeigen, dass die „nicht aufgehenden" Wurzeln wie $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ usw. irrationale Zahlen sind, also Zahlen, die sich nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen schreiben lassen.

Beim praktischen Rechnen werden irrationale Zahlen durch rationale Zahlen angenähert, z.B. $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$. Es lässt sich jede reelle Zahl mit beliebig vorgegebener Genauigkeit durch rationale Zahlen approximieren (d. h. annähern): So ist z. B. 1,4142 eine bessere Näherung für $\sqrt{2}$ als etwa 1,41.

Die Menge $\mathbb{R}$ stellt eine Zahlbereichserweiterung der Menge $\mathbb{Q}$ dar!

Zum besseren Verständnis diene die folgende Übersicht über die Zahlbereiche:





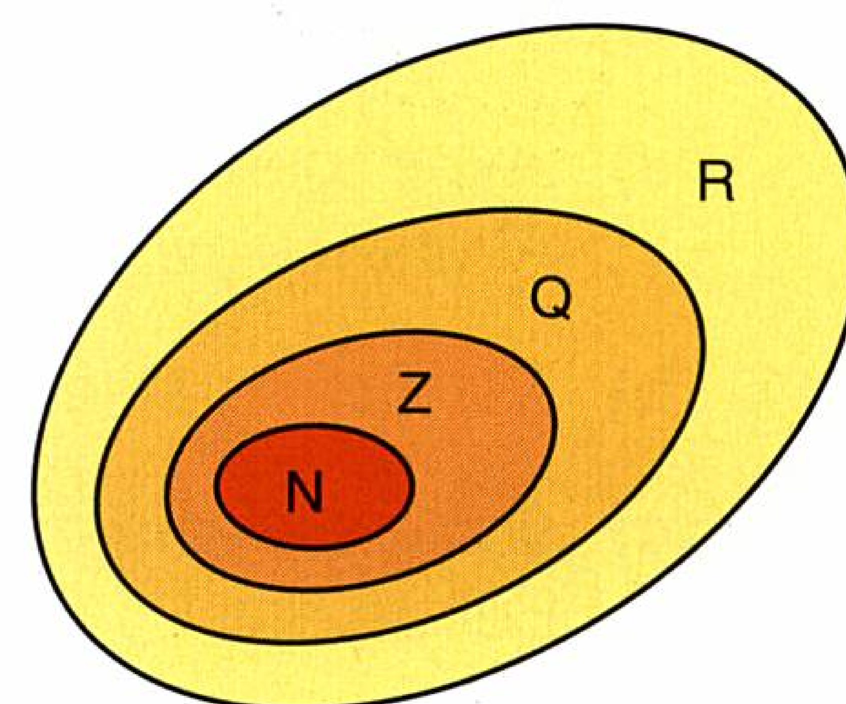
Mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes können wir die Länge der Diagonale des Quadrates mit der Seitenlänge 1 bestimmen:

$d^2 = 1^2 + 1^2$

$d^2 = 2$

$d = \sqrt{2}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



Wir haben uns nun durch alle Rechenoperationen durchgearbeitet und die entsprechenden Felder in unserem Rechenstufensymbol der Reihe nach „schraffiert". Dürfen wir wirklich auch das letzte Feld ohne weiteres mit einer Schraffur versehen? Oder gibt es vielleicht Wurzeln, die nicht ohne weiteres oder vielleicht gar nicht in $\mathbb{R}$ darstellbar sind?

Gehen wir einen Kompromiss ein: Schraffieren wir das letzte Feld nur halb und vermerken wir ganz bewusst an dieser Stelle, dass nicht alle Wurzeln in $\mathbb{R}$ „lösbar" sind. Tatsächlich gibt es aber einen noch größeren Zahlbereich, der auch andere Zahlen als bloß reelle enthält. Diese sogenannten **komplexen Zahlen** werden wir später kennen lernen. Ebenso werden wir irrationale Zahlen kennen lernen, die nicht als n-te Wurzel ($n \in \mathbb{N}^*$) einer rationalen Zahl dargestellt werden können.

AUFGABEN

103. a) 5^3 **b)** 2^4 **c)** 1^4 **d)** 7^3

104. a) 1^{20} **b)** 3^6 **c)** 4^5 **d)** 2^{10}

105. a) $\sqrt{100}$ **b)** $\sqrt{144}$ **c)** $\sqrt{196}$ **d)** $\sqrt{225}$

106. a) $\sqrt[3]{8}$ **b)** $\sqrt[3]{125}$ **c)** $\sqrt[4]{16}$ **d)** $\sqrt[5]{243}$

107. a) $3 \cdot 4 + 8 \cdot 9$ **b)** $3\,(4 + 8 \cdot 9)$ **c)** $(3 \cdot 4 + 8) \cdot 9$

108. a) $2 \cdot 23 - 3 \cdot 7$ **b)** $2\,(23 - 3 \cdot 7)$ **c)** $(2 \cdot 23 - 3) \cdot 7$

109. a) $4 \cdot 5 + 6 \cdot 3 + 2$ **b)** $4 \cdot 5 + 6\,(3 + 2)$ **c)** $4\,(5 + 6 \cdot 3 + 2)$

110. a) $(6 + 5^3 - 3 \cdot 6^2 + 5^2) : (4^2 \cdot 3) + 9^2 \cdot 4$ **b)** $[(6 + 5^3 - 3 \cdot 6^2 + 5^2) : 4^2] \cdot 3 + 9^2 \cdot 4$

111. a) $4 \cdot 3^3 + 3^4 \cdot 3 + 3^2 - (8 \cdot 4^2 - 5^2 \cdot 4)$ **b)** $(4 \cdot 3^3 + 3^4) \cdot 3 - (8 \cdot 4^2 - 5^2) \cdot 4$

112. **a)** $8 \cdot 9 + 7 \cdot 11 - 6 \cdot 5 + 72 : 6$

b) $8 \cdot 9(7 \cdot 11 - 6) \cdot 5 + 72 : 6$

c) $(8 \cdot 9 + 7) \cdot 11 - 6\,(5 + 72 : 6)$

d) $8 \cdot 9 + 7 \cdot 11 - 6(5 + 72) : 6$

e) $(8 \cdot 9 + 7 \cdot 11 - 6) \cdot 5 + 72 : 6$

f) $8(9 + 7 \cdot 11 - 6) \cdot 5 + 72 : 6$

g) $(8 \cdot 9 + 7) \cdot 11 - 6 \cdot 5 + 72 : 6$

h) $8 \cdot 9 + 7(11 - 6) \cdot 5 + 72 : 6$

113. **a)** $3 \cdot 2^2 + 24 \cdot 3^3 - 8 \cdot 4^2 + 52 : 4$

b) $3 \cdot 2^2 + (24 \cdot 3^3 - 8) \cdot 6 + 52 : 4$

c) $(3 \cdot 2^2 + 24) \cdot 3^3 - 8\,(4^2 + 52 : 4)$

d) $3 \cdot 2^2 + 24 \cdot 3^3 - 8\,(4^2 + 52) : 4$

e) $(3 \cdot 2^2 + 24 \cdot 3^3 - 8) \cdot 4^2 + 52 : 4$

f) $(3 \cdot 2^2 + 24 \cdot 3^3 - 8 \cdot 4^2 + 52) : 4$

g) $3 \cdot 2^2 + (24 \cdot 3^3 - 8 \cdot 4^2 + 52) : 4$

h) $(3 \cdot 2^2 + 24) \cdot 3^3 - 8 \cdot 4^2 + 52 : 4$

114. Die wahren Aussagen sind anzukreuzen:

- ○ **a)** Jeder ganzen Zahl ist eindeutig ein Bildpunkt auf der Zahlengeraden zugeordnet, wobei die Abstände zwischen aufeinander folgenden Bildpunkten gleich sind.
- ○ **b)** Der Betrag einer ganzen Zahl ist nicht immer eine natürliche Zahl oder Null.
- ○ **c)** Von zwei verschiedenen positiven Zahlen ist diejenige Zahl die kleinere Zahl, die den kleineren Betrag hat.
- ○ **d)** Zahlen, bei denen das Vorzeichen fehlt, sind positiv.
- ○ **e)** Die Menge der ganzen Zahlen ist eine Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen, d. h. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$.
- ○ **f)** Die Addition ganzer Zahlen ist kommutativ und assoziativ.
- ○ **g)** Die Subtraktion ganzer Zahlen ist kommutativ und assoziativ.
- ○ **h)** Ein Produkt ganzer Zahlen ist genau dann gleich Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist.

115. Der fehlende Text ist einzusetzen:

a) Das ..... (Vorzeichen/Rechenzeichen) besagt, welche Rechenoperation auszuführen ist. Ob wir es mit einer positiven oder negativen Zahl zu tun haben, zeigt das ..... (Vorzeichen/Rechenzeichen) an.

b) Gegenzahlen haben ..... (den selben/verschiedenen) Betrag.

c) Von zwei verschiedenen negativen Zahlen ist diejenige Zahl die kleinere Zahl, die den ..... (kleineren/größeren) Betrag hat.

d) Die Summe aus einer ganzen Zahl und ihrer entgegengesetzten Zahl ist ..... (immer/nicht immer) Null.

e) Wenn bei einer Multiplikation die Anzahl der negativen Faktoren gerade ist, so ist das Produkt ..... (positiv/negativ), sonst ist es ..... (positiv/negativ).

f) Eine positive Basis zu einem ungeraden Exponenten erhoben gibt ein ..... (positives/negatives) Resultat. Beispiel: .....

g) Eine negative Basis zu einem geraden Exponenten erhoben gibt ein ..... (positives/negatives) Resultat. Beispiel: .....

h) Eine negative Basis zu einem ungeraden Exponenten erhoben gibt ein ..... (positives/negatives) Resultat. Beispiel: .....

116. a) $(-1)+(-3)$ **b)** $(-1)+|-3|$ **c)** $|(-1)+(-3)|$ **d)** $|-1|+|-3|$

117. a) $(-4)-(-7)$ **b)** $(-4)-|(-7)|$ **c)** $|(-4)-(-7)|$ **d)** $|-4|-|-7|$

118. a) $(-1)(-4)$ **b)** $(-1)\cdot|-4|$ **c)** $|(-1)(-4)|$ **d)** $|-1|\cdot|-4|$

119. a) $(-8):(-2)$ **b)** $(-8):|-2|$ **c)** $|(-8)\cdot(-2)|$ **d)** $|-8|:|-2|$

120. Man berechne den Wert von (1) $x+|y|$ (2) $|x|-y$ (3) $|x-y|$ (4) $-3x+2y$

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
x	0	+3	+9	0	+4	+23	−33	−48
y	0	+2	−11	−23	+15	0	−37	−12

121. a) $(-1)+(+3)-(-2)$ **b)** $(-2)-(-3)+(-1)$ **c)** $(-10)-(+4)+(+13)$

122. a) $|-4|-(+2)+(+5)$ **b)** $(-7)+|-8|-(-2)$ **c)** $(-15)-(+2)+|+20|$

123. a) $(+3)-[(-12)+(+15)]$ **b)** $(+7)-[-(-10)-|10|]$ **c)** $(-2)-[(-6)-|-4|]$

124. a) $(+8)-[(-21)-(-4)-1]$ **b)** $-(-9)-[(+3)+(+7)-|-2|]$ **c)** $(+8)-[(-3)+(-2)-|-1|]$

125. a) $(-1)(-2)(-3)$ **b)** $(-11)\cdot 0\cdot(-50)$ **c)** $(+1)(+4)(+5)$

126. a) $(-15)(-2)(+5)$ **b)** $|-10|\cdot(-10)(10)$ **c)** $|(-2)(+3)(-7)|$

127. a) $[(-2)+(+5)](-11)$ **b)** $[(-9)-(+5)]\cdot|-3|$ **c)** $[(-3)-(-2)]\cdot|-4|$

128. a) $(-7)[(+4)-(-5)]$ **b)** $(+10)[(-6)-8]$ **c)** $(-7)[(-3)-|-2|]$

129. a) $(-2)^2$ **b)** $(-3)^3$ **c)** $(-4)^4$

130. a) $(-1)^2-(-1)^3$ **b)** $(-2)^3-(-2)$ **c)** $(-5)^2+(-5)^2$

131. a) $(+4)(-2)^4-2(-5)^2+(-3)^4(-2)^2$ **b)** $7(-3)^2-8(-7)^2+(-9)^2(-5)^3$

132. a) $11^2(+8)-(-3)^4(-7)+(-6)^4(-3)^2$ **b)** $3^2(-2)-(-4)^3(-5)+(-5)^3(-7)^2$

133. a) $[(-20):(-4)-(+4)]\cdot[(+7)-(+11)(-3)]$ **b)** $[(-14):(-7)-(-3)]\cdot[(+3)-(+9)(-4)]$

134. a) $[(-49):(+7)-(+3)]\cdot[(+2)+(+7)(-6)]$ **b)** $[(-18):(+3)-(+2)]\cdot[(-1)-(-2)(+5)]$

135. a) $\{(-35):[(+15)-(+8)]\}\cdot[(+3)+(+7)(-2)]$ **b)** $\{(-36):[(+11)+(-2)]\}\cdot[(-2)-(-3)(+4)]$

136. a) $[(+10)(-1)^6+(+7)(-2)^4+(+2)(+3)^2-(+5)(-2)^2](+2)$

b) $(+10)(-1)^6+[(+7)(-2)^4+(+2)(+3)^2-(+5)(-2)^2](+2)$

c) $(+10)(-1)^6+(+7)[(-2)^4+(+2)(+3)^2-(+5)(-2)^2](+2)$

d) $[(+10)(-1)^6+(+7)](-2)^4+(+2)(+3)^2-(+5)(-2)^2(+2)$

137. a) $\{[(+5)(-2)^4-(-2)^2(+3)+(+6)(-3)^4+(+4)(-2)^3]:(-2)\}(-1)$

b) $(+5)(-2)^4-\{[(-2)^2(+3)+(+6)(-3)^4+(+4)(-2)^3]:(-2)\}(-1)$

c) $(+5)(-2)^4-(-2)^2\{[(+3)+(+6)(-3)^4+(+4)(-2)^3]:(-2)\}(-1)$

d) $(+5)(-2)^4-(-2)^2(+3)+(+6)\{[(-3)^4+(+4)(-2)^3:(-2)]\}(-1)$

138. Durch Ankreuzen ist entsprechend zuzuordnen:

ist teilbar durch	2 (1)	3 (2)	4 (3)	5 (4)	6 (5)	8 (6)	9 (7)	10 (8)	12 (9)	25 (10)	100 (11)	125 (12)
a) 9000	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
b) 17512	X	X	X		X							
c) 48543												
d) 27821												
e) 24480												
f) 35600												
g) 18525												
h) 12 900 000												

139. Die nachstehend angegebenen Zahlen sind in ihre Primfaktoren zu zerlegen:

a) 48 **b)** 650 **c)** 1121 **d)** 2951

e) 12180 **f)** 27972 **g)** 99996 **h)** 361746

Bei den Aufgaben **140.** bis **145.** ist **(1)** das kgV **(2)** der ggT zu bestimmen:

140. a) 15, 20 **b)** 47, 12 **c)** 18, 28 **d)** 112, 23

141. a) 33, 91 **b)** 113, 13 **c)** 18, 128 **d)** 47, 112

142. a) 4, 10, 6 **b)** 5, 15, 2 **c)** 8, 6, 31 **d)** 12, 15, 34

143. a) 12, 5, 9 **b)** 3, 10, 4 **c)** 110, 23, 2 **d)** 39, 118, 172

144. a) 2, 3, 4, 5 **b)** 7, 11, 3, 66 **c)** 5, 12, 24, 36

145. a) 8, 34, 27, 9 **b)** 108, 35, 77, 92 **c)** 73, 119, 68, 190

146. Die wahren Aussagen sind anzukreuzen:

- ○ **a)** Jede von Null verschiedene natürliche Zahl ist Teiler von sich selbst.
- ○ **b)** Jede von Null verschiedene natürliche Zahl ist Teiler der Zahl Null.
- ○ **c)** Nicht jede von Null verschiedene natürliche Zahl hat den Teiler 1.
- ○ **d)** Jede ganze Zahl ist **immer** durch 1 und durch sich selbst teilbar.
- ○ **e)** Jede natürliche Zahl ist der Quotient aus einer ganzen Zahl und einer von Null verschiedenen ganzen Zahl.
- ○ **f)** Nicht jede ganze Zahl lässt sich als rationale Zahl schreiben.
- ○ **g)** In der Menge $\mathbb{Q}$ sind die Rechenoperationen der **ersten** und der **zweiten** Stufe (bis auf die Division durch Null) unbeschränkt ausführbar, nicht aber die der dritten Stufe.
- ○ **h)** Subtraktion und Division sind in $\mathbb{Q}$ nicht kommutativ und nicht assoziativ.

147. Der fehlende Text ist einzusetzen:

a) Von zwei verschiedenen positiven rationalen Zahlen ist diejenige die kleinere Zahl, die den ..... (größeren/kleineren) Betrag hat.

b) Null dividiert durch eine von Null verschiedene rationale Zahl ergibt ..... (Null/eine von Null verschiedene Zahl).

c) Jede negative rationale Zahl ist ..... (größer/kleiner) als Null.

d) Von zwei rationalen Zahlen liegt die größere von beiden auf der Zahlengerade stets ..... (rechts/links) von der kleineren.

e) Für das Rechnen in $\mathbb{Q}$ gilt ..... (das/kein) Kommutativgesetz der Addition. Beispiel: .....

f) Für das Rechnen in $\mathbb{Q}$ gilt ..... (das/kein) Assoziativgesetz der Multiplikation. Beispiel: .....

g) Für das Rechnen in $\mathbb{Q}$ gilt ..... (das/kein) Distributivgesetz. Beispiel: .....

h) Der Hauptnenner ergibt sich als Produkt der höchsten auftretenden Potenzen aller vorkommenden ..... (nicht weiter/weiter) zerlegbaren Faktoren der Teilnenner.

Bei den Aufgaben **148.** bis **150.** sind die Brüche zu erweitern:

148. a) $\frac{12}{11}$ auf 110-tel **b)** $\frac{1}{13}$ auf 247-stel **c)** $\frac{15}{17}$ auf 306-tel

149. a) $\frac{121}{315}$ auf 1575-stel **b)** $\frac{341}{252}$ auf 4284-stel **c)** $\frac{512}{823}$ auf 3292-stel

150. a) $\frac{23}{123}$ auf 3690-stel **b)** $\frac{121}{223}$ auf 6021-stel **c)** $\frac{115}{1023}$ auf 7161-stel

Bei den Aufgaben **151.** bis **153.** sind die Brüche soweit wie möglich zu kürzen:

151. a) $\frac{42}{96}$ **b)** $\frac{121}{187}$ **c)** $\frac{264}{198}$ **d)** $\frac{1603}{1561}$ **e)** $\frac{7257}{10209}$ **f)** $\frac{304}{12752}$

152. a) $\frac{56}{7}$ **b)** $\frac{12}{18}$ **c)** $\frac{60}{48}$ **d)** $\frac{289}{68}$ **e)** $\frac{870}{900}$ **f)** $\frac{1957}{2071}$

153. a) $\frac{165}{55}$ **b)** $\frac{90}{45}$ **c)** $\frac{216}{132}$ **d)** $\frac{375}{435}$ **e)** $\frac{3051}{3429}$ **f)** $\frac{8043}{10227}$

Bei den Aufgaben **154.** und **155.** sind die gegebenen Brüche auf gemeinsamen Nenner zu bringen:

154. a) $\frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ **b)** $\frac{7}{12}, \frac{7}{8}, \frac{3}{5}$ **c)** $\frac{7}{20}, \frac{81}{15}, \frac{2}{47}$ **d)** $\frac{19}{21}, \frac{1}{8}, \frac{3}{7}$

155. a) $\frac{55}{12}, \frac{11}{3}, \frac{1}{7}$ **b)** $\frac{26}{9}, \frac{27}{5}, \frac{3}{8}$ **c)** $\frac{1}{3}, \frac{31}{7}, \frac{65}{12}$ **d)** $\frac{66}{17}, \frac{9}{8}, \frac{12}{21}$

Bei den Aufgaben **156.** und **157.** sind sie Brüche als Dezimalzahlen zu schreiben:[1]

156. a) $\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{7}{5}$ **c)** $\frac{3}{10}$ **d)** $\frac{3}{16}$ **e)** $\frac{5}{8}$ **f)** $\frac{13}{100}$

157. a) $\frac{1}{7}$ **b)** $\frac{2}{9}$ **c)** $\frac{2}{99}$ **d)** $\frac{5}{77}$ **e)** $\frac{71}{99}$ **f)** $\frac{753}{990}$

Bei den Aufgaben **158.** und **159.** sind die Dezimalzahlen als gekürzte Brüche zu schreiben:

158. a) 0,2 **b)** 0,125 **c)** 0,672 **d)** 4,67 **e)** 3,18542 **f)** 0,4728

159. a) $0{,}\dot{1}$ **b)** $0{,}\dot{3}$ **c)** $0{,}\dot{4}$ **d)** $0{,}\dot{4}\dot{1}$ **e)** $0{,}\dot{0}\dot{5}$ **f)** $0{,}\dot{9}\dot{8}$

Anleitung: Man beachte die Ergebnisse von Aufgabe **157.**

Bei den Aufgaben **160.** bis **171.** sind die Ergebnisse als gekürzte Brüche anzuschreiben:

160. a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}$ **d)** $\frac{7}{20}+\frac{8}{15}-\frac{2}{45}$

161. a) $\frac{36}{5}-\frac{13}{4}-\frac{7}{3}$ **b)** $\frac{15}{2}+\frac{17}{3}-\frac{24}{5}$ **c)** $\frac{119}{12}-\frac{35}{8}+\frac{15}{2}$ **d)** $\frac{116}{15}-\frac{391}{60}+\frac{13}{6}$

[1]) Der Bruchstrich ist nur eine andere Schreibweise für das Divisionszeichen.

162. **a)** $\frac{6}{19} \cdot \frac{4}{3}$ **b)** $\frac{37}{5} \cdot \frac{1}{37}$ **c)** $\frac{5}{6} : \frac{4}{5}$ **d)** $\frac{35}{9} : \frac{1}{27}$

163. **a)** $\frac{5}{7} \cdot 14$ **b)** $\frac{51}{8} \cdot 2$ **c)** $\frac{23}{18} : \frac{25}{9}$ **d)** $\frac{14}{3} : \frac{81}{8}$

164. **a)** $\left(\frac{11}{4} + \frac{11}{8} + \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{6}{5}$ **b)** $\left(\frac{47}{6} - \frac{76}{9} + \frac{13}{4}\right) : \frac{35}{12}$ **c)** $\left(\frac{254}{51} - \frac{35}{6} + \frac{149}{34}\right) : \frac{45}{34}$

165. **a)** $\left(\frac{49}{15} + \frac{41}{9}\right) \cdot \left(22 - \frac{113}{8} - \frac{9}{4}\right)$ **b)** $\left(\frac{29}{5} + \frac{79}{20}\right) : \left(\frac{209}{24} + \frac{71}{12} - \frac{13}{8}\right)$

166. **a)** $\left[\frac{5}{4} : \left(4 + \frac{22}{7}\right) + \frac{37}{20}\right] \cdot \left(\frac{110}{3} - \frac{110}{9} \cdot \frac{23}{11}\right)$ **b)** $\left[\frac{55}{2} - \frac{50}{17}\left(5 + \frac{29}{14}\right)\right] : \frac{17}{4} + \frac{44}{3} : \left(4 + \frac{36}{13}\right)$

167. **a)** $\dfrac{\frac{181}{14} - \frac{184}{21}}{\frac{5}{6} + \frac{10}{9}}$ **b)** $\dfrac{\frac{217}{34} - \frac{53}{6} + \frac{305}{51}}{1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{17}}$ **c)** $\dfrac{\frac{71}{30} - \frac{101}{18} + \frac{419}{45}}{\frac{14}{15} + \frac{8}{3} + \frac{4}{9}}$

168. **a)** $\left[\left(+\frac{7}{9}\right) \cdot 8 - \frac{77}{19}\right]\left(-\frac{121}{39}\right) + \frac{1}{5}$ **b)** $\left[\left(+\frac{37}{11}\right) \cdot 22 - \frac{13683}{91}\right]\left(+\frac{1}{91}\right) + \frac{117}{5}$

169. **a)** $\left[\left(+\frac{7}{9}\right) : 8 - \frac{77}{19}\right] : \left(-\frac{121}{39}\right) + \frac{1}{5}$ **b)** $\left[\left(+\frac{37}{11}\right) : 22 - \frac{13683}{91}\right] : \frac{1}{91} + \frac{117}{5}$

170. **a)** $\left[\left(+\frac{166}{21}\right) - \left(-\frac{89}{8}\right)\right]\left[\left(-\frac{38}{7}\right) + \left(-\frac{1}{17}\right)\right]$ **b)** $\left[\left(\frac{10}{3}\right) + \left|+\frac{76}{15}\right|\right]\left[\left(-\frac{4}{9}\right) - \left(+\frac{11}{8}\right)\right]$

171. **a)** $\left[\left(-\frac{166}{21}\right) + \left(+\frac{89}{8}\right)\right] : \left[\left(+\frac{38}{7}\right) - \left(+\frac{1}{17}\right)\right]$ **b)** $\left[\left(-\frac{10}{3}\right) - \left(\frac{76}{15}\right)\right] : \left[\left(+\frac{4}{9}\right) + \left(-\frac{11}{8}\right)\right]$

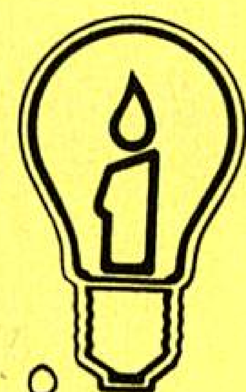
172. **a)** Wie könnte man irrationale Zahlen definieren?

b) Es ist zu bestimmen, welche der gegebenen Zahlen rational bzw. irrational sind:

(1) $\sqrt{121}$ (2) $\sqrt{10}$ (3) $0{,}\dot{3}$ (4) $\frac{17}{12}$ (5) $\sqrt{169}$

(6) $2{,}71\dot{7}$ (7) $\sqrt{0{,}49}$ (8) $\sqrt{0{,}049}$ (9) $\sqrt{0{,}0049}$ (10) $\sqrt{0{,}00049}$

THINK THINK THINK ThInk THINK THINK THINK ThInk THINK ThInk THINK THINK THINK THINK ThInk THINK



THINK ThInk THINK THINK THINK ThInk THINK



173. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 100

An welchen Stellen müssen Rechenzeichen gesetzt werden, damit eine wahre Aussage entsteht? Beispiel: 12 + 3 – 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100

Die Reihenfolge der Ziffern darf dabei nicht vertauscht werden!

174. Der alte Beduine Hadschi Ibn Halef hinterlässt seinen drei Söhnen 17 Kamele. Das Testament bestimmt, dass der älteste Sohn die Hälfte, der mittlere $\frac{1}{3}$ und der jüngste $\frac{1}{9}$ der Erbmasse erhalten soll. Wie ist das möglich? Folgender Vorschlag wäre denkbar: Ein geliehenes Kamel wird zu den 17 übrigen gestellt. Die Söhne erhalten somit dem Wunsch des Vaters entsprechend 9, 6 bzw. 2 Kamele. Dabei bleibt das geborgte Kamel übrig. Es wird zurückgegeben — und alle sind zufrieden. Was ist davon zu halten?

RECHNEN MIT VARIABLEN UND TERMEN

1. Einführung

Beispiele für Terme: 5, a + b, $\frac{3x}{4}$, $-2+\frac{7a}{9}$, ...

+ / − 3, ()a, a:) + 9, $\frac{7}{0}$ sind z. B. **keine** Terme.

Definition:

Zahlen, Variable sowie alle mit Hilfe von Verknüpfungszeichen entstandenen **sinnvollen** Verknüpfungen von Zahlen oder Variablen heißen **Terme**.

Beispiel:
Welchen speziellen Zahlenwert nimmt der Term $T(x) = 7x^2 - 3x + 5$ für $x = -1$ an?
Andere Formulierung: Die Variable x des Terms $7x^2 - 3x + 5$ ist mit −1 zu belegen.

Lösung:
$7(-1)^2 - 3(-1) + 5 = 7 + 3 + 5 = \mathbf{15}$ Wir schreiben: $T(-1) = \mathbf{15}$

Eine **Variable** ist ein beliebiges Zeichen, für das während einer Überlegung in einem gewissen Ausmaß frei wählbare Belegungen, z. B. Zahlen, eingesetzt werden dürfen.

Der Term $7x^2 - 3x + 5$ geht bei der Belegung der Variablen x mit der Zahl −1 in eine bestimmte Zahl über. Wir sagen: Der Term $7x^2 - 3x + 5$ ist für die Zahl −1 definiert.

Für die Zahl 2 ist z. B. der Term $\frac{4}{x-2}$ nicht definiert, weil der Nenner 0 ergibt: $T(2) = \frac{4}{2-2} = \frac{4}{0}$

$\frac{4}{0}$ ist kein definierter Zahlenwert (kein sinnvolles Zahlzeichen).

Im obigen Term $\frac{4}{x-2}$ ist x ein „Platzhalter" (eine Variable). Es muss angegeben sein, welche Zahlen der Platzhalter vertreten darf.

Die Menge aller Zahlen, die für das Einsetzen in die Variable vorgesehen sind, nennt man **Grundmenge**.

Definition:

Die **Grundmenge G** eines Terms ist die Menge aller Zahlen, die für die Belegung der Variablen des Terms vorgesehen sind.

Wählen wir z. B. für den Term $\frac{3x+1}{x-1}$ die Grundmenge $G = \{1, 2, 3\}$!

Es ist also vorgesehen, dass für x die Zahlen 1, 2 und 3 einzusetzen sind:

$T(1) = \frac{3+1}{1-1} = \frac{4}{0}$ ..... nicht definiert

$T(2) = \frac{6+1}{2-1} = \frac{7}{1} = \mathbf{7}$

$T(3) = \frac{9+1}{3-1} = \frac{10}{2} = \mathbf{5}$

Für die Elemente 2 und 3 der Grundmenge erhalten wir sinnvolle Ergebnisse, d. h. bestimmte Zahlen. Nicht jedoch bei der Belegung des Terms mit 1. Der Term $\frac{3x+1}{x-1}$ ist also nur für die Zahlen 2 und 3 der Grundmenge {1, 2, 3} definiert. Wir fassen die Elemente 2 und 3 der Grundmenge G zu einer neuen Menge, der Definitionsmenge $D = \{2, 3\}$ zusammen.

Definition:

Die **Definitionsmenge D** eines Terms T ist die Menge jener Elemente aus G, für die T einen sinnvollen Zahlenwert ergibt. D ist also eine Teilmenge von G.

Beispiel:
Man bestimme die Definitionsmenge D des Terms $T = \frac{1}{x}$, wenn die Grundmenge $G = \mathbb{Z}$ gegeben ist.

Lösung:
Wenn die Variable x mit der Zahl 0 belegt wird, erhalten wir den nicht definierten Zahlenwert $\frac{1}{0}$! In allen anderen Fällen der Belegung der Variablen mit den Elementen der Grundmenge wird der Term in einen eindeutigen Zahlenwert übergeführt.
Es gilt: $D = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Beim Umformen von Termen besitzen jene Rechengesetze Gültigkeit, die für das Rechnen mit jenen Zahlen gelten, die die Definitionsmenge bilden und gleichzeitig Bestandteil des Terms sind. Kommutativgesetze, Assoziativgesetze und das Distributivgesetz gelten für alle Zahlenmengen, die wir bisher kennengelernt haben. Sie sind in der Außenspalte zur Wiederholung angeführt.

> Kommutativgesetze:
> $a + b = b + a$
> $a \cdot b = b \cdot a$
> Assoziativgesetze:
> $a + (b + c) = (a + b) + c$
> $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
> Distributivgesetz:
> $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Kann man Terme addieren? Wenn es sich um Terme mit **gleichen Variablen** handelt — z. B. 5a und 2a — kann man sie „zusammenfassen": $5a + 2a = 7a$. Im Term 7a nennt man 7 den **Koeffizienten** von a.

> Terme mit gleichen Variablen werden addiert (bzw. subtrahiert), indem man ihre Koeffizientensumme (bzw. Koeffizientendifferenz) mit der gemeinsamen Variablen multipliziert.

Beispiel:

a) $7y + y - 2y = ?$ **b)** $3x + 4y - 5z = ?$

c) $5a + 3b - 2a + 4b = ?$

Lösung:

a) $7y + y - 2y = 8y - 2y = \mathbf{6y}$

b) $3x + 4y - 5z = ?$ Kommen in einer Rechnung verschiedene Variable vor, so dürfen nur Terme mit gleichen Variablen zusammen gefasst werden. Der Ausdruck $3x + 4y - 5z$ lässt sich also nicht vereinfachen.

c) $5a + 3b - 2a + 4b = \mathbf{3a + 7b}$



Terme wie 7a, $4x^2y$, $\frac{2x}{5}$, ... bezeichnet man als **Monome**.

$3x + 4y$, $2a - b$, $5x^2y - 9$, ... sind Beispiele für **Binome**.

Dreigliedrige Terme wie z. B. $3x + 4y - 5z$, $9x^2 - 5a + 1$, ... heißen **Trinome**.

Als Oberbegriff für Terme dieser Art verwendet man das Wort **Polynom**. Unter einem Polynom versteht man aber auch Terme mit mehr als drei Gliedern.

$5x^2 - 6y + z - 5$, $a^2 + b^2$, $17 + 5x$, x^2y, ... sind Beispiele für Polynome.

Erinnern wir uns an die **Klammerregeln:**

> Steht vor einer Klammer ein Pluszeichen, so bleibt die Klammer einfach weg. Steht aber vor einer Klammer ein Minuszeichen, so sind beim Weglassen der Klammer alle in ihr vorkommenden Vor- bzw. Rechenzeichen umzukehren.

$a + (b + c) = a + b + c$

$5 + (3 + 4) = 5 + 3 + 4 = \mathbf{12}$

$5 + (3 + 4) = 5 + 7 = \mathbf{12}$

$a - (b + c) = a - b - c$

$5 - (3 + 4) = 5 - 3 - 4 = \mathbf{-2}$

$5 - (3 + 4) = 5 - 7 = \mathbf{-2}$

$a + (b - c) = a + b - c$

$5 + (3 - 4) = 5 + 3 - 4 = \mathbf{4}$

$5 + (3 - 4) = 5 + (-1) = \mathbf{4}$

$a - (b - c) = a - b + c$

$5 - (3 - 4) = 5 - 3 + 4 = \mathbf{6}$

$5 - (3 - 4) = 5 - (-1) = \mathbf{6}$

Es ist günstig, die Glieder, die man zusammenfasst, „abzuhaken". Dadurch wird vermieden, dass ein Glied nicht berücksichtigt bzw. doppelt gerechnet wird. Wenn vor dem ersten Glied in einer Klammer kein Vorzeichen steht, so denkt man sich an dieser Stelle stets ein Pluszeichen.

Beispiel:

$5a + 3b + (7a - 3b) - (10a - 2b) =$

$= 5a + 3b + 7a - 3b - 10a + 2b = \mathbf{2a + 2b}$

Neben den runden Klammern werden bekanntlich auch eckige und geschwungene Klammern verwendet.[1] Wie löst man eine Aufgabe, in der verschiedene Klammern verwendet werden?

Beispiel:

$x - \{y + 3z - [-2x + (3x - 4y) + y]\} + 4y =$

$= x - \{y + 3z - [\underbrace{-2x + 3x - 4y + y}_{x-3y}]\} + 4y = x - \{\underbrace{y + 3z - x + 3y}_{4y+3z-x}\} + 4y =$

$= x - \{4y + 3z - x\} + 4y = x - 4y - 3z + x + 4y = \mathbf{2x - 3z}$

Bei obigem Beispiel wurde mit dem Auflösen der Klammern von innen begonnen: Zuerst wurde die runde, dann die eckige und zuletzt die geschwungene Klammer aufgelöst. Selbstverständlich ist es auch zulässig, mit dem Auflösen der Klammern von außen zu beginnen. Mit einiger Übung kann man **alle** Klammern in einem Rechenaufgang auflösen und erspart sich dadurch viel Schreibarbeit.

Beispiel:

$-12 - \{a - [b + 5 - (3a - 6)]\} - [4a - 2 + (-b + 1)] =$

$= -12 - a + b + 5 - 3a + 6 - 4a + 2 + b - 1 = \mathbf{-8a + 2b}$

Um zu prüfen, ob man richtig gerechnet hat, setzt man z. B. spezielle Zahlen ein.

Wichtiger Hinweis: Bei der Ausführung dieser „Probe" werden die Klammern nicht nach den Klammerregeln aufgelöst, sondern jeder Klammerausdruck wird numerisch errechnet.

Wenn wir etwa bei dem letzten Beispiel den Koeffizienten von b überprüfen wollen, führen wir folgende Probe durch:

Probe:

Wir setzen $a = 0$, $b = 1$.

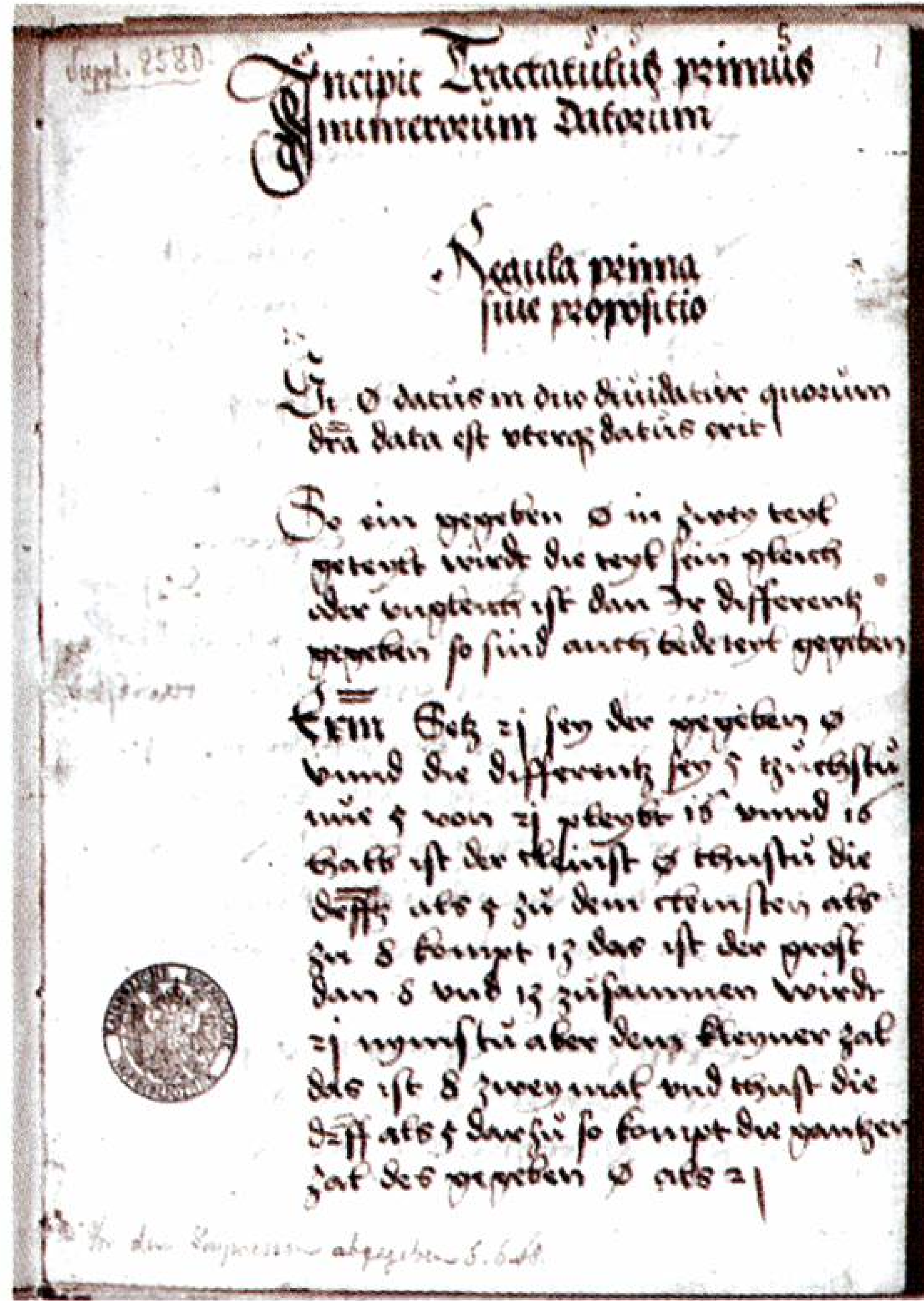
Ausgangsterm: $-12 - \{0 - \underbrace{[1 + 5 - \underbrace{(0 - 6)}_{-6}]}_{12}\} - \underbrace{[0 - 2 + \underbrace{(-1 + 1)}_{0}]}_{-2} =$

$= -12 + 12 + 2 = \mathbf{2}$

Ergebnisterm: $-0 + 2 = \mathbf{2}$

Eine derartige „Probe" ist selbstverständlich kein Beweis für die Richtigkeit der Rechnung, weil es eben nicht genügt, eine Behauptung anhand einzelner Spezialfälle zu überprüfen.

Aus der 1. Hälfte des 16. Jahrhunderts stammt der folgende Text, der in gotischer Eilschrift abgefasst wurde:



Hier die Übertragung in Druckschrift:

.
.
.

Si numerus datus in duo dividitur quorum differentia data est uterque datus erit.

So ein gegeben zal in zwey teyl geteylt wirdt, die teyl sein gleich oder vngleich, ist dan die differentz gegeben, so sind auch bede teyl gegeben.

Exemplum: Setz 21 sey der gegeben zal vnnd die differentz sey 5 tzuchstu nue 5 von 21 pleybt 16 vnnd 16 halb ist der cleinst zal thustu die differentz als 5 zu dem cleinsten als zu 8 kompt 13 das ist der grost dan 8 vnd 13 zusammen wirdt 21 nyms tu aber den kleyner zal das ist 8 zwey mal vnd thust die differentz als 5 darzu so kompt die gantzen zal der gegebenen zal als 21

Um den obigen Sachverhalt in die „Sprache der Mathematik" zu übertragen und das Problem zu lösen, muss man unter anderem mit Termen rechnen können.

1) Verschiedene Arten von Klammern fördern die Übersicht des menschlichen Lesers. Computer zählen ausschließlich öffnende und schließende Klammern und kommen daher mit einem einzigen Typ einer Klammer aus.

2. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten[1)]

Kurzwiederholung

a^5 ← Exponent
↑
Basis

Definition:

Es sei $a \in \mathbb{R}$, und $n \in \mathbb{N}^*$.
Unter $\mathbf{a^n}$ versteht man:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}$$

Man nennt a die **Basis (Grundzahl)** der Potenz a^n, n heißt **Exponent (Hochzahl)** der Potenz a^n.

Produkte aus mehreren gleichen Faktoren, z. B. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ kann man bekanntlich abgekürzt schreiben:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$$

5^4 ist ein Beispiel für eine Potenz, also ein Produkt gleicher Faktoren. Es ist $a^1 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$, d. h. 1 als Exponent kann weggelassen werden.

Damit ist der Begriff der Potenz für alle Exponenten $n \in \mathbb{N}^*$ erklärt.

Addition und Subtraktion von Potenzen

Potenzen lassen sich genau dann addieren (subtrahieren), wenn sie sowohl in ihren Basen als auch in ihren Exponenten übereinstimmen:

$$a^2bc^3 + a^2bc^3 + a^2bc^3 = 3a^2bc^3$$

Dieser Sachverhalt ist uns schon gut bekannt. Trotzdem sei nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen: Terme, die entweder nur in ihren Basen oder nur in ihren Exponenten übereinstimmen, lassen sich **nicht** weiter vereinfachen:

$$\left.\begin{matrix} a^5 + b^5 \\ x^3 + x^2 \end{matrix}\right\} \text{ lässt sich nicht weiter vereinfachen (zusammen fassen).}$$

Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

Nehmen wir an, man hat das Produkt der Zahlen 2^3 und 2^5 zu berechnen:

$2^3 \cdot 2^5 = 8 \cdot 32 = \mathbf{256}$ oder

$$\underbrace{(\overset{1}{2} \cdot \overset{2}{2} \cdot \overset{3}{2})}_{2^3} \cdot \underbrace{(\overset{4}{2} \cdot \overset{5}{2} \cdot \overset{6}{2} \cdot \overset{7}{2} \cdot \overset{8}{2})}_{2^5} = 2^8 = \mathbf{256}$$

$$= 2^{3+5} = 2^8 = \mathbf{256}$$

Aus diesen und ähnlichen Beispielen vermuten wir:

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Basis beibehält und die Exponenten addiert.

Satz:

Für alle $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$ gilt:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Beweis: $a^m \cdot a^n = \underbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m\text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n\text{ Faktoren}}}_{m+n\text{ Faktoren}} = a^{m+n}$

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

Was heißt nun eigentlich „potenzieren"?

Nun: Wenn beispielsweise die Potenz 3^5 gegeben ist, so sagt man: „**3 wird mit 5 potenziert**"

Beispiel:

Man berechne

a) $a^7 \cdot a^5$ **b)** $x^y \cdot y^x \cdot x^{2y-1} \cdot y$

c) $(a+b)^3 (a+b)$ **d)** $2x^4y^2 \cdot 3x^2y^2$

Lösung:

a) $a^7 \cdot a^5 = a^{7+5} = \mathbf{a^{12}}$

b) $x^y \cdot y^x \cdot x^{2y-1} \cdot y = x^{y+(2y-1)} \cdot y^x \cdot y^1 = \mathbf{x^{3y-1} \cdot y^{x+1}}$

c) $(a+b)^3 (a+b) = (a+b)^{3+1} = \mathbf{(a+b)^4}$

d) $2x^4y^2 \cdot 3x^2y^2 = 6x^{4+2} \cdot y^{2+2} = \mathbf{6x^6 \cdot y^4}$

---

1) In diesem Abschnitt wird das Rechnen mit Potenzen nur insoweit behandelt, als es für das Verständnis bei Term- und Gleichungsumformungen unerlässlich ist.

Wie lässt sich der Quotient von $2^5 : 2^3$ errechnen?

$2^5 : 2^3 = 32 : 8 = 4$ Wir hätten aber auch anders vorgehen können:

$$2^5 : 2^3 = \frac{2^5}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 4 \text{ oder } \frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$$

Aus diesen und ähnlichen Beispielen vermuten wir:

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Basis beibehält und die Exponenten subtrahiert.

Beweis: $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{m-n} \cdot a^n}{a^n} = a^{m-n}$ $(m > n)$

Der obige Beweis sowie nebenstehender Satz gelten nur für $m > n$. Genau genommen lassen sich aber **drei** Fälle unterscheiden:

(1) Im Zähler stehen mehr Faktoren als im Nenner. Mithin können sämtliche n Faktoren des Nenners gegen n Faktoren des Zählers gekürzt werden. Dadurch verbleiben im Zähler $m - n$ Faktoren.

Beispiel: $\frac{x^4}{x^2} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x} = x^2$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ für $m > n$

Fall (1): $m > n$

(2) Im Zähler und im Nenner stehen gleich viele Faktoren. Mithin können sämtliche Faktoren des Zählers gegen sämtliche Faktoren des Nenners gekürzt werden.

Beispiel: $\frac{x^4}{x^4} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x} = 1$

$\frac{a^m}{a^n} = 1$ für $m = n$

Fall (2): $m = n$

(3) Im Nenner stehen mehr Faktoren als im Zähler. Mithin können sämtliche m Faktoren des Zählers gegen m Faktoren des Nenners gekürzt werden. Dadurch verbleiben im Nenner $n - m$ Faktoren.

Beispiel: $\frac{x^2}{x^4} = \frac{x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^2}$

$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ für $m < n$

Fall (3): $m < n$

Division von Potenzen mit gleicher Basis

Satz:

Für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m > n$ gilt:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert.

Beispiel:

Man berechne **a)** $\frac{a^8}{a^{12}}$ **b)** $\left(\frac{3}{4}\right)^7 : \left(\frac{3}{4}\right)^5$ **c)** $\frac{x^{y+5}}{x^{5-y}}$ **d)** $\frac{(a+b)^3 x^5}{x^2 (a+b)^6}$

Lösung:

a) $\frac{a^8}{a^{12}} = \frac{1}{a^{12-8}} = \frac{1}{a^4}$ (Fall (3))

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^7 : \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^{7-5} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ (Fall (1))

c) $\frac{x^{y+5}}{x^{5-y}} = x^{y+5-(5-y)} = x^{y+5-5+y} = x^{2y}$

d) $\frac{(a+b)^3 x^5}{x^2 (a+b)^6} = \frac{x^{5-2}}{(a+b)^{6-3}} = \frac{x^3}{(a+b)^3}$

Das Quadrat der Potenz 2^3 soll berechnet werden: $(2^3)^2 = ?$

$(2^3)^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^6$ bzw. $(2^3)^2 = 2^6$

Wir vermuten:

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Basis beibehält und die Exponenten multipliziert.

Beweis: $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ Faktoren}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ Summanden}}} = a^{m \cdot n}$

Potenzieren von Potenzen

Satz:

Für alle $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$ gilt:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert.

Beispiel:
Man berechne **a)** $(3^2)^3$ **b)** 3^{2^3} **c)** $[(-a)^3]^3$ **d)** $[(-b^3)^4]^5$.

Die Schreibung 3^{2^3} ist üblich, wenn $3^{(2^3)}$ gemeint ist.

Lösung:

a) $(3^2)^3 = 3^6 = 729$
b) $3^{2^3} = 3^8 = 6561$
Man beachte den Unterschied! $(\mathbf{a^m})^\mathbf{n} \neq \mathbf{a^{m^n}}$

c) $[(-a)^3]^3 = (-a)^9 = -a^9$ **d)** $[(-b^3)^4]^5 = (-b^3)^{20} = b^{60}$

Potenzieren von Produkten

Satz:
Für alle a, b ∈ ℝ, n ∈ ℕ* gilt:

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Wie wird ein Produkt potenziert? z. B.: $(3 \cdot 4)^2 = ?$
$(3 \cdot 4)^2 = 12^2 = 144$ oder $(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2 = 9 \cdot 16 = 144$
Wir vermuten:
Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden Faktor potenziert.

Beweis:

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren}} \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ Faktoren}} = a^n \cdot b^n$$

Beispiel:
Man berechne **a)** $(a^2b)^3$ **b)** $(-3b^2)^3$ **c)** $(7a^5b^2c^{10})^2$ **d)** $0 \cdot 25^3 \cdot 4^3$.

Lösung:

a) $(a^2b)^3 = a^6b^3$ **b)** $(-3b^2)^3 = -27b^6$
c) $(7a^5b^2c^{10})^2 = 49a^{10}b^4c^{20}$ **d)** $0{,}25^3 \cdot 4^3 = (0{,}25 \cdot 4)^3 = 1^3 = 1$

Potenzieren von Brüchen

Satz:
Für alle a, b ∈ ℝ, b ≠ 0, n ∈ ℕ* gilt:

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Selbstverständlich hätte man $0{,}25^3 \cdot 4^3$ auch anders berechnen können: $0{,}25^3 = 0{,}015625$, $4^3 = 64$, $0{,}015625 \cdot 64 = 1$. Durch Anwendung von $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ konnte die Aufgabe jedoch „eleganter" gelöst werden.

$\left(\frac{4}{7}\right)^3$ bedeutet, dass die Basis $\frac{4}{7}$ 3-mal mit sich selbst zu multiplizieren ist:

$$\left(\frac{4}{7}\right)^3 = \left(\frac{4}{7}\right) \cdot \left(\frac{4}{7}\right) \cdot \left(\frac{4}{7}\right) = \frac{4^3}{7^3}$$

Die folgende Vermutung ist nahe liegend:
Ein Bruch wird potenziert, indem man Zähler und Nenner potenziert.

Beweis:
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Faktoren}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ Faktoren}}} = \frac{a^n}{b^n}$$

Zusammenfassend gilt:

Beim Rechnen mit Potenzen gleicher Basis bleibt die Basis unverändert und beim Exponenten wird die Rechenstufe um einen Grad herabgesetzt.

$(\ )^n$	$\sqrt[n]{\ }$
×	÷
+	−

Beispiel:
Man berechne **a)** $\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^5$ **b)** $\frac{(x^3)^5}{y^2}$ **c)** $\left(-\frac{4x^2yz^5}{uvw}\right)^3$

Lösung:

a) $\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^5 = \frac{x^{15}}{y^{10}}$
b) $\frac{(x^3)^5}{y^2} = \frac{x^{15}}{y^2}$
Man beachte den Unterschied! $\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^\mathbf{n} \neq \frac{\mathbf{a^n}}{\mathbf{b}}$

c) $\left(\frac{-4x^2yz^5}{uvw}\right)^3 = \frac{-64x^6y^3z^{15}}{u^3v^3w^3}$

„*Unter einer Potenz versteht man eine abgekürzte Schreibweise für ein Produkt gleicher Faktoren*" ist eine Definition, die nur für Potenzen mit Exponenten aus der Zahlenmenge $\mathbb{N}^*$ sinnvoll ist:

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; $2^2 = 2 \cdot 2$; $a^3 = a \cdot a \cdot a$ usw.

Beispiele für Potenzen, die durch obige Definition nicht erklärt sind:

$3^0 = ?$, $2^{-2} = ?$, $a^{-3} = ?$ usw.

Wie die Division von Potenzen mit gleicher Basis zeigt, hat es sich als sinnvoll erwiesen, folgende Festsetzungen zu treffen:

$a^0 = 1$ bzw. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Durch unsere erweiterte Definition der Potenz gilt jetzt **immer**: „Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert", auf Fall **(2)** und **(3)** bezogen:

$$\frac{x^4}{x^4} = x^{4-4} = x^0 = 1 \qquad \frac{x^2}{x^4} = x^{2-4} = x^{-2}$$

Wie günstig die „neue" Definition ist, zeigt sich daran, dass die für Potenzen mit natürlichen Exponenten erklärten Rechengesetze auch für negative Exponenten gültig sind. Die entsprechenden Beweise werden später gebracht.

Basis^{Exponent} = Potenz

Eine Potenz mit negativem Exponenten ist eine andere Schreibweise für den reziproken Wert der Potenz mit positivem Exponenten.

Es gilt jetzt immer:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Beispiel:

Die folgenden Terme sind auf ihre einfachste Form zu bringen und mit positiven Exponenten darzustellen:

a) $2x^{-4}$ **b)** $\frac{x^{-1}y^2c^{-5}}{z^{-4}de^3}$ **c)** 5^0 **d)** $[(3x-5y)^2]^0$

e) $a^{-3} \cdot a^5$ **f)** $\frac{a^5 \cdot a^{-7}}{a^{-2}}$ **g)** $(x^{-3})^{-5}$ **h)** $(a^{-1}b^4)^{-2}$

i) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}$ **j)** $\left(\frac{4x^{-2}}{y^2}\right)^{-3}$

Lösung:

Um umständliche Schreibweisen zu vermeiden, wollen wir verabreden, dass allfällige Nenner als von 0 verschieden zu betrachten sind.

a) $2x^{-4} = 2 \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{2}{x^4}$ ①

b) $\frac{x^{-1}y^2c^{-5}}{z^{-4}de^3} = \frac{z^4y^2}{x^1de^3c^5} = \frac{y^2z^4}{c^5de^3x}$ ②

c) $5^0 = 1$ ③

d) $[(3x-5y)^2]^0 = 1$ ③[1]

e) $a^{-3} \cdot a^5 = a^{-3+5} = a^2$ ④

f) $\frac{a^5 \cdot a^{-7}}{a^{-2}} = a^{5+(-7)-(-2)} = a^{5-7+2} = a^0 = 1$ ④, ⑤, ③[1]

g) $(x^{-3})^{-5} = x^{(-3)(-5)} = x^{15}$ ⑥

h) $(a^{-1}b^4)^{-2} = a^{(-1)(-2)}b^{4(-2)} = a^2b^{-8} = \frac{a^2}{b^8}$ ⑦, ②

i) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \frac{5^{-1}}{3^{-1}} = \frac{3}{5}$ ⑧, ② bzw. $\left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{3}{5}$ ①, ⑧

j) $\left(\frac{4x^{-2}}{y^2}\right)^{-3} = \frac{4^{-3}x^{(-2)(-3)}}{y^{2(-3)}} = \frac{x^6}{4^3y^{-6}} = \frac{x^6y^6}{64}$ ⑦, ⑧, ② bzw.

$\left(\frac{4x^{-2}}{y^2}\right)^{-3} = \left(\frac{y^2}{4x^{-2}}\right)^3 = \frac{y^6}{4^3x^{-6}} = \frac{x^6y^6}{64}$ ①, ⑦, ⑧, ②

Rechnen mit Potenzen

① Eine Potenz mit negativem Exponenten ist eine andere Schreibweise für den reziproken Wert der Potenz mit positivem Exponenten.

② Faktoren, die mit negativen Exponenten im Zähler (Nenner) auftreten, können mit entsprechenden positiven Exponenten in den Nenner (Zähler) gebracht werden.

③ Die nullte Potenz jeder (von 0 verschiedenen) Zahl hat den Wert 1.

④ Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert.[2]

⑤ Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert.[2]

⑥ Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.[2]

⑦ Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden Faktor potenziert.

⑧ Ein Bruch wird potenziert, indem man Zähler und Nenner potenziert.

[1]) Es muss gelten: $3x - 5y \neq 0$ bzw. $a \neq 0$.

[2]) Die Basis bleibt dabei unverändert.

Die auf Seite 47 angeführten Rechengesetze (4) bis (8) gelten — wie wir schon früher zeigten — für Potenzen mit Exponenten aus der Zahlenmenge $\mathbb{N}^*$. Wie lässt sich zeigen, dass diese Rechengesetze auch für Potenzen aus der Zahlenmenge $\mathbb{Z}$ gelten?

Eine schwierige Frage. Nehmen wir z. B. den Satz (4) „Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert."[1] In die „Sprache der Mathematik" übertragen: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, $a \in \mathbb{R}$ und $r, s \in \mathbb{Z}$. Diese Behauptung gilt es zu beweisen!

Beweis:

$|r| = m,\ |s| = n,\ m,\ n \in \mathbb{N}^*$ (gilt für den 1. bis 4. Fall)

1. Fall: $r, s > 0 \Rightarrow r, s \in \mathbb{N}^*$
Dieser Fall ist bereits laut Voraussetzung erfüllt!

2. Fall: $r > 0,\ s < 0 \Rightarrow r = m,\ s = -n$

$$a^r a^s = a^m a^{-n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{m+(-n)} = \mathbf{a^{r+s}}$$

3. Fall: $r < 0,\ s > 0 \Rightarrow r = -m,\ s = n$
Dieser Fall ist analog zum vorigen!

4. Fall: $r, s < 0 \Rightarrow r = -m,\ s = -n$

$$a^r a^s = a^{-m} a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m \cdot a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} =$$

$$= a^{-m+(-n)} = \mathbf{a^{r+s}}$$

5. Fall: $r = 0,\ s \neq 0,\ a \neq 0$

$$a^r a^s = a^0 a^s = 1 \cdot a^s = a^s = a^{0+s} = \mathbf{a^{r+s}}$$

6. Fall: $r \neq 0,\ s = 0,\ a \neq 0$
Dieser Fall ist analog zum vorigen!

7. Fall: $r = 0, s = 0, a \neq 0$

$$a^r a^s = a^0 \cdot a^0 = 1 \cdot 1 = 1 = a^0 = a^{0+0} = \mathbf{a^{r+s}}$$

Der obige Beweis könnte dem Lernenden vielleicht umständlich erscheinen. Sind diese Fallunterscheidungen wirklich notwendig? Wer sich die Angelegenheit in Ruhe durchdenkt, wird erkennen, dass hier kein „überflüssiger Schritt" gesetzt wurde. Die anderen Sätze lassen sich übrigens analog beweisen.

Wir wollen nun noch Beispiele anführen, wo die Potenz zur Darstellung von Zahlen unerlässlich ist:

Um ein „Googol" (vgl. Außenspalte) kurz und prägnant anzuschreiben, steht uns eine Zahlendarstellung zur Verfügung, die derart große Zahlen zweckmäßig beschreibt: die **Potenzschreibweise**.

Freilich gibt es auch „Zwerge im Zahlenreich", denken wir etwa an

— den Radius eines Heliumatoms ($r = 4 \cdot 10^{-11}$ m) oder

— die Elektronenmasse ($m_e = 9{,}1096 \cdot 10^{-31}$ kg).

Um diese Winzlinge bequem und mühelos anzuschreiben, können wir gleichfalls die Potenzschreibweise heranziehen.

[1] Exakte Formulierung: „Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die gemeinsame Basis mit der Summe der Exponenten potenziert."



Um eine **Million** als Zahl darzustellen, muss man die Ziffer 1 und dann 6-mal die Ziffer 0 schreiben: 1 000 000

Für eine **Milliarde** benötigt man bereits etwas mehr Platz, da nach der Ziffer 1 9-mal die Ziffer 0 kommt: 1 000 000 000

Irgendwann wird die Sache jedoch problematisch: Um ein **Googol** darzustellen, müsste man die Ziffer 1 und dann 100-mal die Ziffer 0 schreiben. Dazu wird meist der Platz zu knapp sein, sodass man hier in jedem Fall die Schreibweise 10^{100} bevorzugen wird.

Das Wort Googol wurde übrigens vom neunjährigen Neffen des amerikanischen Mathematikers **Edward KASNER** (*1955) vorgeschlagen.

3. Multiplizieren von Klammerausdrücken

Für die Berechnung des Ausdrucks $3(5+7)$ gibt es folgende Möglichkeiten:

(1) $3(5+7)=3\cdot 12=\mathbf{36}$

(2) $3(5+7)=3\cdot 5+3\cdot 7=15+21=\mathbf{36}$

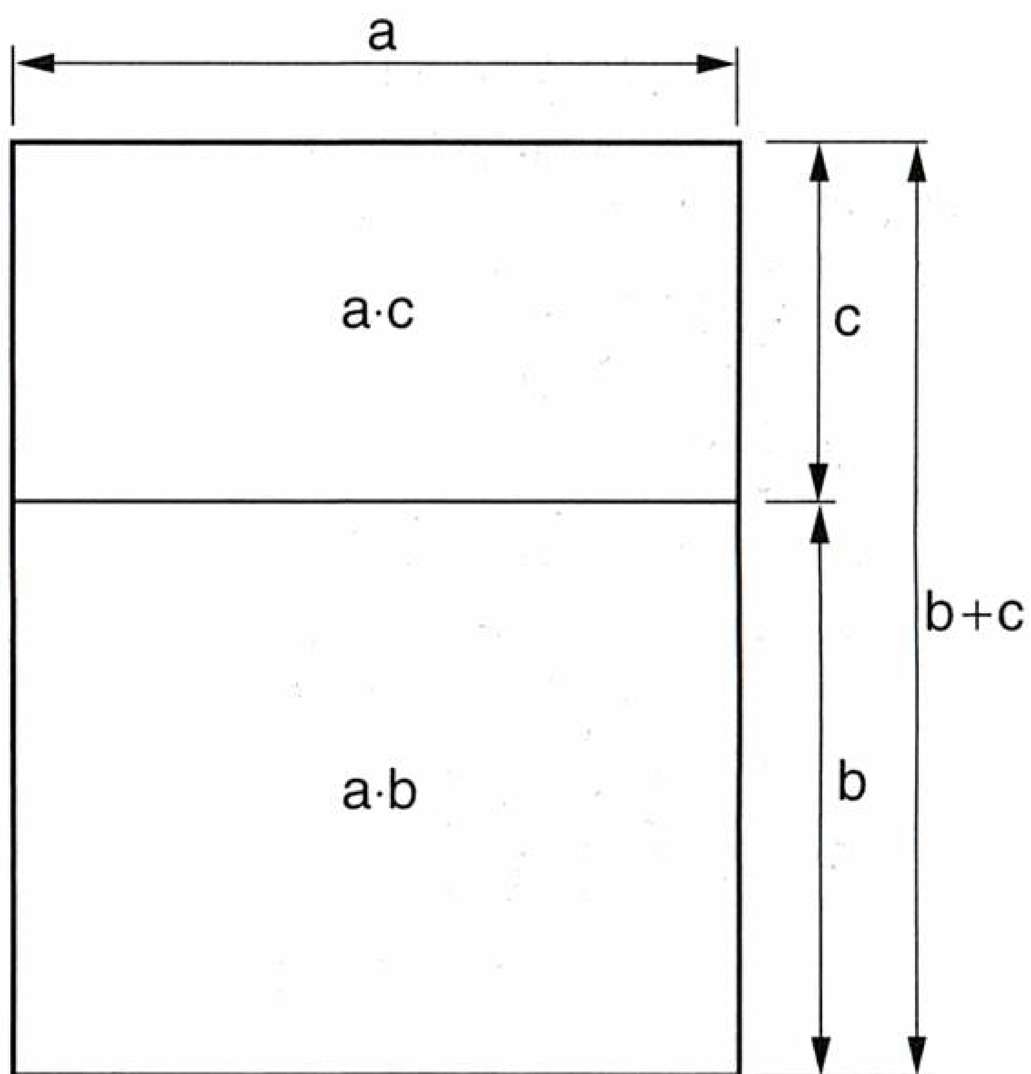
Bei **(2)** wurde das Distributivgesetz verwendet: $a(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Wie könnte man das Distributivgesetz in Worten ausdrücken?

Überlegen wir: Es wird die Summe $b+c$ mit der Zahl a multipliziert. Wie geschieht das? Man multipliziert jeden Summanden mit der Zahl a. Die erhaltenen Produkte werden addiert. In der Außenspalte wurde der Sachverhalt kurz und prägnant formuliert.

Eine Summe wird mit einer Zahl multipliziert, indem man jeden Summanden mit der Zahl multipliziert und die so erhaltenen Produkte addiert.

Geometrische Veranschaulichung:



Beispiel:

Man berechne **a)** $(-5x^3y)(2xy-1)$ **b)** $(9x^5-3y^2+7)\cdot 3y^3$ **c)** $4a-2(a-b)$

Lösung:

a) $(-5x^3y)(2xy-1)=\mathbf{-10x^4y^2+5x^3y}$

b) $(9x^5-3y^2+7)\cdot 3y^3=\mathbf{27x^5y^3-9y^5+21y^3}$

(Das Distributivgesetz gilt entsprechend, wenn die Summe aus mehr als zwei Summanden besteht.)

c) $4a-2(a-b)=4a-2a+2b=\mathbf{2a+2b}$

Die mehrfache Anwendung des Distributivgesetzes liefert das Gesetz für die Multiplikation zweier Summen:

$(a+b)x=ax+bx$ Wir setzen $x=(c+d)$ und erhalten

$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$

Zwei Summen werden miteinander multipliziert, indem man jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der anderen Summe multipliziert und die entstehenden Produkte addiert.

Beispiel:

Man berechne **a)** $(3x+1)(2x-4)$ **b)** $(2a+3b-1)(2a-3b+2)$ **c)** $(45-48)(18+12)$

Lösung:

a) $(3x+1)(2x-4)=6x^2+2x-12x-4=\mathbf{6x^2-10x-4}$

b) $(2a+3b-1)(2a-3b+2)=$

$=4a^2+6ab-2a-6ab-9b^2+3b+4a+6b-2=$

$=\mathbf{4a^2+2a-9b^2+9b-2}$

Übersichtlicher ausgeführt:

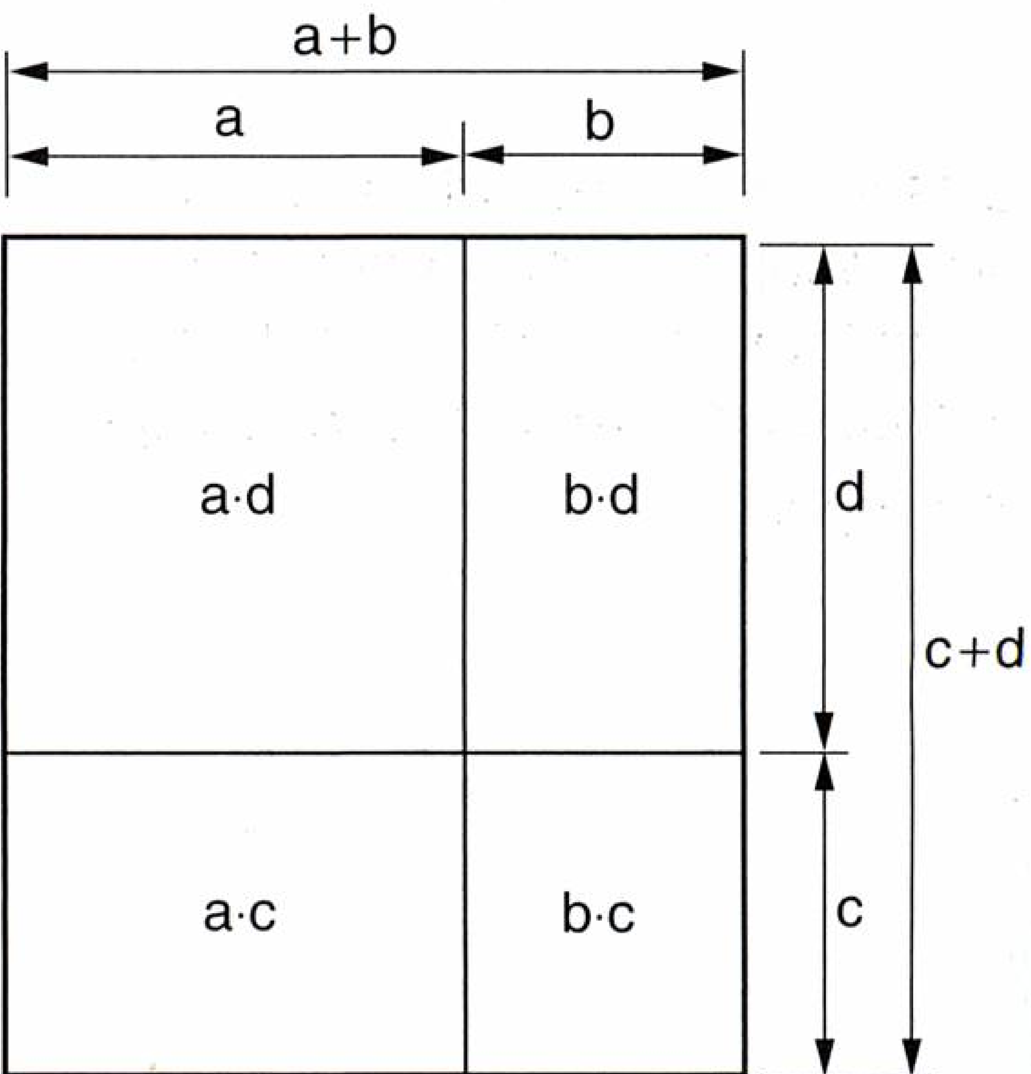
$(2a+3b-1)(2a-3b+2)$

$4a^2+6ab-2a$	Multiplikation mit 2a
$-6ab\quad -9b^2+3b$	Multiplikation mit $(-3b)$
$4a\quad +6b-2$	Multiplikation mit 2
$4a^2\quad +2a-9b^2+9b-2$	

c) $(45-48)(18+12)=(-3)(30)=\mathbf{-90}$

Wenn in den Summen keine Variablen auftreten, multipliziert man **nicht** gliedweise aus. Vielmehr wird vor der Multiplikation zusammengefasst. Man beachte diesen wichtigen Hinweis bei der Ausführung der Probe!

Geometrische Veranschaulichung:



Beispiel:

Es ist **a)** $(3x+4)\cdot 5x-7$ **b)** $(3x+4)(5x-7)$ zu berechnen.

Lösung:

a) $(3x+4)\cdot 5x-7=\mathbf{15x^2+20x-7}$

b) $(3x+4)(5x-7)=15x^2+20x-21x-28=\mathbf{15x^2-x-28}$

Man beachte den Unterschied!

$(a+b)(c+d)\neq(a+b)c+d$

$$\begin{array}{l}(a+b)(a+b)\\ \hline a^2+\ ab\\ \quad +\ ab+b^2\\ \hline a^2+2ab+b^2\end{array}$$

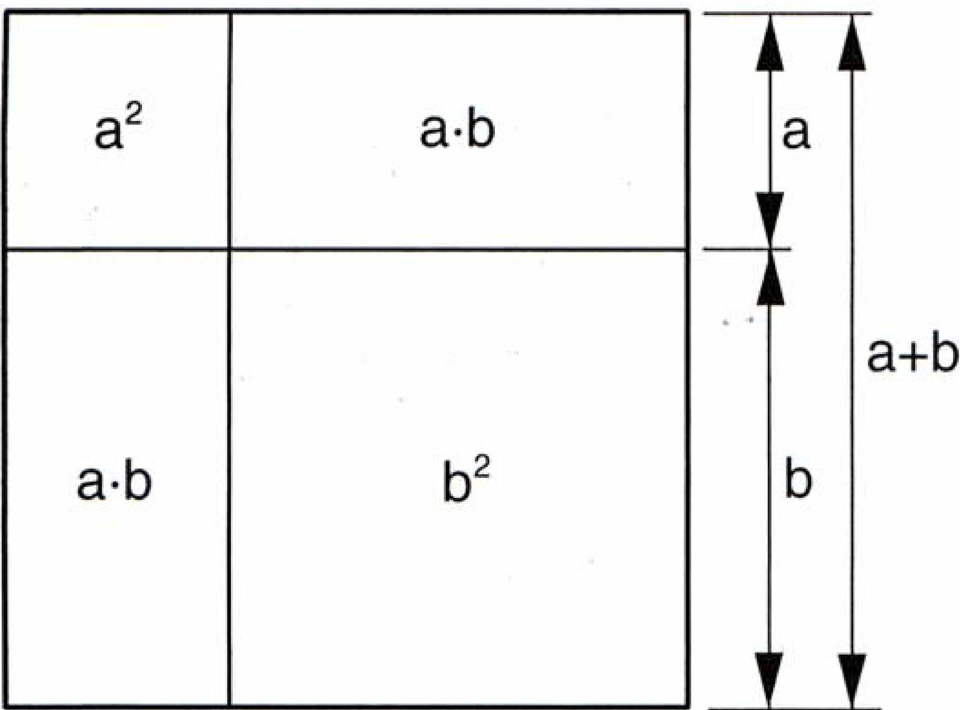
Wenn man $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$ ausmultipliziert, erhält man die Formel

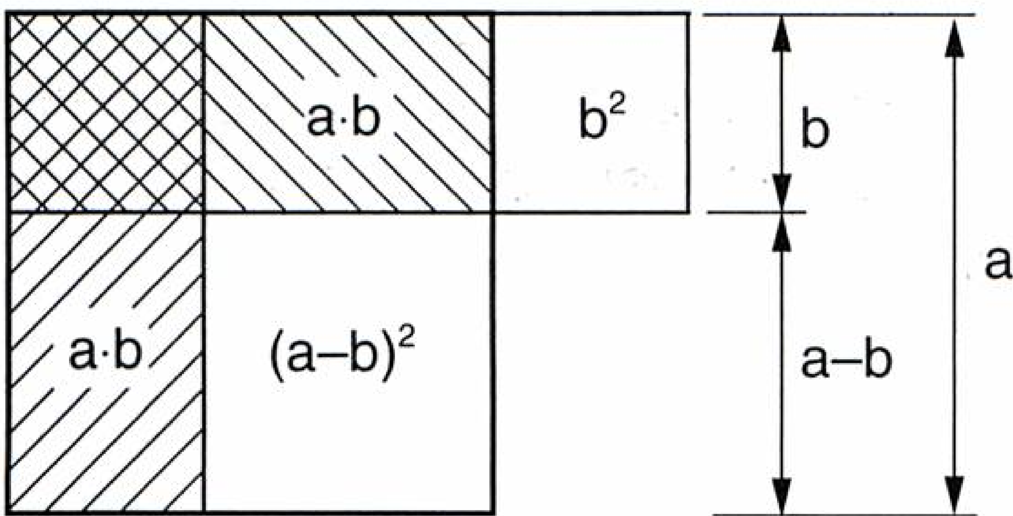
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Analog ergibt sich

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Geometrische Veranschaulichung:





Beispiel:

Man berechne **a)** $(2x+3y)^2$ **b)** $(5x^2-y)^2$ **c)** $(-4x+1)^2$

Lösung:

a) $(2x+3y)^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2=\mathbf{4x^2+12xy+9y^2}$

Man muss imstande sein, das Ergebnis sofort anzugeben, ohne die hier noch angeführte Zwischenrechnung anschreiben zu müssen.

b) $(5x^2-y)^2=\mathbf{25x^4-10x^2y+y^2}$

c) $(-4x+1)^2=\mathbf{16x^2-8x+1}$

Man beachte bei der Bildung von 2ab die Vorzeichen von a und b:

$a=-4x,\ b=1\Rightarrow 2ab=-8x.$

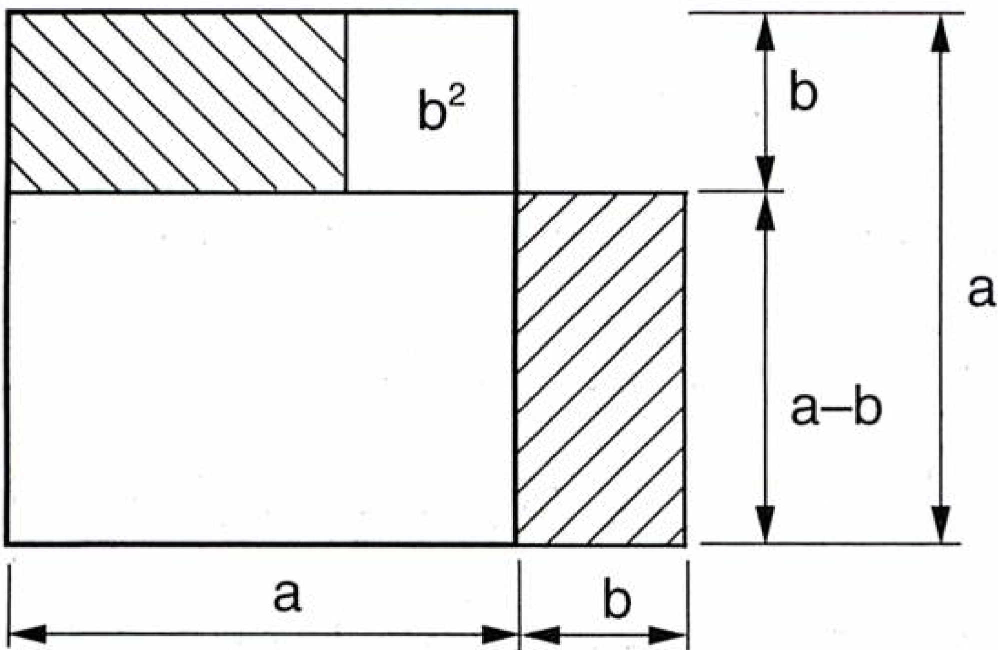
Was ergibt übrigens $(-a-b)^2=?$ Man überprüfe das Resultat durch Ausmultiplizieren von $(-a-b)(-a-b)$!

$$\begin{array}{l}(a+b)(a-b)\\ \hline a^2+ab\\ \quad -ab-b^2\\ \hline a^2\quad\ \ -b^2\end{array}$$

Wenn man $(a+b)(a-b)$ ausmultipliziert, erhält man die Formel

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Geometrische Veranschaulichung:



Beispiel:

Es ist **a)** $(5x+1)(5x-1)$ **b)** $(3x^2-y^4)(3x^2+y^4)$ **c)** $53\cdot 47$ zu berechnen.

Lösung:

a) $(5x+1)(5x-1)=(5x)^2-(1)^2=\mathbf{25x^2-1}$

b) $(3x^2-y^4)(3x^2+y^4)=\mathbf{9x^4-y^8}$

c) $53\cdot 47=(50+3)(50-3)=2500-9=\mathbf{2491}$

Die Formel $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ kann also manchmal auch bei gewöhnlichen Zahlenrechnungen vorteilhaft angewandt werden.

Wenn man $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$ ausmultipliziert, erhält man die Formel

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$(a+b)(a+b)(a+b) =$
$= (a+b)^2(a+b)$
$(a^2+2ab+b^2)(a+b)$
$a^3+2a^2b+ab^2$
$+a^2b+2ab^2+b^3$
$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Beispiel:
Man berechne **a)** $(2a+3b)^3$ **b)** $(4x^2-1)^3$ **c)** $(-5x-4)^3$.

Lösung:

a) $(2a+3b)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2 \cdot 3b + 3 \cdot 2a(3b)^2 + (3b)^3 =$
$= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$

b) $(4x^2-1)^3 = (4x^2)^3 + 3(4x^2)^2(-1) + 3(4x^2)(-1)^2 + (-1)^3 =$
$= 64x^6 - 48x^4 + 12x^2 - 1$

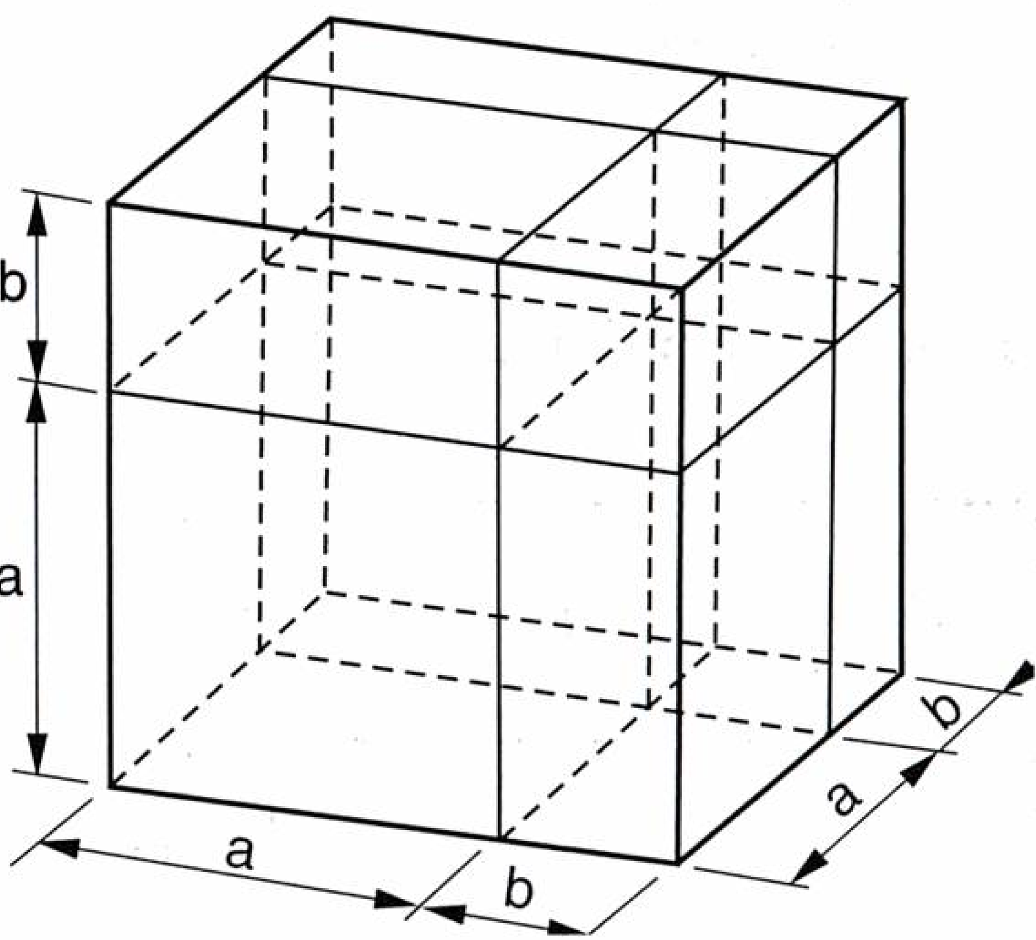
$a = 4x^2,\ b = -1$

c) $(-5x-4)^3 = (-5x)^3 + 3(-5x)^2(-4) + 3(-5x)(-4)^2 + (-4)^3 =$
$= -125x^3 - 300x^2 - 240x - 64$

$a = -5x,\ b = -4$

Auch hier kann man — ähnlich wie beim Quadrieren von Binomen — mit ein wenig Übung das Ergebnis sofort angeben, ohne die bei diesem Beispiel noch angeführte Zwischenrechnung anschreiben zu müssen.

Geometrische Veranschaulichung:

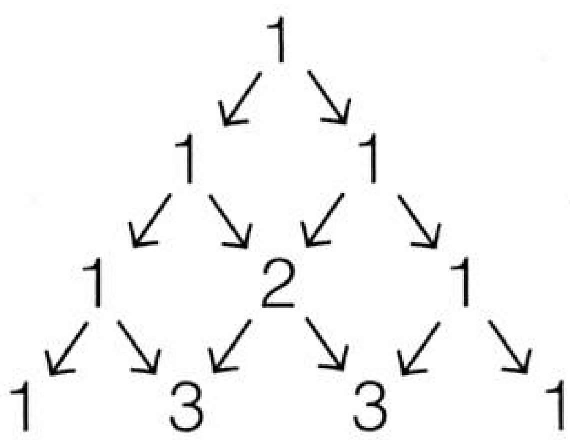


$\mathbf{(a+b)^3 \neq a^3 + b^3!}$

Wir schreiben die Potenzen von (a + b) der Reihe nach und beachten die Koeffizienten:

$(a+b)^0 = 1$
$(a+b)^1 = 1a + 1b$
$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

Die Koeffizienten der untereinander stehenden Terme werden jeweils aus den Koeffizienten des darüber stehenden Terms gebildet.



Das obige Schema heißt **„PASCALsches Dreieck"**. Es war schon im Alten China bekannt.

4. Faktorisieren

Will man beispielsweise $5(a+b)$ in eine Summe von Produkten verwandeln, ist das sehr einfach möglich: $5(a+b) = 5a+5b$

Will man umgekehrt aus der Summe $5a+5b$ ein Produkt bilden, geschieht das durch **„Herausheben"** des gemeinsamen Faktors: $5a+5b = 5(a+b)$. Damit ist also der Zustand vor Ausrechnung der Klammern wiederhergestellt. Es ist ein Produkt entstanden, das aus den beiden Faktoren 5 und a + b besteht. Die Aufgabe, aus einer Summe ein Produkt zu machen, nennt man **Faktorisieren**.

Wichtige Formeln:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$[1]

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$[2]

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$[2]

[1]) a^2+b^2 ist im Reellen nicht weiter zerlegbar, a^2-b^2 hingegen schon.

[2]) Man überprüfe die Richtigkeit durch Ausmultiplizieren.



Blaise PASCAL (1623–1662) zählte zu den sogenannten „Wunderkindern“ in der Mathematik. Als sein Vater das mathematische Talent erkannte durfte der junge Blaise im Alter von 13 Jahren den regelmäßigen Gelehrtentreffen beiwohnen. In einem Briefwechsel mit dem französischen Mathematiker Pierre de FERMAT (1601–1655) wurden aus dem Problem, die Gewinnverteilung für ein vorzeitig abgebrochenes Würfelspiel zu berechnen, die Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelt. Um seinem Vater bei dessen umfangreichen Aufgaben zu helfen, erfand PASCAL eine mechanische Rechenmaschine. Stets sehr krank und von Schmerzen gequält hat sich PASCAL ab seinem 23. Lebensjahr den Janseniten, einem neuen Glauben, dem „Mysterium Jesu“ zugewandt. Den Rest seines Lebens verbrachte er mit der Vertiefung in religiös-philosophische Überlegungen.

Faktorisieren

① durch Herausheben
$ax + bx = x(a+b)$

② wenn ein **Binom** nach der Formel
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
zerlegt werden kann.

③ wenn ein **Trinom** nach der Formel
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ bzw.
$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
zerlegt werden kann.

④ wenn ein **Polynom** nach der Formel
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$
bzw.
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$
zerlegt weden kann.

Beispiel:

Die folgenden Terme sind in Produkte zu verwandeln:
a) $5x - 10y$ **b)** $17k - 17$ **c)** $8a^5 - 16a^6$ **d)** $6x^2y + 8x^2y^2 - 12x^2y^3$

Lösung:

a) $5x - 10y = 5x - 5 \cdot 2y = \mathbf{5}(\mathbf{x - 2y})$

b) $17k - 17 = 17k - 17 \cdot 1 = \mathbf{17}(\mathbf{k-1})$

c) $8a^5 - 16a^6 = 8a^5 \cdot 1 - 8a^5 \cdot 2a = \mathbf{8a^5}(\mathbf{1-2a})$

d) $6x^2y + 8x^2y^2 - 12x^2y^3 = 2x^2y \cdot 3 + 2x^2y \cdot 4y - 2x^2y \cdot 6y^2 =$
$= \mathbf{2x^2y}(\mathbf{3 + 4y - 6y^2})$

Bei der numerischen[1] Berechnung von Ausdrücken, die gemeinsame Faktoren enthalten, wird man gleichfalls faktorisieren. Beispielsweise wird man bei der Aufgabe $4{,}2 \cdot 7{,}1 + 1{,}8 \cdot 7{,}1 + 4 \cdot 7{,}1 = ?$ den gemeinsamen Faktor 7,1 herausheben: $7{,}1(4{,}2 + 1{,}8 + 4) = 7{,}1 \cdot 10 = 71$

Beispiel:

Man verwandle in Produkte: **a)** $4x^2 + 12xy + 9y^2$
b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ **c)** $x^2 - 9y^2$ **d)** $16x^2 - 49y^4$

Lösung:

Hier gibt es keine gemeinsamen Faktoren. Man kann also nicht durch Herausheben (①) faktorisieren. Überlegen wir, ob es andere Methoden gibt, um eine Summe in ein Produkt zu verwandeln.

a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$ bildet ein vollständiges Quadrat der Form
$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \quad a^2 = 4x^2 \Leftrightarrow a = 2x; \quad b^2 = 9y^2 \Leftrightarrow b = 3y$
$4x^2 + 12xy + 9y^2 = \mathbf{(2x + 3y)^2}$ ③

Hinweis: Aus einer Variablen wird die Quadratwurzel gezogen, indem man ihren Exponenten durch zwei dividiert!

b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ bildet einen vollständigen Kubus der Form
$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3 \quad a^3 = x^3 \Leftrightarrow a = x, \; b^3 = 1 \Leftrightarrow b = 1$
$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = \mathbf{(x-1)^3}$ ④

Hinweis: Aus einer Variablen wird die dritte Wurzel gezogen, indem man ihren Exponenten durch drei dividiert!

c) $x^2 - 9y^2$ ist ein Binom, das aus der Differenz zweier Quadrate
$\uparrow \quad \uparrow$ besteht:
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \quad a^2 = x^2 \Leftrightarrow a = x$
$b^2 = 9y^2 \Leftrightarrow b = 3y$
$x^2 - 9y^2 = \mathbf{(x+3y)(x-3y)}$ ②

d) $16x^2 - 49y^4$ lässt sich zerlegen nach der Formel
$\uparrow \quad \uparrow$
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \quad a^2 = 16x^2 \Leftrightarrow a = 4x$
$b^2 = 49y^4 \Leftrightarrow b = 7y^2$
$16x^2 - 49y^4 = \mathbf{(4x + 7y^2)(4x - 7y^2)}$ ②

[1]) zahlenmäßigen

5. Erweitern und Kürzen von Bruchtermen

Wir wissen bereits, wie man einen Bruch erweitert und kürzt. Wenn nun in einem Bruch Variable auftreten (Man spricht dann von **Bruchtermen**.), so gelten die bisherigen Rechenregeln für das Erweitern und Kürzen in völlig gleicher Weise.

Der Wert eines Bruchterms ändert sich nicht, wenn man Zähler und Nenner mit dem selben Term ($\neq 0$) multipliziert oder durch den selben Term ($\neq 0$) dividiert.

Beispiel: [1]

a) Es ist $\frac{x}{x-2}$ mit $5x-1$ zu erweitern.

b) Man erweitere $\frac{(3x-2y)}{(3x+2y)}$ in der Art, dass der neue Nenner den Wert $9x^2-4y^2$ hat.

c) Es ist $\frac{3x-3}{5x-5}$ so weit wie möglich zu kürzen.

d) Man kürze $\frac{x^2-y^2}{x+y}$ so weit wie möglich.

e) Man kürze $\frac{a^2-x^2}{(x-a)^2}$ so weit wie möglich.

Lösung:

a) $\frac{x(5x-1)}{(x-2)(5x-1)} = \frac{5x^2-x}{5x^2-11x+2}$

b) Das Resultat soll die Form $\frac{?}{9x^2-4y^2}$ haben, wobei $9x^2-4y^2=(3x+2y)(3x-2y)$

Es ist $\frac{3x-2y}{3x+2y}$ mit $(3x-2y)$ zu erweitern $\frac{(3x-2y)(3x-2y)}{(3x+2y)(3x-2y)} = \frac{9x^2-12xy+4y^2}{9x^2-4y^2}$

c) Wir versuchen Zähler und Nenner in Produkte zu verwandeln: $\frac{3x-3}{5x-5} = \frac{3(x-1)}{5(x-1)} = \frac{3}{5}$

Bemerkung: Während der gegebene Bruchterm für $x=1$ nicht definiert ist, ist $\frac{3}{5}$ nicht mehr von x abhängig.

d) $\frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)} = x-y$

e) $\frac{a^2-x^2}{(x-a)^2} = \frac{(a+x)(a-x)}{(a-x)^2} = \frac{a+x}{a-x}$

Man beachte: $(x-a)^2=(a-x)^2$
$(x-a)^3 \neq (a-x)^3$

Die folgenden Bruchterme kann man nicht kürzen, weil Zähler und Nenner keine gemeinsamen Faktoren enthalten: $\frac{a+b}{ab}$, $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$, $\frac{9-16x}{3-4x}$, $\frac{a+b}{a-b}$

Wichtiger Hinweis: Vor dem Kürzen zerlegt man Zähler und Nenner, so weit dies möglich ist, in Produkte. Nur jene **Faktoren** (nicht Summanden), die **Zähler und Nenner gemeinsam haben**, kann man kürzen.

---

1) Man überlege jeweils selbstständig, welche Werte die auftretenden Variablen **nicht** annehmen dürfen.

6. Addition und Subtraktion von Bruchtermen

Um Bruchterme auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen, brauchen wir das kgV ebenso wie bei Brüchen aus Zahlen. Wie bestimmt man das kgV von Termen?

Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)

Wir überlegen: Für die Berechnung des kgV von mehreren Zahlen werden alle Zahlen — so weit wie möglich — in Faktoren zerlegt. Das kgV ergibt sich als Produkt der höchsten auftretenden Potenzen aller vorkommenden, nicht weiter zerlegbaren Faktoren.

Beispiel:

Man ermittle **a)** $kgV(44xyz^3,\ 36x^2y^4z)$ **b)** $kgV[(x+2)^3,\ x^2-4,\ x^2-4x+4]$.

Lösung:

a) $44xyz^3 = 2^2 \cdot \underline{11} \cdot xy\underline{z}^3$

$36x^2y^4z = 2^2 \cdot \underline{3^2} \cdot \underline{x^2y^4}z$

$kgV(44xyz^3,\ 36x^2y^4z) =$

$= 2^2 \cdot 11 \cdot z^3 \cdot 3^2 \cdot x^2y^4 = 396x^2y^4z^3$

44	2	36	2
22	2	18	2
11	11	9	3
1	1	3	3
		1	

b) $(x+2)^3 = \underline{(x+2)^3}$

$x^2-4 = (x+2)(x-2)$

$x^2-4x+4 = \underline{(x-2)^2}$

$kgV[(x+2)^3,\ x^2-4,\ x^2-4x+4] =$

$= (x+2)^3(x-2)^2$

Beispiel:

a) $\frac{3a}{x-1} + \frac{2a}{x-1} + \frac{a}{x-1} - \frac{6a}{x-1} = ?$

b) $\frac{4x-3y}{x-2y} - \frac{4(3x+y)}{x-2y} + \frac{2(7x-y)}{x-2y} - \frac{5x-7y}{x-2y} = ?$

Addition und Subtraktion von gleichnamigen Bruchtermen

> Gleichnamige Bruchterme werden addiert (bzw. subtrahiert), indem man die Summe (bzw. Differenz) der Terme im Zähler durch den gemeinsamen Nenner dividiert.

Lösung:

a) $\frac{3a}{x-1} + \frac{2a}{x-1} + \frac{a}{x-1} - \frac{6a}{x-1} = \frac{3a + 2a + a - 6a}{x-1} = \frac{0}{x-1} = 0$

b) $\frac{4x-3y}{x-2y} - \frac{4(3x+y)}{x-2y} + \frac{2(7x-y)}{x-2y} - \frac{5x-7y}{x-2y} =$

$= \frac{(4x-3y) - 4(3x+y) + 2(7x-y) - (5x-7y)}{x-2y} =$

$= \frac{4x - 3y - 12x - 4y + 14x - 2y - 5x + 7y}{x-2y} = \frac{x-2y}{x-2y} = 1$

Wichtiger Hinweis: Der Bruchstrich ersetzt eine Klammer! Es sind also die Regeln für das Auflösen von Klammern zu beachten. Nochmals: Verliert ein Bruchstrich zu Gunsten eines gemeinsamen Bruchstriches seine Eigenständigkeit, so sind — wie das im Beispiel beim Binom $5x-7y$ geschehen ist — entsprechende Klammern zu setzen.
Die Nichtbeachtung dieser Tatsache ist ein sehr häufiger Schülerfehler.

Aus dem Hausübungsheft eines Schülers:

$\frac{x-y}{x} - \frac{y-x}{x} = ?$

$\frac{x-y}{x} - \frac{y-x}{x} = \frac{x - y - y - x}{x} = -\frac{2y}{x}$

Hier wurde nicht berücksichtigt, dass der Bruchstrich eine Klammer ersetzt.

Addition und Subtraktion von ungleichnamigen Bruchtermen

Ungleichnamige Bruchterme müssen vor dem Addieren (bzw. Subtrahieren) gleichnamig gemacht werden. Dies geschieht, indem man sie auf den Hauptnenner (= das kleinste gemeinsame Vielfache der einzelnen Nenner) erweitert.

Beispiel:

a) $5+\frac{5(x-7)}{7}=?$

b) $\frac{5x-1}{3}+\frac{9x+2}{4}-\frac{23x+1}{6}=?$

c) $\frac{5a+b}{5a-b}-\frac{20ab}{25a^2-b^2}-\frac{5a-b}{5a+b}=?$

d) $\frac{9x+5}{x^2-1}-\frac{7x+4}{x^2-x}-\frac{2(x-2)}{x^2+x}+1=?$

Lösung:

a) $5+\frac{5(x-7)}{7}=\frac{35+5x-35}{7}=\frac{5x}{7}$ (Hauptnenner HN: 7)

b)

Faktorisierung der Nenner:	Erweiterungsfaktor:	Erweiterter Zähler:
$3=\underline{3}$	4	$4(5x-1)=20x-4$
$4=2\cdot 2=\underline{2^2}$	3	$3(9x+2)=27x+6$
$6=2\cdot 3$	2	$2(23x+1)=46x+2$

HN: $2^2\cdot 3=\underline{12}$

$$\frac{(20x-4)+(27x+6)-(46x+2)}{12}=\frac{20x-4+27x+6-46x-2}{12}=\frac{x}{12}$$

c)

Faktorisierung der Nenner:	Erweiterungsfaktor:	Erweiterter Zähler:
$5a-b=\underline{5a-b}$	$5a+b$	$(5a+b)(5a+b)$
$25a^2-b^2=\underline{(5a+b)}(5a-b)$	1	$20ab$
$5a+b=5a+b$	$5a-b$	$(5a-b)(5a-b)$

HN: $\underline{(5a+b)(5a-b)}$

$$\frac{(5a+b)^2-20ab-(5a-b)^2}{(5a+b)(5a-b)}=$$

$$=\frac{(25a^2+10ab+b^2)-20ab-(25a^2-10ab+b^2)}{(5a+b)(5a-b)}=$$

$$=\frac{25a^2+10ab+b^2-20ab-25a^2+10ab-b^2}{25a^2-b^2}=\frac{0}{25a^2-b^2}=0$$

d)

Faktorisierung der Nenner:	Erweiterungsfaktor:	Erweiterter Zähler:
$x^2-1=\underline{(x+1)(x-1)}$	x	$x(9x+5)=9x^2+5x$
$x^2-x=\underline{x}(x-1)$	$x+1$	$(x+1)(7x+4)=$ $=7x^2+11x+4$
$x^2+x=x(x+1)$	$x-1$	$(x-1)\cdot 2(x-2)=$ $=2x^2-6x+4$
$1=1$	$x(x+1)(x-1)$	$x(x+1)(x-1)=x^3-x$

HN: $\underline{x(x+1)(x-1)}$

$$\frac{(9x^2+5x)-(7x^2+11x+4)-(2x^2-6x+4)+(x^3-x)}{x(x+1)(x-1)}=$$

$$=\frac{9x^2+5x-7x^2-11x-4-2x^2+6x-4+x^3-x}{x^3-x}=\frac{x^3-x-8}{x^3-x}$$

7. Multiplikation und Division von Bruchtermen

Multiplikation von Bruchtermen

Bruchterme werden multipliziert, indem man das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividiert.

Beispiel:

a) $\frac{5x}{7} \cdot \frac{14}{x} = ?$ **b)** $\frac{5a+5b}{9x-9y} \cdot \frac{9}{5} = ?$

c) $\frac{3x+4y}{9a^2-b^2} \cdot \frac{3a-b}{9x^2-16y^2} = ?$ **d)** $\frac{5}{35x-25y}(49x^2-70xy+25y^2) = ?$

Lösung:

a) $\frac{5x}{7} \cdot \frac{14}{x} = \frac{5\cancel{x} \cdot \cancel{14}^{2}}{\cancel{7}\cancel{x}} = 10$ **b)** $\frac{5a+5b}{9x-9y} \cdot \frac{9}{5} = \frac{5(a+b) \cdot 9}{9(x-y) \cdot 5} = \frac{a+b}{x-y}$

c) $\frac{3x+4y}{9a^2-b^2} \cdot \frac{3a-b}{9x^2-16y^2} = \frac{(3x+4y)(3a-b)}{(3a+b)(3a-b)(3x+4y)(3x-4y)} =$

$= \frac{1}{(3a+b)(3x-4y)} = \frac{1}{9ax+3bx-12ay-4by}$

d) $\frac{5}{35x-25y}\underbrace{(49x^2-70xy+25y^2)}_{(7x-5y)^2} = \frac{5(7x-5y)^2}{5(7x-5y)} = 7x-5y$

Wie die Lösung zeigt, ist es keineswegs günstig, die Zähler und Nenner sofort auszumultiplizieren. Man wird immer versuchen, **vor** der Ausrechnung zu kürzen.

Betrachten wir die Terme $\frac{a+b}{a-b}$ und $\frac{a-b}{a+b}$. Die Terme sind zueinander **reziprok**. Weitere Beispiele für reziproke Terme: $\frac{3x^2+7}{5x^2+4}$ und $\frac{5x^2+4}{3x^2+7}$, $\frac{m}{n}$ und $\frac{n}{m}$, $\frac{1}{a^3+b^3}$ und ? usw. Was kann man über das Produkt reziproker Terme aussagen?

Division von Bruchtermen

Man dividiert durch einen Bruchterm, indem man mit seinem reziproken Term multipliziert.

Beispiel:

a) $v : \frac{v}{w} = ?$ **b)** $\frac{5x^2y}{9a^2b^2} : \frac{5xy}{3a^2b} = ?$

c) $\frac{25x^2-9y^2}{16a^2-9b^2} : \frac{5x+3y}{4a-3b} = ?$ **d)** $\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) : \frac{1}{x^2-1} = ?$

Lösung:

a) $v : \frac{v}{w} = \frac{v}{1} : \frac{v}{w} = \frac{v}{1} \cdot \frac{w}{v} = \frac{vw}{v} = w$

b) $\frac{5x^2y}{9a^2b^2} : \frac{5xy}{3a^2b} = \frac{5x^2y}{9a^2b^2} \cdot \frac{3a^2b}{5xy} = \frac{x}{3b}$

c) $\frac{25x^2-9y^2}{16a^2-9b^2} : \frac{5x+3y}{4a-3b} = \frac{25x^2-9y^2}{16a^2-9b^2} \cdot \frac{4a-3b}{5x+3y} =$

$= \frac{(5x+3y)(5x-3y)(4a-3b)}{(4a+3b)(4a-3b)(5x+3y)} = \frac{5x-3y}{4a+3b}$

d) $\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) : \frac{1}{x^2-1} = \left(\frac{x+1+x-1}{(x-1)(x+1)}\right) \cdot (x^2-1) = \frac{2x}{x^2-1}(x^2-1) = 2x$

8. Doppelbruchterme

Beispiele für Doppelbruchterme: $\frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{7}}$, $\frac{\frac{7x^2}{x}}{\frac{x-1}{x+1}}$, $\frac{1}{\frac{a}{b}}$ usw.

Definition:
Bruchterme, deren Zähler oder Nenner (mindestens) einen Bruchterm enthalten, werden **Doppelbruchterme** genannt.

Jener Bruchstrich, der durch Länge und Strichdicke besonders hervor gehoben wird, heißt **Hauptbruchstrich**.

Den Hauptbruchstrich kann man als eine andere Form des Divisionszeichens betrachten und deshalb einen Doppelbruch auf die Division zweier Bruchterme zurückführen:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Wenn man a, d als **Außenglieder** und b, c als **Innenglieder** bezeichnet, gilt:

Ein Doppelbruchterm wird aufgelöst (d. h. in einen einfachen Bruchterm verwandelt), indem man das Produkt der Außenglieder in den Zähler und das Produkt der Innenglieder in den Nenner schreibt.

Ein Doppelbruch wird gekürzt, indem man Außenglied gegen Innenglied kürzt.

Beispiel:

$$\frac{\frac{7x+y}{2} + \frac{2(x-y)}{3}}{\frac{4(2x+y)}{9} + \frac{x-y}{2}} : \frac{\frac{5x+y}{3x-y} - \frac{5x-y}{3x+y}}{\frac{16xy}{3}} = ?$$

Lösung:
Zunächst wird jeweils auf gemeinsamen Nenner gebracht!

$$\frac{\frac{21x+3y+4x-4y}{6}}{\frac{16x+8y+9x-9y}{18}} : \frac{\frac{15x^2+8xy+y^2-15x^2+8xy-y^2}{(3x-y)(3x+y)}}{\frac{16xy}{3}} =$$

$$= \frac{\frac{25x-y}{6}}{\frac{25x-y}{18}} : \frac{\frac{16xy}{9x^2-y^2}}{\frac{16xy}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} : \frac{\frac{1}{9x^2-y^2}}{\frac{1}{3}} = 3 : \frac{3}{9x^2-y^2} = 3 \cdot \frac{9x^2-y^2}{3} = 9x^2-y^2$$

AUFGABEN

Bei den Aufgaben **175.** bis **177.** ist — bei gegebener Grundmenge — die Definitionsmenge D des Terms für die Variable x zu ermitteln!

175. $T = \frac{x+2}{x-3}$ **a)** $G_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ **b)** $G_2 = \{3\}$ **c)** $G_3 = \{-5, -6, 0\}$

176. $T = \frac{5x-1}{x(x+1)}$ **a)** $G_1 = \{-1, 0\}$ **b)** $G_2 = \{-3, -2, -1\}$ **c)** $G_3 = \{26, 27\}$

177. $T = \frac{4(8x-3)}{x^2(2x-3)(x+2)}$ **a)** $G_1 = \{0, -2, \frac{3}{4}, 4\}$ **b)** $G_2 = \{-4, 3, -2\}$ **c)** $G_3 = \{1, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{3}{2}\}$

178. Man bestimme die Definitionsmenge D der folgenden Terme bezüglich der Grundmenge $\mathbb{Q}$:

a) $4y^2 - 6a + 1$ **b)** $5x^2 + 2x - \frac{x^3}{5}$ **c)** $\frac{5x+1}{5x-1}$

d) $\frac{9x+y}{x^3}$ **e)** $\frac{a^2+b^2}{a(a-7)}$ **f)** $\frac{x^2-5x+6}{x^4(x-1)(x+1)}$

179. Bei den folgenden Termen sind die Koeffizienten, Exponenten, Variablen anzugeben und außerdem anzuführen, ob es sich um ein Monom, Binom, Trinom oder Polynom handelt.

Term	Koeffizient	Exponent	Variable	Art des Terms
a) $3x^2+4y$	3, 4	1, 2	x, y	Trinom
b) $4a^5-3a^2$				
c) $z^5+z^4+z^3+z^2+z$				
d) $4m^2n-3mn^2$				
e) $\frac{2x}{3}$				
f) $3x-2y$				
g) $-\frac{1}{7}x^7y^3z^4$				
h) $\frac{x^3}{9}-\frac{3x^2}{4}+\frac{7x}{6}$				

180. Die folgenden Binome sind zu vereinfachen:

a) $5x+3y$ **b)** $6y-2y$ **c)** $3x^2+4x^2$ **d)** $5y^3-4y^3$

181. Die folgenden Trinome sind zu vereinfachen:

a) $6x+7y-4x$ **b)** $5x+9x-3x$ **c)** $6x^2-2x^2+9x^2$ **d)** $2x^3+x^3+x^3$

182. Die folgenden Polynome sind zu vereinfachen:

a) $6x^3-5y^2+5x^3-9y^2+11y^2$ **b)** $7x+7xy+7yx+7y-7x-7y$

c) $6a^2b+6ab^2-7a^2b+9ab^2-10a^2b+5ab^2$

d) $16u^2vw-15uv^2w+9uvw^2-7u^2vw+15uv^2w-8uvw^2$

183. Man berechne und führe die Probe für $x=4,\ y=1,\ z=-2,\ a=0,\ b=-1,\ c=2$ aus:

a)
$$\begin{array}{r} 3x+2y-7z \\ 2x-5y-3z \\ 4x-8y-9z \\ -5x+3y+12z \\ \hline \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 4a+3b-7c+5 \\ -3a-4b-5c-6 \\ 5a+2b+8c-11 \\ \hline \end{array}$$

184. Der fehlende Text ist einzusetzen:

a) ..... (Jede/Nicht jede) Aneinanderreihung mathematischer Zeichen ist ein Term.

b) Genau dann, wenn der Ausdruck aus Zahlen oder Variablen nach den Regeln der Termdefinition zusammengesetzt ist, handelt es sich um ..... (einen/keinen) Term.

c) Belegt man die Variablen eines Terms mit Elementen der Grundmenge, so muss ..... (immer/nicht immer) ein sinnvoller Ausdruck entstehen.

d) Belegt man die Variablen eines Terms mit Elementen der Definitionsmenge, so muss .... (immer/nicht immer) ein sinnvoller Ausdruck entstehen.

e) „Die Definitionsmenge ist eine Teilmenge der Grundmenge", behauptet Dieter. „Die Grundmenge ist eine Teilmenge der Definitionsmenge", sagt Heidi. Wer hat recht? Oder sind beide Aussagen falsch?

f) Wenn in einem Term zwei Variable mit $x \in A$ und $y \in B$ auftreten, ist die Grundmenge $G = ...(A \cap B\ /\ A \setminus B\ /\ A \times B\ /\ A \cup B)$.

g) Die Zahl, die angibt, wie oft der Summand auftritt, heißt ..... (Monom/Koeffizient/Exponent).

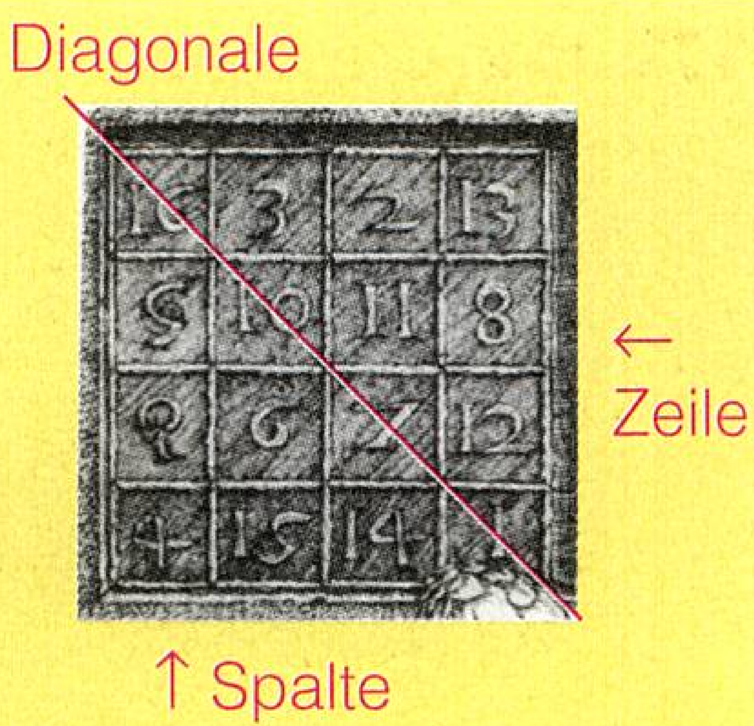
h) Der Ausdruck $a+b$ ist ein ..... (Monom/Binom/Trinom/Polynom).

185. Man bilde im nebenstehenden aus einer Zeichnung von **Albrecht DÜRER** (1471 – 1528) stammenden Quadrat **(1)** die Summe der Zahlen in jeder Zeile **(2)** die Summe der Zahlen in jeder Spalte **(3)** die Summe der Zahlen in jeder Diagonale.

Was kann man feststellen?

Man nennt ein derartiges Quadrat ein **„Magisches Quadrat" (Zauberquadrat)**.

Man vervollständige die nachstehenden Quadrate derart, dass magische Quadrate entstehen:



a)

$8a+2b$		
	$5a-b$	$7a+b$
		$2a-4b$

b)

$6M+28N$	$-M-11N$	$-6M+19N$	
$-8M-5N$		$-3M+10N$	
		$-4M-2N$	
		$2M+25N$	$-9M-17N$

186. a) $6x+5y-3x$ **b)** $4a-3b+12-(4a+3b)$

187. a) $9x-(5y+x)-y$ **b)** $5x-26-(4x-3)$

188. a) $7a-(-3b+2a)+10b$ **b)** $(5a+3b)+(6x-3b)$

189. a) $4m+7n-(-5m+8n-23)-23$ **b)** $7z-13-(18y+8z-13)+8y$

190. a) $62x-9y-(41x-11y)-(x-18y)$ **b)** $6x-[(3x+2y)+2x]-(8x+9y)$

191. a) $(3x-4y)-[5y+(7y-2x)-(8x-y)]$ **b)** $10x+[(7y-12x)-(5y+12x-13)]-13$

192. $5c+15b+6a-[3b-(8b+4a)-17a+12b-13c-(7a+2b-23c)]$

193. a) $-a-(-b)+\{-3a-[-7+(2a-3b)]\}$ **b)** $5x+7y-\{3z+[13x-(2y+7x)]-7z\}$

194. a) $5s+10t-\{-[-(8s+9t)]-7s+(-8t)\}$ **b)** $3u-4v-\{[5u-(3v+2u)-6v]+8u\}$

195. a) $2c-3d-\{-5c-[-(6c-7d)+c]-2d\}$ **b)**[1] $3a+7b-(-7a+13b-(-11a+12b+(13a-2b)))$

196.[1] $16m+(3n-(4m-3n-(16m-3n)))-(7n+3m)$

197. $8x-\{9y-[10z-(11x-12y)]-(13z-3x-y)\}$

198.[1] $-12a+((6b-(90a+12b))-(16b+80a))+(25a+10b)$

199. $3f-7g-\{-(3f-2g)-[(3g+8f)-2g]-[(7g-8f)+2g]\}$

200.[1] $4x-(5y+(3y-(8x-14y+21z)-(21y-27z)+23x)+10y)$

201. $5a-[(6b-7a)-(8a-9b)]-10b-\{10a+[(11a-12b)-(13b+22a)]\}$

202. $6a+\{4a-[-14b-(2a+4b)]-7b\}-\{7b+[9a-(11b+4a)]+6a\}-(7b-8a)$

[1]) Bei diesen Aufgaben werden nur runde Klammern verwendet, wie das z. B. in der Informatik üblich ist.

203. Man ordne den waagrecht stehenden Termen laut Angabe durch Ankreuzen die richtige Lösung zu:

Angabe / Lösung	$(pq^1)^k$ (1)	p^1 (2)	$\left(\frac{p}{q}\right)^k$ (3)	$p^k p^l$ (4)	$(p^k)^l$ (5)	$\frac{p^k}{p^l}$ (6)
a) p^{k+l}						
b) p^{k-l}						
c) $p^k q^k$						
d) p^{kl}						
e) $\frac{p^k}{q^k}$						
f) p						

204. a) 2^3 **b)** $(-2)^3$ **c)** 3^2 **d)** $(-3)^2$

205. a) $2+3\cdot 5^2$ **b)** $(2+3)\cdot 5^2$ **c)** $2+(3\cdot 5)^2$ **d)** $(2+3\cdot 5)^2$

206. a) $3+4\cdot 2^2$ **b)** $(3+4)\cdot 2^2$ **c)** $3+(4\cdot 2)^2$ **d)** $(3+4\cdot 2)^2$

207. Die Variable x der Polynome (1) $6x^2-5x+9x^3-16x^4+1$ (2) $8x^5-7x^4+6x^3-5x^2+4x-3$ (3) $6x^6+5x^5+4x^4+3x^3+2x^2+x+1$ ist mit **a)** 1 **b)** −1 **c)** 2 **d)** −2 **e)** 3 **f)** −3 zu belegen und der Wert des Ausdruckes zu berechnen.

208. a) $a^3\cdot a^5$ **b)** $b\cdot b^7$ **c)** $c^{10}\cdot c^2$ **d)** $d\cdot d\cdot d$

209. a) $a^{7-x}\cdot a^x$ **b)** $b^{5-n}\cdot b^{n-s}$ **c)** $c^x\cdot c^{-x+8}$ **d)** $d^x\cdot d^{x+1}\cdot d^{2-2x}$

210. a) $(a^5)a^3$ **b)** $b^5(-b)^3$ **c)** $(-c)^5(-c)^3$ **d)** $d^5(-d^2)(-d)^2$

211. a) $(x+y)^2(x+y)$ **b)** $(a-b)^3(a-b)^5$ **c)** $(x^2-y^2)(x^2-y^2)$ **d)** $(m^2+n)^3(m^2+n)^4$

212. a) $\frac{a^3}{a}$ **b)** $\frac{b}{b}$ **c)** $\frac{c^{15}}{c^7}$ **d)** $\frac{d\cdot d^4}{d^{10}}$

213. a) $a^{x+1}:a^x$ **b)** $b^7:b^{10}$ **c)** $a^{5-x}:a^{-x+5}$ **d)** $d^{-a+1}:d^{-a}$

214. a) $\frac{a^6}{6}$ **b)** $\frac{b^{x+3}}{b^{7+x}}$ **c)** $\frac{c^{6-x}}{c^{-x-9}}$ **d)** $\frac{d^{5+x}\cdot d^{9-2x}}{d^{-x+14}}$

215. a) $(a+b)^5:(a+b)$ **b)** $(x-y):(x-y)$ **c)** $\frac{(a+b)^4(x-y)}{(x-y)^3(a+b)^2}$ **d)** $\frac{(a-b)^3(x+y)^4}{(x+y)^2(a-b)^5}$

216. Folgende Potenzen sind als Produkte zu schreiben:

a) a^2 **b)** b^{x+1} **c)** c^{x+y} **d)** d^{a+b+1}

217. a) $(2^3)^2$ **b)** $(2^2)^3$ **c)** $2^{(2^3)}$ **d)** $(3^2)^2$

218. a) $(a^3)^5$ **b)** $(-b^5)^3$ **c)** $[(-c)^3]^5$ **d)** $[(-d)^5]^3$

219. a) $(-a^3)^2$ **b)** $(-b^2)^3$ **c)** $[(-c)^2]^3$ **d)** $[(-d)^3]^2$

220. a) $2^3\cdot 5^3$ **b)** $8^2\cdot 125^2$ **c)** $(-x)^2x^2$ **d)** $(-x)^4(-y)^4$

221. a) $(xy)^2$ **b)** $(x^2y^3)^5$ **c)** $(-2x)^2$ **d)** $(5y^3)^3$

222. a) $\left(\frac{x}{y}\right)^3$ **b)** $\left(\frac{2x}{y^2}\right)^5$ **c)** $\left(-\frac{3xy^5}{5z}\right)^3$ **d)** $\left(-\frac{5x^2y}{ab^4}\right)^3$

223. a) $x^6\left(\frac{1}{x^2}\right)^3$ **b)** $\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^2\left(\frac{y}{x}\right)^4$ **c)** $\left(\frac{3x}{2y}\right)^3:\left(\frac{5x}{4y}\right)^4$ **d)** $\left(\frac{6x^2}{5y^9}\right)^2:\left(\frac{9x^3}{y^6}\right)^3$

224. a) $\left[\left(-\frac{3x^3}{y^4}\right)^3\left(\frac{4y^4}{5x^2}\right)^2\right]:\left(\frac{6y^3}{5x}\right)^2$ **b)** $\left[\left(\frac{4x^4}{3y^2}\right)^2\left(\frac{2x^3}{5y}\right)^3\right]:\left[-\left(\frac{8x^4}{15y^2}\right)^2\right]$

225. a) $\left[\left(-\frac{2x^3}{y^2}\right)^3\left(\frac{3y^2}{4x^2}\right)^4\right]:\left(\frac{3y^4}{4x}\right)^2$ **b)** $\left[\left(-\frac{5a^2x}{3b^2y}\right)^2:\left(-\frac{a^2x}{4b^3y^3}\right)^3\right]\left(\frac{b^2y}{4a^2x}\right)^3$

226. a) $\left[\left(\frac{2x^5}{3a^2}\right)^2\left(\frac{15a^2}{4x^3}\right)^3\right]:\left[-\left(\frac{x^3}{2a^2}\right)^3\right]$ **b)** $\left[\left(\frac{2mn^6}{m^3}\right)^4:\left(-\frac{4n^3}{5m}\right)^2\right]:\left(\frac{25m^2}{2n^3}\right)^2$

227. Der fehlende Text ist einzusetzen:

a) Potenzen mit gleicher Basis können ..... (addiert/subtrahiert/multipliziert/dividiert) werden, indem man die Basis mit der Summe der Exponenten potenziert. Beispiel: .....

b) Potenzen mit gleicher Basis können dividiert werden, indem man die Basis mit ..... (der Summe/der Differenz/dem Produkt/dem Quotienten) der Exponenten potenziert. Beispiel: .....

c) Potenzen können potenziert werden, indem man die Basis mit ..... (der Summe/der Differenz/dem Produkt/dem Quotienten) der Exponenten potenziert. Beispiel: .....

d) Ein Produkt kann potenziert werden, indem man jeden einzelnen Faktor ..... (multipliziert/addiert/potenziert) und die entstehenden Potenzen multipliziert. Beispiel: .....

e) Potenzen mit gleichen Exponenten können dadurch multipliziert werden, dass man das Produkt der ..... (Basen/Exponenten) mit ..... (der Basis/dem Exponenten) potenziert. Beispiel: .....

f) Potenzen mit gleichen Exponenten können dividert werden, indem man ..... (die Summe/die Differenz/das Produkt/den Quotienten) der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten ..... (multipliziert/addiert/potenziert). Beispiel: .....

g) Einen Bruch kann man potenzieren, indem man Zähler und Nenner für sich potenziert und die entstehenden Potenzen ..... (dividiert/miteinander multipliziert). Beispiel: .....

h) Beim Potenzieren einer Potenz dürfen die Hochzahlen ..... (miteinander/nicht miteinander) vertauscht werden. Beispiel: .....

Bei den Aufgaben **228**. bis **247**. sind die gegebenen Terme bzw. die Ergebnisse mit positiven Exponenten darzustellen:

228. a) a^{-2} **b)** x^{-1} **c)** $3a^{-3}$ **d)** $5b^{-1}$

229. a) a^2b^{-2} **b)** $b^{-1}c^3$ **c)** $4x^{-4}y^3$ **d)** $6^{-1}x^{-1}y^2$

230. a) $(a+b)^{-1}$ **b)** $3^{-2}(x+y)^2$ **c)** $2^{-2}(x+y)^{-3}$ **d)** $x^{-1}+y^{-1}$

231. a) $\frac{1}{a^{-2}}$ **b)** $\frac{2}{b^{-1}}$ **c)** $\frac{4^{-1}}{x}$ **d)** $\frac{x^{-2}}{y^{-3}}$

232. a) $\frac{5x^0}{4y^{-1}}$ **b)** $\frac{2x^{-2}}{4^{-1}y^3}$ **c)** $\frac{7a^{-b}}{b^{-a}}$ $(a, b \in \mathbb{N}^*)$ **d)** $\frac{(x+y)^{-3}}{x^{-4}}$

233. a) x^3x^{-2} **b)** a^0a^{-1} **c)** $b^{5-s}b^s$ $(s \in \mathbb{N}^*)$ **d)** $6x^4x^{-5}$

234. a) $\frac{x^{-2}}{x^3}$ **b)** $a^{-2}:a^{-1}$ **c)** $\frac{b^{5-s}}{b^{-s}}$ $(s \in \mathbb{N}^*)$ **d)** $\frac{3x^4}{6x^{-3}}$

235. a) $6 \cdot \frac{1}{4x^{-2}}$ **b)** $ab \cdot \frac{25}{5a^{-1}b^{-1}}$ **c)** $\frac{16x^3y^3}{x^{-1}} \cdot 2^{-4}y^{-3}$ **d)** $25x^0 \frac{y^{-1}}{5x^{-1}} \cdot 5^{-1}y^2$

236. a) $\frac{x^3y^3z^4}{x^{-1}y^3z^{-4}}$ **b)** $\frac{a^{-3}b^{-2}c}{a^{-5}c^{-3}b^{-4}}$ **c)** $\frac{x^{-3}y^0z^2}{x^4y^{-3}z^{-2}}$ **d)** $\frac{144x^0y^{-3}z^{-6}}{12x^{-1}y^4z^{-7}}$

237. a) $\frac{3^5 \cdot 2^{-3} \cdot 10^{-2}}{4^{-6} \cdot 5^3 \cdot 6^{-1}}$ **b)** $\frac{5^3(-3)^5 \cdot 2^2}{(-6)^{-2} \cdot 2^{-3}}$ **c)** $\frac{10^{-2}(-6)^{-3}}{(-3)^{-4} \cdot 5^{-3}(-1)^{-4}}$ **d)** $\frac{(-15)^{-1} \cdot 27^0 8^2}{(-6)^3 \cdot 10^{-2}}$

238. a) $\frac{2a^2b^{-2}}{3b} : \frac{a^{-2}}{3^{-2}b^3}$ **b)** $\frac{5abc}{2a^{-2}b} : \frac{10ab^{-1}}{5^{-2}c^{-3}}$ **c)** $\frac{2^2a^3}{bx} : \frac{4x^5b^{-1}a}{a^{-4}x^6}$ **d)** $\frac{2^3 \cdot 3^2}{5xy^{-2}} : \frac{9x^{-2}y \cdot 5^{-1}}{8^{-1}y^{-1}}$

239. a) $(a^{-1})^0$ **b)** $(a^0)^{-1}$ **c)** $(b^{-2})^3$ **d)** $(ab^{-3})^2$

240. a) $(-x^2)^{-3}$ **b)** $(-2y)^4$ **c)** $(-2^2x)^{-1}$ **d)** $(-3^{-1})^2$

241. a) $(ab)^{-1}$ **b)** $5(x^{-2}y)^{-2}$ **c)** $(5xy^{-2})^2$ **d)** $2(3^{-1}x^0y^3)^{-2}$

242. a) $(a^{-3}b)^3a^3$ **b)** $(x^{-2}y^{-3})^3z^3x^2$ **c)** $x^{-4}(x^{-4}y^{-2})^{-1}y^{-2}$ **d)** $32(2xy^{-1})^{-4}x^4$

243. a) $(x^2y^{-3})^{-2}(x^{-2}y^3)^2$ **b)** $(2a^3)^{-2}(3a^{-2})^{-1}$ **c)** $(-2x^{-2})^3(3x^{-2})^{-3}$ **d)** $(-3^2s^3)^{-1}(2s^{-2})^3$

244. a) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ **c)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ **d)** $\left(\frac{3x^{-1}}{y}\right)^{-3}$

245. a) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-5}\left(\frac{y}{x}\right)^{-5}$ **b)** $\left(\frac{2a^2}{3}\right)^{-3}\left(\frac{6}{5a^3}\right)^2$ **c)** $\left(\frac{3x^{-2}}{2y}\right)^3\left(\frac{3x}{y}\right)^{-1}$ **d)** $\left(-\frac{4x^3}{3^2}\right)^{-3}\left(\frac{2x^2}{3}\right)^5$

246. a) $\left[\left(\frac{2}{15}\right)^2\right]^{-3} : \left(\frac{5}{2}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{3^2x}{4a}\right)^{-4} : \left(\frac{16 \cdot 3^{-1}x^{-2}}{-a^{-2}}\right)^2$ **c)** $\frac{(-a^3b)^2}{(a^2b^3)^3} : \left(\frac{ab}{a^3b^3}\right)^{-2}$

247. a) $\left[\left(\frac{a^{-3}b}{x^{-2}y^{-3}}\right)^3 : \left(\frac{x^{-3}y}{ab}\right)^{-5}\right]\frac{(x^{-1}y)^{-9}}{(a^{-7}b^{-1})^2}$ **b)** $\left(\frac{3x^2}{5y}\right)^{-2}\left(\frac{7y^4}{x^{-2}}\right)^{-3} : \left\{\left[\frac{5}{(xy)^5}\right]^2 \cdot \frac{3^{-2}}{7^3}\right\}$

248. a) $5x^2(3x^2 - 7y^2)$ **b)** $-3a^4(b^5a + a^6)$

249. a) $(-2x^4y + x^6y^2 + x^7y^3) \cdot 9x^3y^2$ **b)** $3x^5y^2z^4(5x^4y^2 - 3x^3z^5 + 2y^2z^6)$

250. a) $(-5a^2b^7)(-4a^3b + a^2b^3 - 5a^3b^6)$ **b)** $(-3m^3n)(7mn^3 + m^2n^4 - 2m^3n^2)$

251. a) $3a - 2(a + b)$ **b)** $5x - (3 - x)x$

252. a) $(9a + b)a + (9a - b)b$ **b)** $x^2(3x^2 - y^2) - (3x^2 + y^2)y^2$

253. $(7a^2 + 5b)a + (3a + 9b^2)b - a(7a^2 + 8b)$

254. $(16x^2 - 9y^3)x + y(9xy + 4y)y - 16(x^3 - y^2)$

255. $2mn(m + n) + 5m^2n^2(3mn - m^2) - n^2(2 + 15m^2n)m$

256. $3[(5 - a) \cdot 7a^2 + (4b^2 + 1) \cdot 3b^5 - (12b^7 - 3a^3)]$

257. $5x[(4 - x) \cdot 6x^3 + (2x^2 + 1) \cdot 3x^4 + x(2x^3 + 1)]$

258. $9a[(7-a^2)\cdot 5a^4+(2a^3+6)\cdot 8a^7-6a^6(8a+1)]$

259. $(-2x)\{2x^3-[-(3x^2-5)+4x^2]x\}(-2)$

260. $(-3m)\{5m^6-[-(7m^5-2)+6m^3]m^2\}(-3)$

261. $a^2\{[-a^2(2a^4+b^2)+a^2b(3a^2+2b)]-[(2a^2-4b)a^2b-a^2(2a^4-3b)]\}$

262. $x^3\{[-x^5(5x^7+y^2)+x^2y^2(7x^2+5y)]-[5x^2(y^3-x^{10})-y^2(-7x^4+2x^5)]\}$

263. a) $(x+4)(x+3)$ **b)** $(x-5)(2x+2)$ **c)** $(3a+y)(a+y)$

264. a) $(3x+5)(3x+4)$ **b)** $(3x-5)(9x+2)$ **c)** $(ax-3)(ax-5)$

265. a) $(4x^2-1)(3x+1)$ **b)** $(2x^2-3)(8x^2-9)$ **c)** $(uv^2+w)(u^2v-w)$

266. a) $(5a^3-b)(7a^2+b)$ **b)** $(9a^2-b^5)(10a^5-b^2)$ **c)** $(ax^2-by)(a^2y+x)$

267. a) $(9x^2+5)(2x^2-4)-(3x+4)(6x-5)$ **b)** $(5x^2+3)(2x^7+3)-(3x^5+8)(6x^4-1)$

268. $[(4x^2+7)(3x^3+9)-(2x^2+3)(6x^3+2)]\cdot 2x^2$

269. $(3x-2)(3x+2)-\{4x-[(3x+2)(4x+3)-(5x+4)(6x+9)]\}$

270. $(3x+2)(5x+7)-\{-[-3(5x-3)(7x+5)-(2x+8)(3x+7)]\}$

271. $(5x-3)(4x-2)-\{(2x+7)(4x+3)-[-3(5x+2)+(8x+3)(7x+2)]\}$

272. $(3a+2b)(3a+4b)-\{(6a+5b)(3a-2b)-[-2(3a+11b)(3a+b)+(9a+5b)(3a+4b)]\}$

273. $(7a^2+3b^2)(8a^2+2b^2)-\{(2a^2-4b^2)(8a^2+9b^2)-[-4(2a^2+4b^2)(4a^2-3b^2)+$
$+(7a^2+3b^2)(2a^2+5b^2)]\}$

274. a) $(a^2-ab+b^2)(a+b)$ **b)** $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

275. a) $(5x^2+6xy-7y^2)(x^2+3y^2)$ **b)** $(3x^2-2xy+y^2)(x^2-2y^2)$

276. a) $(27a^3+9a^2+3a+1)(3a-1)$ **b)** $(5x+y)(125x^3-25x^2y+5xy^2-y^3)$

277. a) $(9x^5+3x^4y+x^2y^2-2y^5)(3x^3+1)$ **b)** $(8x^4-3x^3y-2x^2y+4y^3)(2x^5-4)$

278. a) $(3x^2-2x+1)(9x^2+x-1)$ **b)** $(7a^2b+3ab+b^2)(7a^2b+3ab-b^4)$

279. a) $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ **b)** $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$

280. $(x+1)(x+2)(x+3)(x-1)(x-2)(x-3)$

281. $(2x-3y)(4x^2+6xy+y^2)-(4x^2-6xy+y^2)(2x+3y)$

282. $(3a-2b)(5a^2+7ab+b^2)-(5a^2-7ab+b^2)(3a+2b)$

283. $(2x^4-5x^2+3)(3x^2+2)-(x^4+x^2-2)(x^2-3)$

284. $(x-2)(x^3+3x^2+6x-5)-(x-1)(x^3-4x^2-6x+5)$

285. $(a^3+2a^2+7a-8)(a-3)-(a-2)(a^3-3a^2-7a+7)$

286. $(x+a)(x-b)(x+c)-(x-a)(x+b)(x-c)$

287. $(3x+2)(2x-3)(x-1)-(x-1)(x+2)(x-3)$

288. $(a+b-c)(a+b)+(-a+b+c)(b+c)+(a-b+c)(a+c)$

289. $(3x^2+7y-z)(3x^2+7y)+(3x^2-7y+z)(3x^2+z)+(-3x^2+7y+z)(7y+z)$

290. $\{2+3x[-7+(8-5x)\cdot 3x]\}\{[42-7x\cdot(3+9x)]-21\cdot(2-x-3x^2)\}$

291. $\{5+96x^3+8x[-4+(7-3x)\cdot 4x]\}\{5(2-3x)-[-15x(-8x-5)]\}$

292. $\{35+2x\cdot(21+12x)-2[15+(7+4x)\cdot 3x]\}\{5[-8x+4x\cdot(5x+7)]-2x(x+1)\cdot 25\}$

293. a) $(2x+4y)^2$ **b)** $(9x-1)^2$ **c)** $(6a-7b)^2$

294. a) $(3x^2-7y^2)^2$ **b)** $(4x^2y^2-3y^2)^2$ **c)** $(-2a^2b+5b^3)^2$

295. a) $(4ab+2ab^2)^2$ **b)** $(12a^3b+6ab^3)^2$ **c)** $(13a^4b^9c-12a^3b^6c^9)^2$

296. a) $(x-a)^3$ **b)** $(x+2y)^3$ **c)** $(-3x-4y)^3$

297. a) $(5x+y^2)^3$ **b)** $(3x-y^3)^3$ **c)** $(4x^2+2y^3)^3$

298. a) $(1-4x^5)^3$ **b)** $(2+7a^2b^5c)^3$ **c)** $(3abc^2-6a^7b^5c)^3$

299. a) $(x-y)(x+y)$ **b)** $(3x+5)(3x-5)$ **c)** $(2x-9)(2x+9)$

300. a) $(x^2-1)(x^2+1)$ **b)** $(9x^2-7)(9x^2+7)$ **c)** $(3x^2y-1)(3x^2y+1)$

301. a) $(10x^5y^7-11)(10x^5y^7+11)$ **b)** $(14a^3b^5+17c^9)(14a^3b^5-17c^9)$

302. $(13x^2+5)(13x^2-5)-(5x^2+3)(5x^2-3)-(12x^2+4)(12x^2-4)$

303. $(a+2b)(a^2+4b^2)(a-2b)-(a-6b)(a^2+36b^2)(a+6b)$

304. $(7x+9)(49x^2+81)(7x-9)-(5x+3)(25x^2+9)(5x-3)$

305. a) $(5x^2+1)^2-(5x^2-1)^2$ **b)** $(6xy-4)^3-(6xy+4)^3$

306. a) $[(x^2+1)(x^2-1)]^2$ **b)** $[(3x^5-a)(3x^5+a)]^3$

307. a) $[(2x^2+y^3)^2-(2x^2-y^3)^2]^3$ **b)** $[(x+2)^3-(x-2)^3]^3$

308. a) $(5x-4)^2-(5x+1)(5x-1)$ **b)** $(3x-7)^2-(3x+1)(3x-1)$

309. $(3a-4)^2-(4+3a)(4-3a)\cdot 3-(9a-7)\cdot 4a+32$

310. $2(2x^2+3)(2x^2-3)-(2x^2-2)^2+3(5x^2+3)(5x^2-3)$

311. $(2a^2-2b)^2-4\{3[(a^2-b)+7(a+b)^2-(7a+b)^2]+b(-24b+1)\}a^2$

312. a) $(7a-2b)^3-(2b-7a)^2\cdot 2b$ **b)** $(6x-5y)^3-(5y-6x)^2\cdot 6x$

313. $(4a-3)^3-(4a-3)^2\cdot 4a-(3-5a)(3+5a)\cdot 6$

314. $(3x+2)^3-3x(3x+2)^2-(3x-2)(3x+2)\cdot 2$

315. $(2x+1)^3-(2x+3)(2x-3)\cdot 4+(3-5x)(3+5x)-8x^2(x-1)$

316. $(3x-2)^2\cdot 3x-(3x-5)^3+(2x+3)(2x-3)-x^2(8x-159)$

317. $(2x-5)^3-[2x(2x-5)^2+(2+6x)(2-6x)\cdot 5]-100x$

318. $(3x-5)^3-[(5-3x)^2\cdot 3x+(2-3x)(2+3x)\cdot 5]+145$

319. $(2x+3)^3-[2x(2x+3)^2+(3+4x)(3-4x)\cdot 2]+x^2$

320. $(3x-y)^3-(y-3x)^2\cdot 3y-[-3y^3+(-9xy+6x)(-3y)]+y^3$

321. $(2x^2+3)^3-[(2x^2+3)^2\cdot 2x^2+3(2x+4)(2x-4)+12x^4]$

322. $2(3x+1)(3x-1)-(3x^2+1)^3+12(x^2+2)(x^2-2)-(3x+1)^2+3x^4(9x^2+5)$

323. $(4x^2-y)^3-[-3y(4x^2-y)^2-3y^2(2x-y)(2x+y)-3y^4]-2y^3$

324. $(y-2x)^3-(2x-y)(-2x-y)-(2x+y)^3-[-4x(4x^2+3y^2)]+y^2$

Bei den Aufgaben **325.** bis **369.** sind die gegebenen Terme in Produkte zu verwandeln. Zur Probe ist das Resultat anschließend auszumultiplizieren:

325. a) $5x-5y=5(.....)$ **b)** $ax^2+ay^2=a(.....)$

326. a) $g+g^3=g(.....)$ **b)** $12f^5-120f^4=12f^4(.....)$

327. a) $27x^2y-54xy^2=27xy(.....)$ **b)** $30a^2bc-27a^2b=3a^2b(.....)$

328. a) $36x^3y^4+48xy^3=.....(3x^2y^2+4y)$ **b)** $63a^2bc^3-45a^2b^2c^5=(.....)(7a^3c-5ab^2c^3)$

329. a) $a+b-c=(-1)(.....)$ **b)** $-a^2x-b^2x-c^2x=(-x)(.....)$

330. a) $7x+7y$ **b)** $abc-ar$ **c)** vx^2+vy^2

331. a) $6s-9t$ **b)** $17x+34y$ **c)** $-bx+cx$

332. a) $f+f^2$ **b)** x^2+3x **c)** $24a^2b-24ac$

333. a) $-7a^2+7a^2bc$ **b)** $28f^3+14f^2$ **c)** $-16a^3y^4+12a^5y^2$

334. a) $4x-4y+4z$ **b)** $ax^2-ay^2+az^2$

335. a) $-45a+70b-25c$ **b)** $3a+9b-3c$

336. a) e^3-e^2-e **b)** $3x^2+7xy-8xy^2$

337. a) a^3+4a^2-3a **b)** $2a^5+a^6+2a^7$

338. a) $33ax^2-55bx+77cx^2$ **b)** $-34a^3y-85ay+51a^2y$

339. a) $21x^2-7xy+14xy^2$ **b)** $12a^3bx^2-30abx-24ab^2x^2$

340. a) $24a^3b^2-36a^4b^3+48a^3b^3$ **b)** $63a^4b^2c^4+72a^3b^2c^2-45ab^2c$

341. a) $26a^3b^3-39a^3b+52a^4b-65a^2b^3$ **b)** $27m^5n^6z^7+81m^4z^8+243m^7z^6-54m^5nz^5$

342. a) $a(a+b)+b(a+b)$ **b)** $2x(a+b)-3y(a+b)$

343. a) $4a(a-2b)+3x(a-2b)$ **b)** $3f(2x-y)-(2x-y)$

344. a) $-7x(4y+5w)+8(4y+5w)$ **b)** $13g(2f-17h)-13(2f-17h)$

345. a) $3x(x+y)-2x^2(x+y)$ **b)** $15x^2y(x-y)-5xy^2(x-y)$

346. a) $(a+4b)(8x+4y)-(16x+8y)(a+4b)$ **b)** $(x^2+1)(x^3+y)-(3x^3+3y)(x^2-1)$

347. a) $(5-a)\cdot 2m-3n(a-5)$ **b)** $2x(a-b)-6y(b-a)$

348. a) $(s-t)(v+2w)+(t-s)(4v-w)$ **b)** $(3a-10b)(5x+6y)-(10b-3a)(6x+5y)$

349. a) $5x+5y+zx+zy$ **b)** $2x^3-3ax^2+6ax-9a^2$

350. a) $2p^3+9q^2-3p^2q-6pq$ **b)** $8m^2-6mn+4mn-3n^2$

351. a) $5a(3x-4y)-3b(4y-3x)-3x+4y$ **b)** $3x(2a-3b)-5y(3b-2a)-4a+6b$

352. a) $x^2+2x+1=(x+.....)^2$ **b)** $y^2-4y+4=(y-.....)^2$

353. a) $r^2-16r+64$ **b)** $x^2-20x+100$

354. a) $4x^2+4x+1$ **b)** $25y^2-70y+49$

355. a) $25y^2-70y+49$ **b)** $16a^2+72a+81$

356. a) $25m^2-70mn+49n^2$ **b)** $49a^4-126a^2b+81b^2$

357. a) $49a^2-42ab+9b^2$ **b)** $16x^4-24x^2y^3+9y^6$

358. a) x^3+3x^2+3x+1 **b)** $y^3+6y^2+12y+8$

359. a) $27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$ **b)** $27x^3+243x^2y+729xy^2+729y^3$

360. a) $125x^3-150x^2+60x-8$ **b)** $343a^9-441a^6+189a^3-27$

361. a) $512a^6+1344a^4b^2+1176a^2b^4+343b^6$ **b)** $729f^9-486f^6g^3+108f^3g^6-8g^9$

362. a) x^2-1 **b)** $16x^2-1$ **c** $25a^2-b^2$

363. a) $4m^2-16n^2$ **b)** $36f^2-81g^2$ **c)** $9a^2-121$

364. a) $81x^4-1$ **b)** x^4-y^4 **c)** x^8-1

365. a) $49a^4b^6-4a^8b^2$ **b)** $64x^4-100$ **c)** $144-169a^2$

366. a) $2a^2-18$ **b)** $3a^2-12b^{18}c^4$ **c)** $162x^4y^6-242a^8b^2$

367. a) $(x+y)^2-z^2$ **b)** $(x-y)^2-z^2$ **c)** $a^2-(b-c)^2$

368. a) $p^2-(p+q)^2$ **b)** $(a-b)^2-a^2$ **c)** $x^2-a^2-2ab-b^2$

369. a) $(5x-1)^2-(4x+3)^2$ **b)** $(a+b)^2-(x+y)^2$ **c)** $(u+v)^2-(w-x)^2$

370. Man erweitere $\frac{3x-5}{12}$ mit **a)** 2 **b)** –1 **c)** 5 **d)** –12

371. Man erweitere $\frac{4x-7}{4x+8}$ mit **a)** –2 **b)** 5 **c)** 6 **d)** –1

372. Man erweitere $\frac{5x+7}{5x-7}$ mit **a)** x **b)** $-x$ **c)** $5x+7$ **d)** $5x-7$

373. Man erweitere $\frac{a+5b^2}{a-5b^2}$ mit **a)** $a-5b^2$ **b)** $a+5b^2$ **c)** $2a+5b^2$

374. Man erweitere $\frac{12x-13}{13-11x}$ derart, dass der neue Nenner **a)** $(13-11x)^2$ **b)** $169-121x^2$ **c)** $11x^2-13x$ lautet.

375. Man erweitere $\frac{4x-y}{4x+y}$ derart, dass der neue Nenner **a)** $20x^2+5xy$ **b)** $16x^2-y^2$ **c)** $16x^2+8xy+y^2$ lautet.

376. Man erweitere $\frac{1}{a^4-8b^2}$ derart, dass der neue Nenner **a)** $a^4b^2-8b^4$ **b)** a^8-64b^4 **c)** $8ab^2-a^5$ lautet.

Bei den Aufgaben **377.** bis **384.** ist soweit wie möglich zu kürzen:

377. a) $\frac{14xy}{xy}$ **b)** $\frac{60ab}{15ab}$ **c)** $\frac{144a^2bc}{12abc}$

378. a) $\frac{12xy}{8y^2}$ **b)** $\frac{8x^2yz}{18xy^2z}$ **c)** $\frac{9x^5y^2z^4}{15x^6y^3z}$

379. a) $\frac{8x-8}{9x-9}$ **b)** $\frac{5x-15}{6x-18}$ **c)** $\frac{a-b}{b-a}$

380. a) $\frac{16(x+1)(x-3)}{8x+8}$ **b)** $\frac{15(3x+3)(4x+9)}{12(2x+7)(5x+5)}$ **c)** $\frac{18(14x^2-21x)(2x+3)}{14x(4x^2-9)}$

381. a) $\frac{18(a+b)^3(a-b)^2}{72(a-b)^3(a+b)^2}$ **b)** $\frac{4x^2-20x+25}{(2x-5)^3}$ **c)** $\frac{27a^3+9a^2+3a+1}{27a^3+18a^2+3a}$

382. a) $\frac{x^2-y^2}{y+x}$ **b)** $\frac{(7x-3y)^2}{49x^2-9y^2}$ **c)** $\frac{9x^2-30x+25}{9x^2-25}$

383. a) $\frac{5a^2-5ab}{(a-b)^2}$ **b)** $\frac{7x^3-x^2y}{7xy^2-y^3}$ **c)** $\frac{(x-y)^2}{7xy-7x^2}$

384. a) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$ **b)** $\frac{x^2-8x+16}{2x^2-32}$ **c)** $\frac{2x-50x^3}{25x^2-10x+1}$

Bei den Aufgaben **385.** bis **394.** ist das kgV zu bestimmen:

385. a) $\text{kgV}(24x^3, 26x^4)$ **b)** $\text{kgV}(19x^3yz, 36xyz^2)$ **c)** $\text{kgV}(77x^5yz, 93abc)$

386. a) $\text{kgV}(26x, 13x^2, 20x^3)$ **b)** $\text{kgV}(240x^5yz, 90xyz^3, 112x^2y^3z^2)$

387. a) $\text{kgV}(27x^3y^5z, 36xyz^4, 197x^6yz^9)$ **b)** $\text{kgV}(91x^3y^3z^4, 190x^4yz, 182x^3y^5z)$

388. a) $\text{kgV}[4a^2(b-a), 12b^2(a^2-b^2)]$ **b)** $\text{kgV}[48a^2b^3(a-b), 84ab(a^2-b^2)]$

389. $\text{kgV}[120a^5b^7c(a-b)^2, 320(a+b), 190\,abc(a^2-b^2)]$

390. a) $\text{kgV}(x^2-81, x^2-18x+81, x-9)$ **b)** $\text{kgV}(2x^2-2, 2x^2-4x+2, 5x-5)$

391. a) $\text{kgV}(2b^2-6b, 2b^2-18, 6b^2-18b)$ **b)** $\text{kgV}(a^2b-b^3, 4b^2, 4ab^2+4b^3)$

392. a) $\text{kgV}(z^3-2z^2+z, z, z^4-z^2)$ **b)** $\text{kgV}(a, a^3-2a^2+a, a^2-1)$

393. a) $\text{kgV}(3x^2+3x, 5x^3-5x, 10x^2+10x)$ **b)** $\text{kgV}(3x^2+3x, 5x^3-5x, 10x^2+10x)$

394. a) $\text{kgV}(4a^2b-4ab^2+b^3, 4a^2b-2ab^2)$ **b)** $\text{kgV}(a^2b-4ab^2+4b^3, a^2b-2ab^2)$

395. a) $\frac{5x}{9}+\frac{3x}{9}+\frac{x}{9}$ **b)** $\frac{5}{x}-\frac{3}{x}-\frac{1}{x}$

396. a) $\frac{4x+7}{8}+\frac{4x+3}{8}$ **b)** $\frac{5x+2}{3}-\frac{2x-1}{3}$

397. a) $\frac{5x+4}{2x-1}+\frac{9x-5}{2x-1}$ **b)** $\frac{17x-23}{5x+4}-\frac{25+17x}{5x+4}$

398. a) $\frac{3xy+3y}{xy}+\frac{5xy+7y}{xy}+\frac{9xy-2y}{xy}+\frac{xy+4y}{xy}$ **b)** $\frac{3x+4xy}{xy}-\frac{3xy-y}{xy}+\frac{2x+y}{xy}-\frac{5x+2y}{xy}$

399. a) $\frac{3x+2}{x+2}+\frac{5x-1}{x+2}-\frac{7x+3}{x+2}-\frac{x+3}{x+2}$ **b)** $\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{3x-2}{2x-1}+\frac{4x-3}{2x-1}-\frac{2-x}{2x-1}$

400. a) $\frac{3x-7y+3z}{4}+\frac{2x+17y+10z}{4}-\frac{x-2y-z}{4}$ **b)** $\frac{2x+3y-4z}{7}-\frac{5x-4y+3z}{7}+\frac{4x-5y+6z}{7}$

401. a) $\frac{2x^2-4x+5}{x}+\frac{3x^2-2x+1}{x}-\frac{4x^2-5x+6}{x}$ **b)** $\frac{2x+3-x^2}{5x}+\frac{5x^2-2x+1}{5x}-\frac{3x^2+2x-1}{5x}-\frac{x^2+3x+5}{5x}$

402. a) $\frac{b}{a-b}-\frac{a}{a-b}$ **b)** $\frac{b}{b^2-a^2}-\frac{a}{b^2-a^2}$

403. a) $\frac{4}{x}-\frac{3}{y}-1$ **b)** $\frac{4}{x}-\frac{5}{y}+\frac{6}{xy}$

404. a) $\frac{5x}{3y^2}+\frac{19z}{6xy}-\frac{2x}{3y^2}+\frac{7y^2}{6x^2}$ **b)** $\frac{2b}{3a^2}+\frac{3c}{7ab}+\frac{4b}{3a^2}+\frac{3a}{7b^2}$

405. a) $\frac{3x+2y+2z}{4}-\frac{5x+3y}{3}+\frac{x+y-2z}{2}$ **b)** $\frac{5x+2y+z}{2}-\frac{7x+3y}{3}+\frac{3x+6y-z}{12}$

406. a) $\frac{2(x+1)}{2}-\frac{3(x+2)}{6}+\frac{4(x+3)}{5}+\frac{x+2}{10}$ **b)** $\frac{3(x+2)}{6}-\frac{4(x-2)}{3}+\frac{2(x-1)}{36}-\frac{x+1}{4}$

407. a) $\frac{2b+3c}{ac}+\frac{3a+b}{ab}-\frac{2b^2+3ac}{abc}$ **b)** $\frac{2a+3b}{bc}+\frac{3c+a}{ac}-\frac{2a^2+3bc}{abc}$

408. a) $\frac{z-1}{z}+\frac{3z^2-6z+5}{z^2}-\frac{4z^3-7z^2+5z-5}{z^3}$ **b)** $\frac{4x^3-3x^2+2x-1}{x^3}-\frac{3x^2-4x-5}{x^2}+\frac{2x-3}{x}$

409. $\frac{9a^3-5a^2+2a+8}{108a^4}-\frac{5a-3a^2-4}{8a^3}-\frac{261a^3-19a^2+112a-16}{216a^4}$

410. a) $\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{y+3}$ **b)** $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x+3}$

411. a) $\frac{17}{5r-2}-\frac{13}{2r+3}+\frac{4}{3r-5}$ **b)** $\frac{20a}{a-3}-\frac{19a}{a-4}+\frac{a}{a-5}$

412. a) $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}$ **b)** $\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}$

413. a) $\frac{1-x}{1+x}-\frac{1+x}{1-x}+\frac{4x}{1-x^2}$ **b)** $\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}+\frac{2x}{1-x^2}$

414. a) $\frac{x+2}{x-1}+\frac{x-3}{x-2}-\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$ b) $\frac{4x+1}{x-1}-\frac{3x-2}{x+2}-\frac{x(x+14)}{(x-1)(x+2)}$

415. a) $\frac{x+6}{(x-3)^2}+\frac{x}{x^2-9}-\frac{2}{x+3}$ b) $\frac{4a+5b}{(a+b)^2}-\frac{2a}{a^2-b^2}-\frac{3}{a+b}$

416. a) $\frac{6a}{a^2-64}+\frac{a+2}{2a+16}-\frac{1}{2}$ b) $\frac{a+2}{2a+12}+\frac{4a}{a^2-36}-\frac{1}{2}$

417. a) $\frac{35z}{49z^2-4}-1+\frac{14z-1}{14z+4}$ b) $\frac{45ab}{25a^2-9b^2}+\frac{20a+3b}{10a+6b}-2$

418. a) $\frac{6z+11}{6z+14}+\frac{9z}{9z^2-49}-1$ b) $\frac{16a+37b}{4a+10b}+\frac{6ab}{4a^2-25b^2}-4$

419. a) $\frac{7a+11}{3a^2-3}-\frac{2a+1}{a^2-a}-\frac{1}{3a+3}$ b) $\frac{11z+2b}{4bz-8b^2}-\frac{8z}{z^2-4b^2}-\frac{9z+2b}{4bz+8b^2}$

420. a) $\frac{5x^2+y}{x+2y}-\frac{8x^3-4x^2y-3xy}{x^2-4y^2}+\frac{3x^2-4y}{x-2y}$ b) $\frac{7x^2+y}{x+3y}-\frac{24x^2y-5xy-21y^2}{x^2-9y^2}+\frac{4x^2-6y}{x-3y}$

421. a) $\frac{5x^2+y}{2x+y}-\frac{16x^3-2x^2y-6xy}{4x^2-y^2}+\frac{3x^2-4y}{2x-y}$ b) $\frac{7x^2+y}{3x+y}-\frac{3x^3-15xy+7x^2y-7y^2}{9x^2-y^2}+\frac{4x^2-6y}{3x-y}$

422. a) $\frac{2x+5y}{x}+\frac{2x^3-5y^3+3xy^2}{x^3-2x^2y+xy^2}-\frac{3x+6y}{x-y}$ b) $\frac{6x+2y}{x}+\frac{6x^2y-4xy^2-2y^3}{x^3-2x^2y+xy^2}-\frac{5x+3y}{x-y}$

423. a) $\frac{2x+3y}{x}+\frac{4x^3-xy^2-3y^3}{x^3-2x^2y+xy^2}-\frac{5x+6y}{x-y}$ b) $\frac{5x+2y}{x}+\frac{2x^3-3xy^2+3x^2y-2y^3}{x^3-2x^2y+xy^2}-\frac{6x+3y}{x-y}$

424. a) $\frac{5x+6y}{x}+\frac{5xy^2-6y^3-2x^3+3x^2y}{x^3-2x^2y+xy^2}-\frac{2x+3y}{x-y}$ b) $\frac{6x+5y}{x}+\frac{4x^2y+3xy^2-5y^3-2x^3}{x^3-2x^2y+xy^2}-\frac{3x+2y}{x-y}$

425. a) $\frac{5a+b}{2ab-2b^2}-\frac{3a+b}{2ab+2b^2}-\frac{2a}{a^2-b^2}$ b) $\frac{5a+3b}{6ab-18b^2}-\frac{3a+3b}{6ab+18b^2}-\frac{2a}{a^2-9b^2}$

426. a) $\frac{10x+3y}{12xy-18y^2}-\frac{6x+3y}{12xy+18y^2}-\frac{4x}{4x^2-9y^2}$ b) $\frac{8a+b}{4ab-2b^2}-\frac{4a+b}{4ab+2b^2}-\frac{2a}{4a^2-b^2}$

427. a) $\frac{8a+5b}{20ab-50b^2}-\frac{4a+5b}{20ab+50b^2}-\frac{2a}{4a^2-25b^2}$ b) $\frac{24x+y}{6xy-2y^2}-\frac{18x+y}{6xy+2y^2}-\frac{15x}{9x^2-y^2}$

428. a) $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{2}{a^2+b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{4}{a^2-b^2}$ b) $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(a+b)^2}-\frac{2}{a^2-b^2}-\frac{4(b^2-1)}{(a^2-b^2)^2}$

429. a) $\frac{a^2}{a+b}-\frac{b^2(a+b)}{(a-b)^2}+\frac{4ab^3}{(a-b)(a^2-b^2)}$ b) $\frac{a^2}{a-b}-\frac{4ab^3}{(a^2-b^2)(a+b)}-\frac{b^2(a-b)}{(a+b)^2}$

430. a) $\frac{4a^2}{2a+b}+\frac{8ab^3}{(2a-b)(4a^2-b^2)}-\frac{b^2(2a+b)}{(2a-b)^2}$ b) $\frac{a^2}{a-3b}-\frac{108ab^3}{(a+3b)(a^2-9b^2)}-\frac{9b^2(a-3b)}{(a+3b)^2}$

431. $\frac{5a-7b}{2a^3+2a^2b}-\frac{14a+9b}{3ab^2-3b^3}+\frac{2a^2-b^2}{4a^2b+4ab^2}-\frac{13b^2-11a^2}{6a^2b-6ab^2}$

432. $\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}-\frac{b^2-ab}{b^2-a^2}+\frac{a^2(a-b)}{a^3-a^2b}-\frac{2a(a^2-b^2)}{a^3-ab^2}-\frac{2b^2}{a^2-b^2}$

433. a) $\frac{x}{y}\cdot xy$ b) $\frac{4a}{3b}\cdot\frac{6b^2}{5a^2}$

434. a) $\frac{108a}{3b}\cdot\frac{27b}{2a}$ b) $\frac{14a^2b}{9ab}\cdot\frac{7ab}{3ab^2}$

435. a) $\frac{a+b}{4a}\cdot\frac{12a}{a+b}$ b) $\frac{5x}{14(x+y)}\cdot\frac{7(x+y)}{15y}$

436. a) $\frac{3(x+y)}{15(x-y)}\cdot\frac{25(x-y)^2}{18(x+y)^2}$ b) $\frac{5a(a-b)^2(a+b)^3}{7b(a-b)^3}\cdot\frac{7b}{(a+b)^3}$

437. a) $\frac{3a-4b}{4c+3e}\cdot\frac{3a+4b}{9a^2-16b^2}$ b) $\frac{a+b}{x^2-y^2}\cdot\frac{(x-y)^2}{a^2-b^2}$

438. a) $\frac{xy}{xy-y^2}(x^2-xy)$ b) $(a^2-c^2)\frac{6a}{3ac-3c^2}$

439. a) $(a^2-2a+1)\frac{a^2+a}{1-a^2}$ b) $(4x^2+4x+1)\frac{x^2-2x^3}{4x^2+2x}$

440. a) $\frac{x^2-2x}{x^2-3x}\cdot\frac{(x-3)^2}{x^2-4}$ **b)** $\frac{a^3-9a}{a^3b-ab^3}\cdot\frac{a^2b+ab^2}{a+3}$

441. a) $\left(\frac{4}{28x^3}+\frac{5}{21x^2}+\frac{3}{7x}\right)\cdot 7x^3$ **b)** $\left(\frac{4a}{3}+\frac{3b^2}{a^3}+\frac{b}{4a}\right)\frac{4b}{3a}$

442. a) $\left(\frac{81x^4}{a}+\frac{54y^4}{a^2}-\frac{27z^2}{a^3}\right)\frac{2a^3}{27x^3y^3z}-\frac{2}{x^3}\left(\frac{2ay}{z}-\frac{z}{y^3}\right)$ **b)** $\left(\frac{15a^2}{x^3}-\frac{5b^4}{x^2}+\frac{25c^2}{x}\right)\frac{x^3}{5ab^3c^3}+\frac{1}{c^3}\left(\frac{bx}{a}-\frac{3a}{b^3}\right)$

443. a) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a-b)$ **b)** $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)\left(\frac{b}{3}-\frac{a}{2}\right)$

444. a) $\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{7}\right)\left(\frac{3}{x}+\frac{7}{y}\right)$ **b)** $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)\left(\frac{9}{y}-\frac{8}{y}\right)$

445. a) $\left(\frac{a^2}{8}+\frac{a}{6}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{24}{a^2}-\frac{9}{a}\right)$ **b)** $\left(\frac{a^2}{9}+\frac{2a}{3b}+\frac{4}{b^2}\right)\left(\frac{a}{3}-\frac{2}{b}\right)+\frac{8}{b^3}$

446. a) $\left(\frac{a}{2a-3b}+\frac{b}{3a-3b}-1\right)(4a^2-9b^2)$ **b)** $\left(\frac{x}{5x+4y}-\frac{y}{5x-4y}+1\right)(25x^2-16y^2)$

447. a) $\left(\frac{5b}{9a^2-16b^2}-\frac{5a}{3a+4b}+\frac{3a}{3a-4b}\right)(9a^2-16b^2)$ **b)** $\left(\frac{2xy}{9x^2-4y^2}+\frac{3x}{3x-2y}-\frac{4y}{3x+2y}\right)(9x^2-4y^2)$

448. a) $\left(\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}\right)(a^2-b^2)$ **b)** $\left(\frac{2a}{4a^2-64b^2}-\frac{1}{2(a+4b)}+\frac{1}{2a-8b}\right)(4a^2-64b^2)$

449. a) $\left(\frac{2x^2}{3y}+\frac{x}{y^2}\right)\left(\frac{4x^4}{9y^2}+\frac{x^2}{y^4}\right)\left(\frac{2x^2}{3y}-\frac{x}{y^2}\right)$ **b)** $\left(\frac{5x^5}{7b^3}+1\right)\left(\frac{25x^{10}}{49b^6}+1\right)\left(\frac{5x^5}{7b^3}-1\right)$

450. a) $\left(\frac{4x}{3y}+\frac{2y}{3x}\right)^2-\left(\frac{2y}{3x}-\frac{2x}{y}\right)\left(\frac{2y}{3x}+\frac{2x}{y}\right)$ **b)** $\left(\frac{5a}{b}+\frac{3b}{2a}\right)^2-\left(\frac{5a}{b}-\frac{3b}{2a}\right)\left(\frac{5a}{b}+\frac{3b}{2a}\right)$

451. a) $\left(\frac{18a}{4a^2-9}-\frac{4a+15}{4a+6}+1\right)\left(\frac{7a-3}{3}-\frac{4a-1}{2}\right)$ **b)** $\left(\frac{27a}{9a^2-4}-\frac{6a+13}{6a+4}+1\right)\left(\frac{3a-7}{3}-\frac{a-4}{2}\right)$

452. a) $12x:\frac{3}{5}$ **b)** $5x:\frac{15x}{y}$

453. a) $\frac{5x^4}{2y}:\frac{10x^3}{y}$ **b)** $\frac{108ab^2}{27bc^2}:\frac{18b}{9c^2}$

454. a) $\frac{3a+2}{5}:\frac{3a+2}{10}$ **b)** $\frac{2-x}{2a}:\frac{2a}{x-2}$

455. a) $\frac{a^2+1}{a^2-1}:\frac{a+1}{a-1}$ **b)** $\frac{x^2-4}{y^2-9}:\frac{2+x}{3-y}$

456. a) $\frac{r^4-4}{r+5}:(2-r^2)$ **b)** $\frac{b^3-b^2}{b^2+b}:(b^2-1)$

457. a) $\frac{4a^2-9}{49b^2-1}:\frac{2a+3}{7b-1}$ **b)** $\frac{16a^2-9b^2}{2a+3ab}:\frac{4a+3b}{4a^2-9a^2b^2}$

458. a) $\frac{5y-5x}{3y-2x}:\frac{x^2-y^2}{4x^2-9y^2}$ **b)** $\frac{2a^2x-a^2}{ax-bx}:\frac{b^2(2x-1)}{x(a-b)}$

459. a) $\frac{a^2+ab}{5c}:\frac{a^2-ab}{10c}$ **b)** $\frac{a^2-b^2}{ab}:\frac{4(a+b)^2}{a}$

460. a) $\frac{a^2+4a+4}{b^2-16}:\frac{a+2}{b-4}$ **b)** $\frac{9(x^2-8x+16)}{4(y^2-2y+1)}:\frac{3x-12}{16y-16}$

461. a) $\left(\frac{2}{x+3}+\frac{2}{x-3}\right):\frac{8x}{x^2-9}$ **b)** $\left(\frac{a-2}{b+3}+\frac{a+2}{b-3}\right):\frac{a^2-4}{b^2-9}$

462. a) $\frac{x^2-9}{2}:\left(\frac{x+3}{x-3}-\frac{x-3}{x+3}\right)$ **b)** $\frac{x^2+4y^2}{x^2-4y^2}:\left(\frac{x}{x-2y}-\frac{2y}{x+2y}\right)$

463. a) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}\right)$ **b)** $\left(3+\frac{3}{x+2}\right):\left(3-\frac{3}{x+2}\right)$

464. a) $\left(1-\frac{x-5}{x-1}\right):\left(\frac{x-1}{x-5}-1\right)$ **b)** $\left(a-\frac{a}{a-2}\right):\left(a+\frac{a}{a-2}\right)$

465. a) $\left(\frac{3x-8y}{4}+\frac{4y^2-9z^2}{3x}\right):\left(\frac{3x-4y}{2x}+\frac{3z}{x}\right)$ **b)** $\left(\frac{x+3y}{9}+\frac{4y^2-9z^2}{16x}\right):\left(\frac{x}{9}+\frac{y}{6}+\frac{z}{4}\right)$

466. a) $\left[\left(\frac{b-3}{2}-\frac{b-5}{3}\right):\frac{6}{b+5}\right]:\frac{b^2-25}{6}$ **b)** $\left[\left(1-\frac{7(x-2)}{x^2-4}\right):\frac{6}{x+2}\right]\cdot\left(\frac{3}{x+5}+\frac{30}{x^2-25}\right)$

467. $\left(1+\frac{x+9}{x^2-1}-\frac{x-3}{x+1}\right):\frac{15}{x^2-2x+1}$

468. $\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^3-2z^2+z}-\frac{z}{z^2-1}\right):\frac{8}{z^4-z^2}$

469. $\frac{3b^2}{4a^2-8ab+4b^2}:\left(\frac{a}{a^2b-b^3}+\frac{a-b}{4ab^2+4b^3}-\frac{1}{4b^2}\right)$

470. $\frac{3b^3}{16a^2+32ab+16b^2}:\left(\frac{1}{4b^2}+\frac{a}{a^2b-b^3}-\frac{a+b}{4ab^2-4b^3}\right)$

471. a) $\dfrac{\frac{a^2+b^2}{a+b}}{\frac{a^2-b^2}{a-b}}$ **b)** $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$

472. a) $\dfrac{\frac{8x^2-32y^2}{2x+4y}}{\frac{4x-8y}{x+y}}$ **b)** $\dfrac{\frac{m^3-9m^2}{m^2}}{\frac{m+9}{2m+18}}$

473. a) $\dfrac{\frac{1}{4x^2-1}+1}{x-\frac{x}{3(2x+1)}}$ **b)** $\dfrac{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}}{\frac{a}{a-b}-1}$

474. a) $\dfrac{\frac{1}{a^2-1}+1}{1-\frac{1}{a+1}}$ **b)** $\dfrac{\frac{x^2}{1-x^2}+1}{1-\frac{x}{x-1}}$

475. a) $\dfrac{\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}}{\frac{2x^3+2xy^2}{xy-y^2}}:\frac{y}{2x^2}$ **b)** $\dfrac{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}:\frac{a^2b}{a^2-b^2}$

476. a) $\dfrac{\frac{x^2}{1-x^2}+1}{\frac{x}{1-x}+1}:\frac{1}{1+x}$ **b)** $\dfrac{\frac{a^2-b^2}{2ab}+\frac{2ab}{a^2-b^2}}{\frac{a^2+b^2}{2ab}+1}:\frac{(a^2+b^2)^2}{(a+b)^2}$

477. a) $\dfrac{\frac{by}{b-2y}}{\frac{b^2-y^2}{b+2y}}:\frac{(b^2y+by^2)(a+x)^2}{(b^2-4y^2)(a+2x)^2}$ **b)** $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}{\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}}:\dfrac{\frac{a+b}{a-b}}{\frac{a-b}{a+b}}$

478. a) $\dfrac{\frac{a+b}{b}-\frac{4a}{a+b}}{\frac{a}{a-b}+\frac{a-b}{4b}}:\dfrac{\frac{a^2-2ab+b^2}{a-b}}{\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}}$ **b)** $\dfrac{a-\frac{ab+b^2}{a+b}}{b+\dfrac{a-b}{1+\frac{a+b}{a-b}}}:\dfrac{a-\frac{a^2}{a+b}}{a+\frac{ab}{a-b}}$

479. a) $\dfrac{a-\frac{a^2+b^2}{a+b}}{\frac{a^2-b^2}{a}}:\dfrac{\frac{b^2}{2a+2b}}{\frac{2a}{b(a+b)}}$ **b)** $\dfrac{\frac{s^2+t^2}{s-t}+t}{\frac{s^2}{s-t}}:\dfrac{\frac{s^2-st+t^2}{t}}{\frac{s^2}{t}+\frac{t^2}{s}}$

480. a) $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}:\dfrac{\frac{2x^2}{x^2-z^2}}{\frac{x}{x+z}+\frac{x}{x-z}}$ **b)** $\dfrac{\frac{12xy}{9x^2-y^2}}{\frac{1}{(3x-y)^2}-\frac{1}{(3x+y)^2}}:\dfrac{\frac{20xy}{x^2-25y^2}}{\frac{1}{(x-5y)^2}-\frac{1}{(x+5y)^2}}$

481. Die Formel $(a+b):c=a:c+b:c$ ist unter Verwendung des Distributivgesetzes zu beweisen. Gilt diese Formel für jedes reelle c?

482. Im Hinblick auf die in Aufgabe **481.** bewiesene Formel ist zu berechnen:

a) $(60a^2+25a^3+100a^4):5a$ **b)** $(16ab^2-32a^2b+4ab):(-4ab)$

c) $(85a^3x+95a^4x^2+115a^5x+40a^2):5a$ **d)** $(-72x^4y^6+81x^3y^7-63x^4y^8):(-9x^2y^3)$

e) $(45abc+18a^2b^2c^2-27a^3b^3c+81a^4bc):(-9abc)$

f) $(25a^4b^4-15a^2b^4+35a^4b^3-45a^3b^4-65a^2b^5):(-5a^2b^3)$

g) $(-63x^7y^5+54x^7y^3+45x^6y^4-39x^7y^4+21x^6y^3):(-3x^3y^2)$

h) $(-96a^5b^2-36a^4b^3-84a^4b^2+108a^3b^4+24a^3b^3-48a^3b^2):(+12a^3b)$

483. Die rechte Spalte ist — entsprechend der Arbeitsanweisung und in Analogie zur linken Spalte — zu vervollständigen:

a) $363 : 33 = ?$

$(300 + 60 + 3) : (30 + 3) =$

| $572 : 22 = ?$
| $(500 + 70 + 2) : (20 + 2) =$

1. Das erste Glied des Divisors ist durch das erste Glied des Dividenden zu dividieren:

$(300 + 60 + 30) : (30 + 3) = 10$ | $(500 + 70 + 2) : (20 + 2) =$

2. Das Produkt aus dem „Teilquotienten" und dem Divisor ist vom Dividenden zu subtrahieren:

$(300 + 60 + 3) : (30 + 3) = 10$
$-\underline{(30 + 3)}$
$30 + 3$

| $(500 + 70 + 2) : (20 + 2) =$
| ________

3. Nun wird weiter so wie unter 1. und 2. beschrieben vorgegangen:

$(300 + 60 + 3) : (30 + 3) = \mathbf{10 + 1}$
$-\underline{(300 + 30)}$
$30 + 3$
$-\underline{(30 + 3)}$
0 Rest

Probe: $11 \cdot 33 = 363$

| $(500 + 70 + 2) : (20 + 2) =$
| ________
| ________
| Rest
| **Probe:**

b) $(27 + x^3) : (x + 3) = ?$ | $(-64 + x^3) : (x - 4) = ?$

1. Zunächst wird nach fallenden Potenzen der Variablen x geordnet:

$(x^3 + 27) : (x + 3)$

2. Das erste Glied des Divisors ist durch das erste Glied des Dividenden zu dividieren:

$(x^3 + 27) : (x + 3) = x^2$

3. Das Produkt aus dem „Teilquotienten" und dem Divisor ist vom Dividenden zu subtrahieren:

$(x^3 + 27) : (x + 3) = x^2$
$-\underline{(x^3 + 3x^2)}$
$-3x^2$

4. Nun wird weiter so wie unter 2. und 3. beschrieben vorgegangen:

$(x^3 + 27) : (x + 3) = \mathbf{x^2 - 3x + 9}$
$-\underline{(x^3 + 3x^2)}$
$-3x^2$
$-\underline{(-3x^2 - 9x)}$
$9x + 27$
$-\underline{(9x + 27)}$
0 Rest

Probe: $\underline{(x^2 - 3x + 9)(x + 3)}$
$x^3 - 3x^2 + 9x$
$\underline{+3x^2 - 9x + 27}$
$x^3 \qquad\qquad +27 = \mathbf{x^3 + 27}$

| **Probe:**

483. (Fortsetzung)

c) $(x^2-6x+5):(x-1)=\mathbf{x-5}$

$-(x^2-x)$

$-5x+5$

$-(-5x+5)$

0 Rest

Probe: $(x-5)(x-1)=\mathbf{x^2-6x+5}$

$(x^2-10x+21):(x-3)=$

Probe:

d) $(8x^2-26x-8):(4x+1)=2x-7$

$-(8x^2+2x)$

$-28x-8$

$-(-28x-7)$

-1 Rest

$(15x^2-2x-9):(3x+2)=$

Hinweis: Das Verfahren wird abgebrochen, wenn die höchste Potenz der Variablen im Rest **kleiner** ist als die höchste Potenz der Variablen im Divisor.

Resultat:
$(8x^2-26x-8):(4x+1)=\mathbf{2x-7-\frac{1}{4x+1}}$

Probe: $\left(2x-7-\frac{1}{4x+1}\right)(4x+1)=$

$=(2x-7)(4x+1)-\frac{1}{4x+1}(4x+1)=$

$=8x^2-26x-7-1=\mathbf{8x^2-26x-8}$

Resultat:
$(15x^2-2x-9):(3x+2)=$

Probe:

Im Hinblick auf Aufgabe **483.** ist zu berechnen:

484. a) $(a^3+125):(a+5)$
b) $(x^3-216):(x-6)$
c) $(35+x^2-12x):(x-5)$
d) $(6x^2-10x-6):(3x+1)$
e) $(x^4-y^4):(x+y)$
f) $(x^5-y^5):(x-y)$
g) $(60x^4-11x^3+11x^2+10x):(2+5x)$
h) $(6x^5+13x^4-17x^3-5x^2+3x):(x+3)$

485. a) $(16a^6-17a^4+104a^5+33a^3+14a^2):(a^2+7a+2)$
b) $(15x^6+13x^5-20x^4+17x^3-x^2+4x):(5x^2+x+1)$
c) $(40x^5+56x^4+69x^3+88x^2+62x+15):(8x^3+9x+5)$
d) $(21x^8+44x^7-11x^6-17x^5+23x^4-6x^3):(5x+3x^2-2)$
e) $(2a^5+33a^4+35a^3+55a^2-4a+32):(3a+2a^2+4)$
f) $(5y^9+5y^8+9y^6+6y^5+2y^4+4y^3+2y^2):(y^3+y^2+1)$
g) $(x^8-10x^7+28x^6+12x^2-29x^5-36x+10x^4+24):(x^2-3x+2)$
h) $(30a^{10}+45a^9+27a^8+63a^7-21a^6-18a^4-27a^3+21a^2+18a-6):(6a^2+9a-3)$

Vermischte Aufgaben

486. Wie heißt die Summe der Terme **a)** $3x$, $4x$ **b)** $5a^2$, $-3a^2$ **c)** a, b **d)** $a+b$, $a-b$?

487. Wie heißt das Produkt der Terme **a)** $3x$, $4x$ **b)** $5a^2$, $-3a^2$ **c)** a, b **d)** $a+b$, $a-b$?

488. Gegeben ist die natürliche Zahl n. Wie lautet **a)** die um 1 größere Zahl **b)** die um 1 kleinere Zahl **c)** das Doppelte der Zahl n?

489. Wie lautet das Zwanzigfache der Differenz $a-b$?

490. Gegeben ist die Zahl r. Wie heißt **a)** die um 4 größere Zahl **b)** die um 5 kleinere Zahl **c)** das 7-fache von r **d)** der neunte Teil von r **e)** die vierte Potenz von r?

491. Es ist arithmetisch auszudrücken, dass das Dreifache der Zahl a um den fünften Teil von b vermindert werden soll.

492. Gerald ist um 29 Jahre jünger als sein Vater. Wenn Geralds Vater p Jahre alt ist, ist Gerald ..... Jahre alt.

493. Eine Portion Pommes frites und ein Glas Cola kosten zusammen 4 Euro. Wenn b die Kosten der Pommes frites repräsentieren, kostet das Cola ......

494. 3, 5, 7 sind aufeinander folgende **ungerade** Zahlen. Wenn a eine ungerade Zahl ist, heißen die ihr nachfolgenden ungeraden Zahlen ..... und .....

495. 2, 4, 6 sind aufeinander folgende **gerade** Zahlen. Wenn a eine gerade Zahl repräsentiert, heißen die ihr nachfolgenden geraden Zahlen .... und .....

496. n sei eine von Null verschiedene natürliche Zahl. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

○ **a)** 2n ist eine gerade Zahl. ○ **b)** $2n+1$ ist eine ungerade Zahl.

○ **c)** $2n-1$ ist eine ungerade Zahl. ○ **d)** $2n+2$ ist eine ungerade Zahl.

497. Die letzten zwei Glieder sind in eine Klammer, vor der das Vorzeichen des vorletzten Gliedes stehen soll, einzuschließen:

a) $x-5y+2z$ **b)** $4p+3q-2r$ **c)** $a-0{,}2b+4c-\frac{1}{5}d$

d) $\frac{1}{3}u-\frac{4}{5}v-3w-0{,}5$ **e)** $-a-b$ **f)** $0{,}25f+g-3h+\frac{1}{4}i$

498. **a)** $(2r)^2+2r^2$ **b)** $(4s)^2-4s^2$ **c)** $(5t)^3-5t^3$ **d)** $(3u)^4-3u^4$

Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ist zu berechnen:

499. **a)** 1^n **b)** 0^n **c)** $(-1)^{2n}$ **d)** $(-1)^{2n-1}$

500. **a)** $(-1)^{2n+1}$ **b)** $1-(-1)^{2n}$ **c)** $1+(-1)^{n+3}$ **d)** $\frac{1+(-1)^{n+1}}{2-(-1)^n}$

501. Es ist zu zeigen, dass für $m=a+b$ und $n=ab$ folgende Formeln gelten:

a) $a^2+b^2=m^2-2n$ **b)** $a^3+b^3=m^3-3mn$ **c)** $a^4+b^4=m^4-4m^2n+2n^2$

502. „Die Differenz der Quadrate zweier aufeinander folgender natürlicher Zahlen ist gleich der Summe dieser Zahlen." Wie kann man diesen Satz beweisen?

503. Der folgende Satz ist zu beweisen: „Das Produkt aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz der Quadrate der beiden Zahlen."

504. **a)** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{3x}{4}+1\right)^2$ **c)** $\left(\frac{5x}{7}-\frac{4}{5}\right)^2$

505. $\left(\frac{●}{■}-\frac{■}{●}\right)^2=?$, wobei ● und ■ stellvertretend für ganze Zahlen stehen. Welche Werte dürfen die Zeichen ● und ■ nicht annehmen?

Bei den nachstehenden Aufgaben ist soweit wie möglich zu faktorisieren:

506. **a)** $(a+b)^3+2(a+b)^2$ **b)** $6a^2(z-7)+2z-14$

507. **a)** $x^2(-2a+3b)-3y^2(2a-3b)$ **b)** $a^2(a-x)+x^2(x-a)$

508. **a)** $a^2(y+5)-y-5$ **b)** $x^2-\frac{5x}{4}+\frac{25}{64}$

Die Richtigkeit der Formeln $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ und $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ ist zu überprüfen, bevor die folgenden Aufgaben unter Anwendung dieser Formeln zu faktorisieren sind:

509. **a)** a^3-8b^3 **b)** x^3+1 **c)** $8+a^3$

510. **a)** x^3-27 **b)** $8a^3+27b^3$ **c)** $64a^3-125b^3$

511. **a)** $216x^3+8y^3$ **b)** $1-512y^3$ **c)** $x^{12}-1$

Bei den Aufgaben **512.** bis **519.** sind die Ergebnisse mit positiven Exponenten darzustellen:

512. $\left[\frac{2\cdot 5^{-3}}{8(x-1)^{-1}}\right]^{-2}:\left[\frac{3\cdot 4^{-1}\cdot 5^3}{(x-1)^2}\cdot\frac{9\cdot 4^{-5}}{5^3(x+1)^{-2}}\right]$

513. $\left[\frac{3b^{-3}}{2a(x-y)^{-1}}\right]^{-3}:\left[\frac{(2a^{-1}b^3)^2}{(x-y)^4}:\frac{9a^{-5}b^{-3}}{(x+y)^{-1}}\right]$

514. $\left[\left(\frac{a^{-2}+b^{-2}}{a^2b^2}\right)^{-1}-\left(\frac{b^4-a^4}{2a^4b^6}\right)^{-1}+\left(\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2}\right)^{-1}\right]^2$

515. $\left[\left(\frac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-2}y^{-2}}\right)^{-1}+\left(\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-2}y^{-2}}\right)^{-1}+\left(\frac{x^4-y^4}{2y^2}\right)^{-1}\right]^3$

516. $\left\{\left[\frac{x^2-y^2}{(a-b)^{-3}}\right]^{-2}\frac{(a^2-b^2)^6}{(x+y)^{-2}}\cdot\frac{(x-y)^{-2}}{(a+b)^6}\right\}:(x-y)^{-4}$

517. $\left\{\frac{p-q}{(a+b)^{-1}}\left[\frac{p^2-q^2}{(a-b)^5}\right]^{-1}\cdot\frac{[(a^2-b^2)^{-1}]^5}{(p+q)^{-1}}\right\}:(a+b)^{-4}$

518. $\left\{\left[\frac{9(a+b)(x^2-y^2)^{-1}}{2(a-b)^{-3}(x-y)}\right]^{-2}:\frac{(2a)^2}{[3(a+b)(a-b)^2]^3}\right\}\cdot\frac{a^2(x^2-y^2)^{-1}}{(x-y)^3b^{-1}}$

519. $\left\{\left[\frac{3x^3(a^2+2ab+b^2)}{4a(x-y)^{-2}}\right]^2:\left[\frac{8ax^{-2}(x+y)(a-b)}{9b^{-1}(a^2-b^2)^0}\right]^{-3}\right\}\cdot\frac{81[b(x^2-y^2)]^{-3}}{32a(a^2-b^2)^4}$

520. Es ist zu zeigen: $\frac{1-x^2}{x^n}+\frac{1}{x^{n-2}}=\frac{1}{x^n}$

521. Text wie Aufgabe **520.** für $\frac{3}{\delta^{p-1}\Omega^{p-2}}+\frac{1}{p^0\Omega^{p-3}}-\frac{\delta^{-p}\Omega^{-p}}{(\delta+\Omega)^{-3}}+\frac{1}{\delta^{p-3}\Omega^p}+\frac{3}{\delta^{p-2}\Omega^{p-1}}=0$

522. Ohne Taschenrechner ist zu berechnen:

a) $0{,}25^{-2}$ **b)** $(-0{,}125)^{-4}$ **c)** $(-0{,}5)^{-3}$ **d)** $0{,}625^{-3}$

523. **a)** $\frac{7a^2b^{-1}}{3x^{-1}a^{-3}}:\frac{14a^4b^{-1}x^3}{6a^{-1}b(a^{-4}x^{-2})^0x^2}=?$ **b)** $\frac{91^2(mn^{-1})^3}{143mx^3y^2}:\frac{11^{-2}\cdot 77m^2(xy^2)^{-1}}{13^{-1}(nx)^2}=?$

524. $x^{n-2}+x^{n-1}+x^n+x^{n+1}$, $x>0$, $n>0$. Es ist **a)** x **b)** x^2 **c)** $\frac{1}{x}$ **d)** die höchste vorkommende Potenz **e)** die niedrigste vorkommende Potenz herauszuheben.

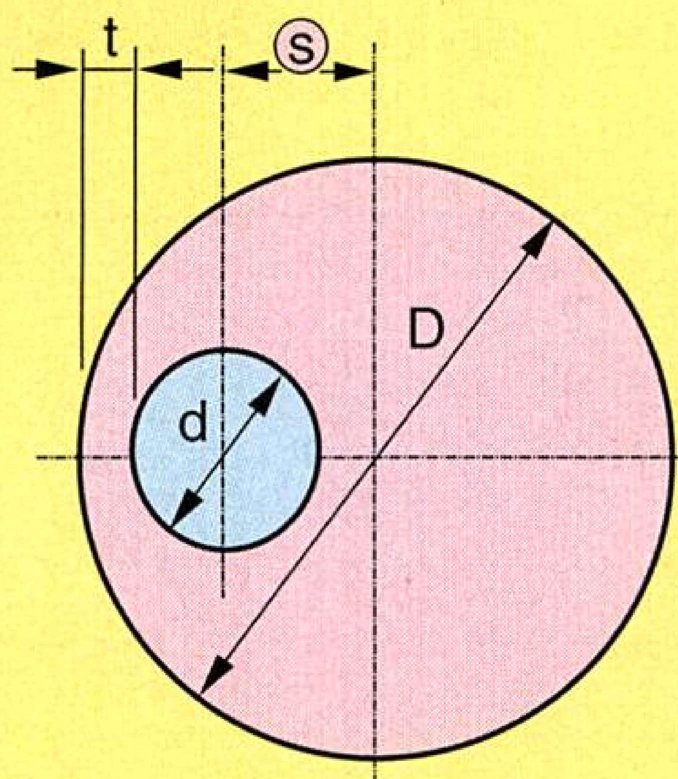
525. $w^{r-5}+w^{r+5}+w^5+w^{r-3}$, $w<0$, $r>0$. Es ist **a)** w **b)** w^2 **c)** $\frac{1}{w}$ **d)** die höchste vorkommende Potenz **e)** die niedrigste vorkommende Potenz herauszuheben.

9. Problemstellungen der Technik

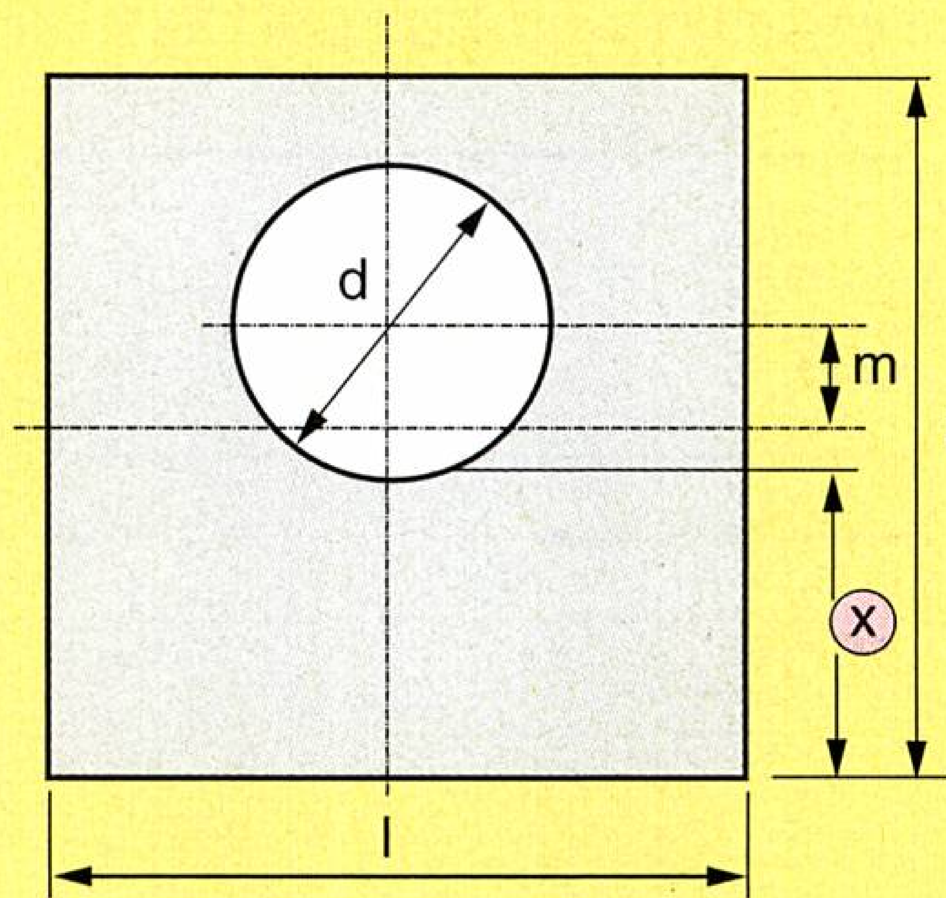
Unter dem Titel „Problemstellungen der Technik" bringen wir am Ende einzelner Hauptkapitel anwendungsorientierte Aufgaben, die nach Fachrichtungen gegliedert sind. Diese Aufgaben fallen außerhalb des eigentlichen Mathematiklehrstoffes und setzen teilweise Kenntnisse voraus, die an der jeweiligen Fachrichtung der Mittleren und Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten in anderen Unterrichtsgegenständen vermittelt werden. Eine Abstimmung auf den Unterricht der betreffenden Gegenstände ist unbedingt notwendig.

Maschineningenieurwesen/Mechatronik

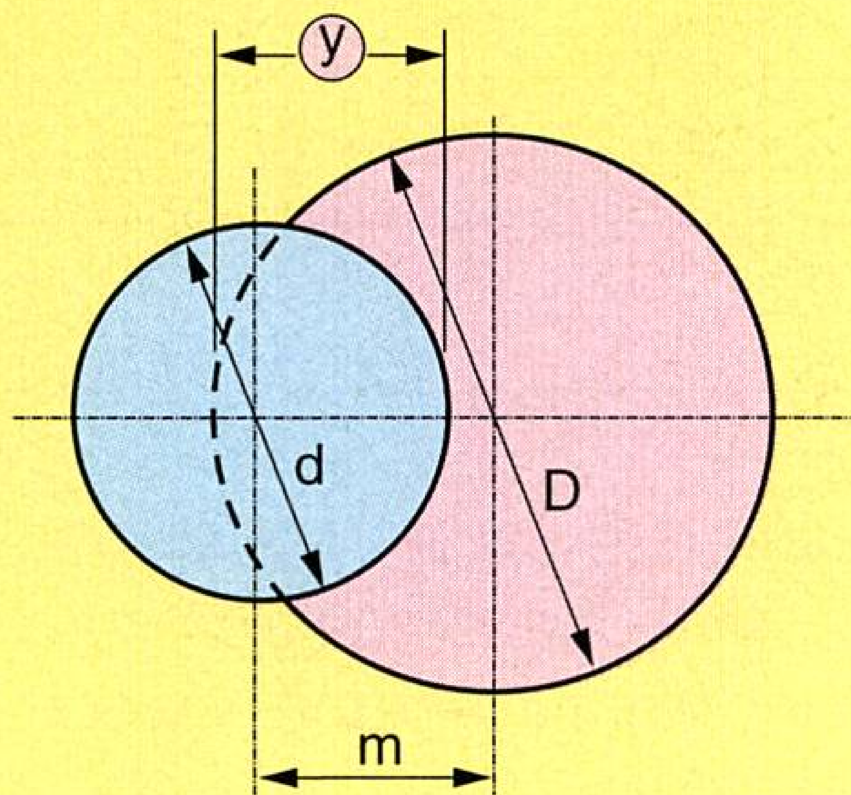
526. a) Wie groß ist der Abstand s des Mittelpunktes der Exzenterscheibe von dem der Welle?
D = 42 mm, d = 13 mm, t = 3,5 mm



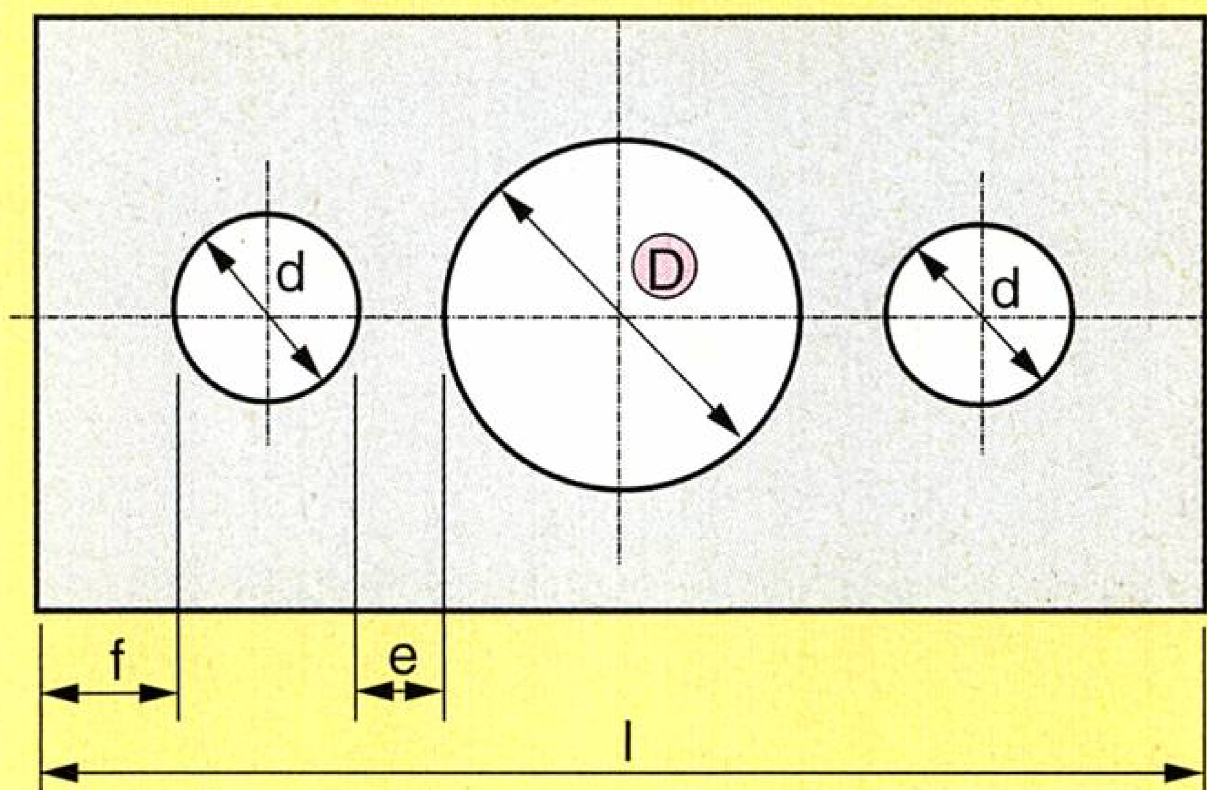
b) Der Abstand x der außermittigen Bohrung ist zu berechnen, wenn l = 44,5 mm, d = 19,26 mm und der Mittenabstand m = 6,88 mm beträgt.



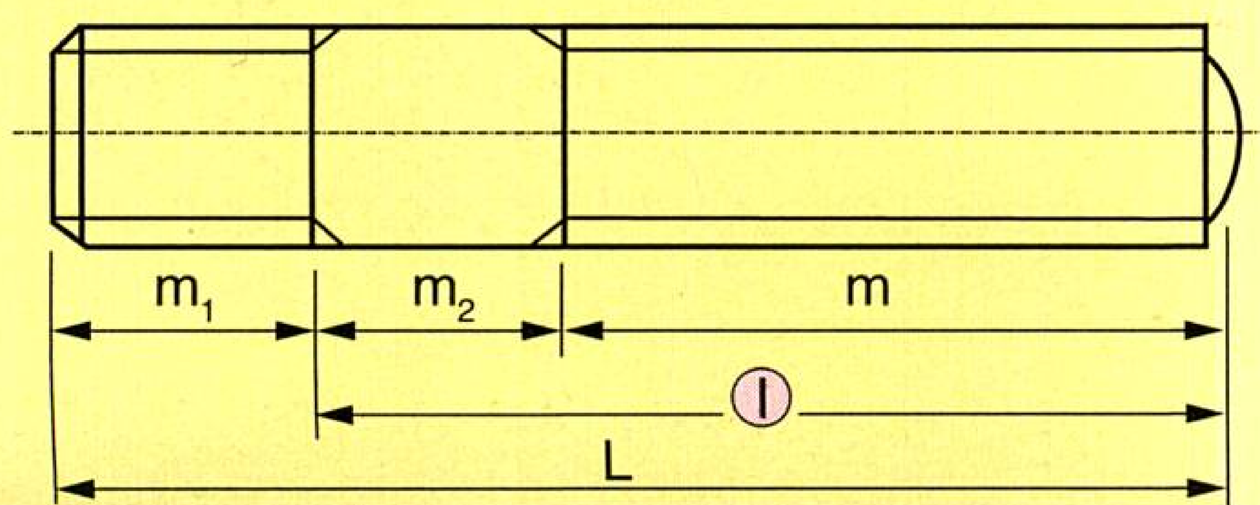
527. a) Wie groß ist der Abstand y der sich überdeckenden Scheiben?
(1) Allgemein mit den Variablen d, D, m
(2) Für m = 5 mm, d = 8 mm, D = 12 mm



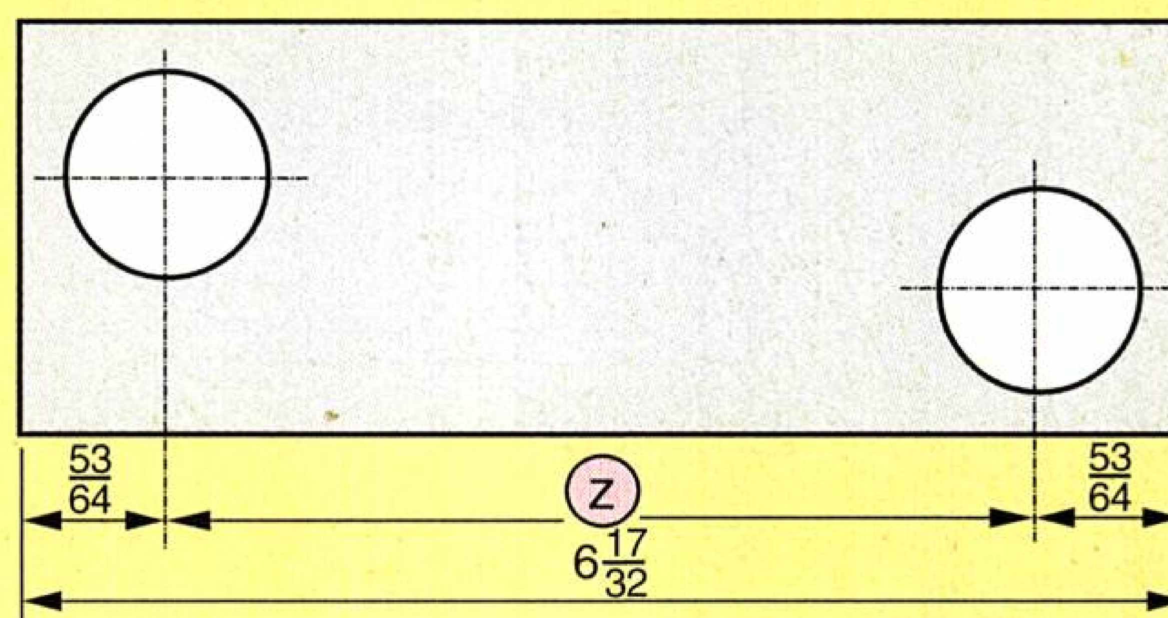
b) Wie groß ist der Durchmesser D der mittleren Bohrung? f = 82 mm, d = 114 mm, e = 53 mm, l = 720 mm.



528. a) Stiftschraube:
Die Länge m des rechten Gewindes beträgt 13 mm. Die linke Gewindelänge m_1 am Einschraubende soll $\frac{2}{9}$ der Gesamtlänge L und die Zwischenlänge m_2 soll $\frac{5}{12}$ von L betragen. Wie groß ist l?

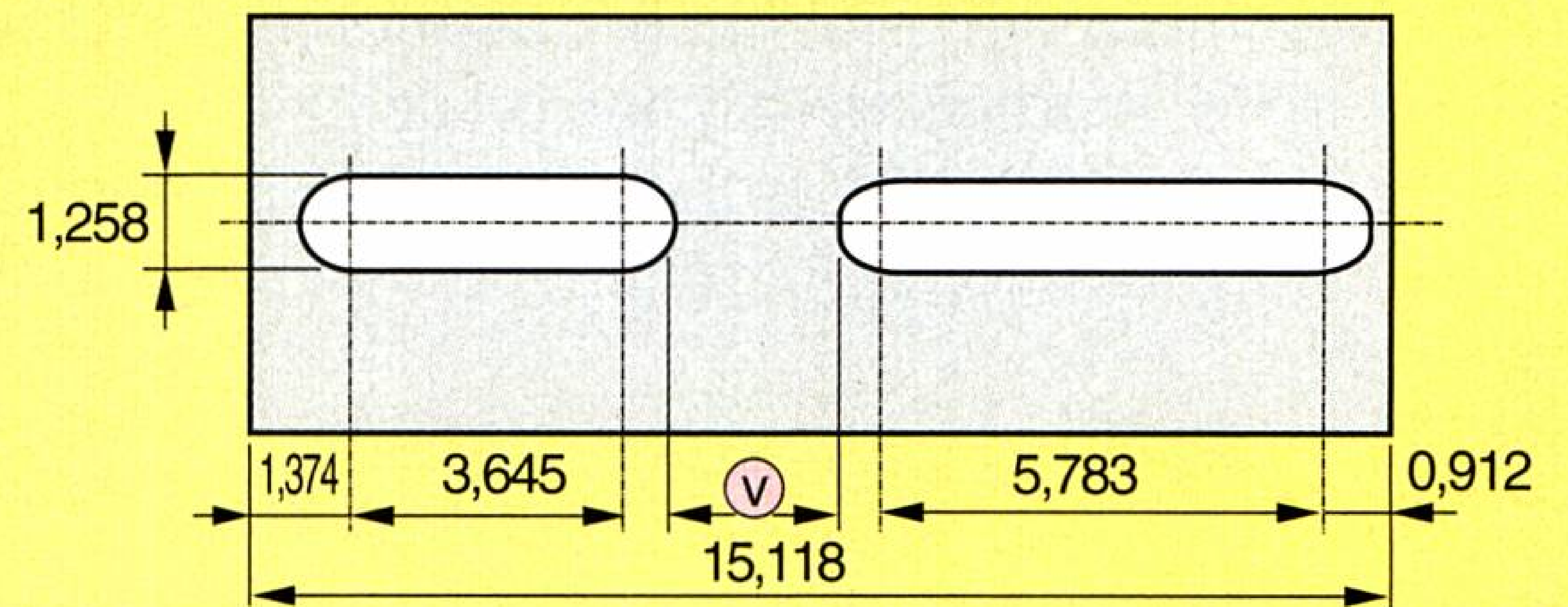


b) Flachstahl mit zwei Bohrungen:
(Maßeintragungen in Zoll: 1" = 25,4 mm)
Man berechne z in Zoll und in Millimeter.



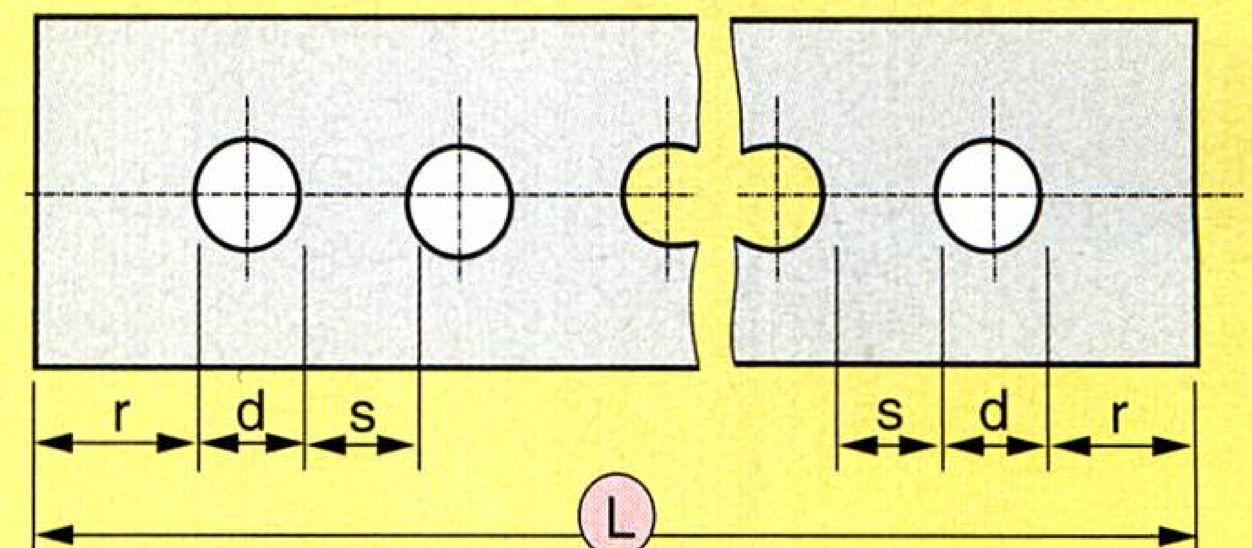
529. a) **Anordnung zweier Bolzen:**
(Bemaßungen in Zoll)
u ist in Zoll und in Millimeter zu ermitteln.

b) **Schiene mit zwei Langlöchern:**
(Bemaßungen in Zoll)
v ist in Zoll und in Millimeter zu berechnen.



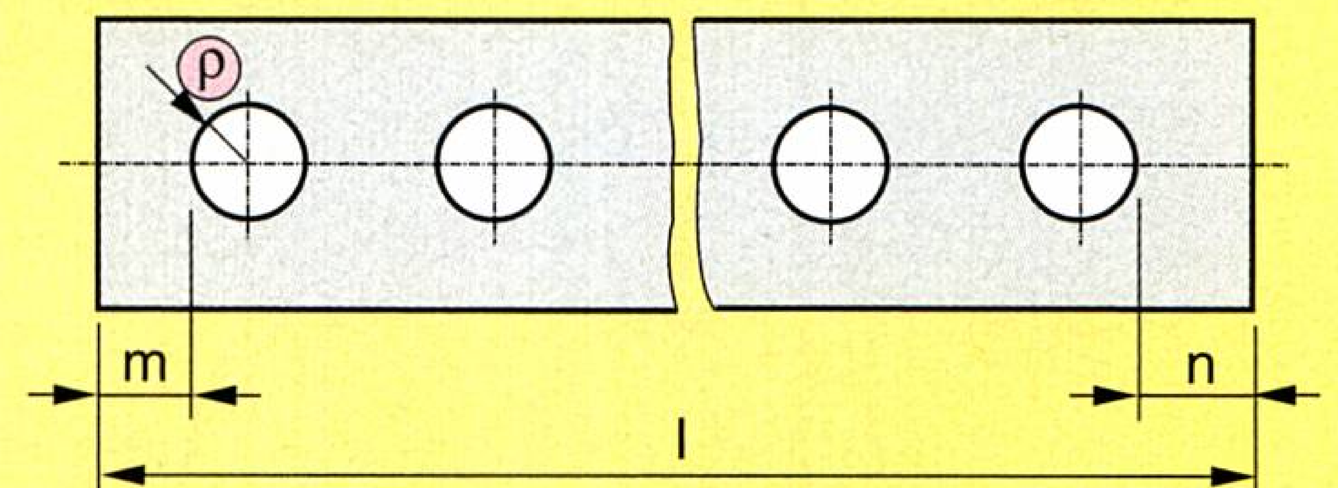
530. a) **Lasche mit drei Bohrungen:**
(Bemaßungen in Zoll)
Man ermittle w in Zoll und in Millimeter.

b) Ein verzinktes Grobblech soll mit 32 Bohrungen versehen werden. Welche Länge L ist zu wählen, wenn die Durchmesser der Bohrungen d = 30 mm betragen sollen und die Abstände r = 44 mm und s = 31 mm sind?



531. a) Welcher Mittelabstand h ist zu wählen, wenn der Flachstahl 17 Bohrungen erhalten soll und l = 450 mm, f = 37 mm und g = 45 mm sind?

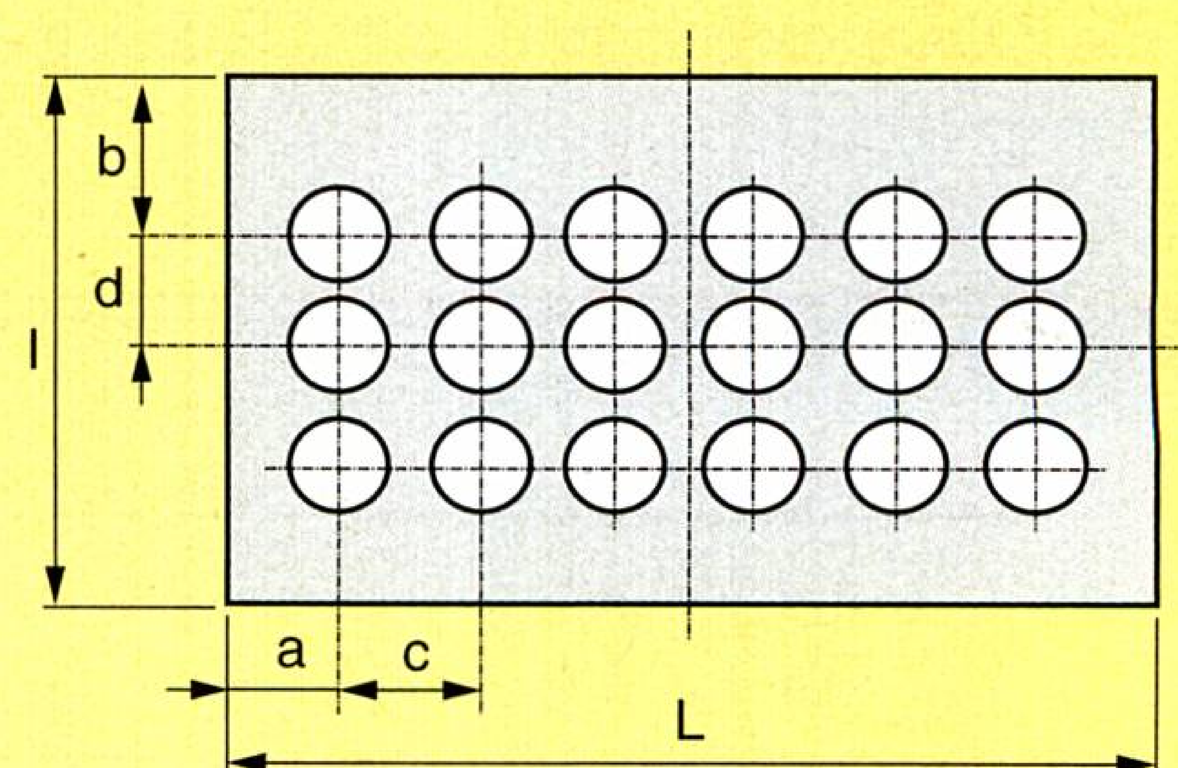
b) Wie groß ist der Radius ρ einer Bohrung zu wählen, wenn der Flachstahl (l = 735 mm) 18 Bohrungen erhalten soll, der Abstand zwischen zwei Bohrungen um 2 mm größer als der Durchmesser sein soll und m = 16 mm und n = 20 mm ist?



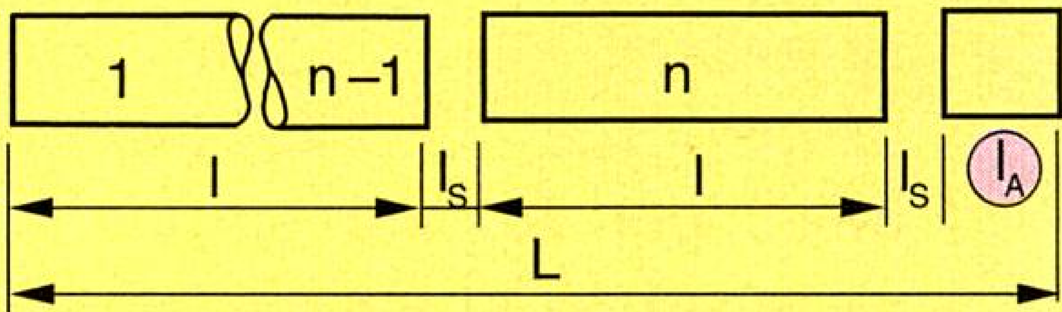
532. a) Aus einer quadratischen Platte (l = 279,5 mm) sollen 16 kreisförmige Stücke auf Grund einer symmetrischen Anordnung geschnitten werden. Welchen Durchmesser D müssen die Kreise haben?

b) Wie viele Bohrungen können auf einer Blechplatte nach dem Schema der nachstehenden Figur untergebracht werden, wenn folgende Maße vorliegen:
L = 408 mm, l = 172 mm, a = 15 mm,
b = 20 mm, c = 18 mm, d = 12 mm?

Anleitung: Die Gesamtanzahl ergibt sich, wenn man die Anzahl der Bohrungen an der Längsseite (x_1) mit der an der Breitseite (x_2) multipliziert.

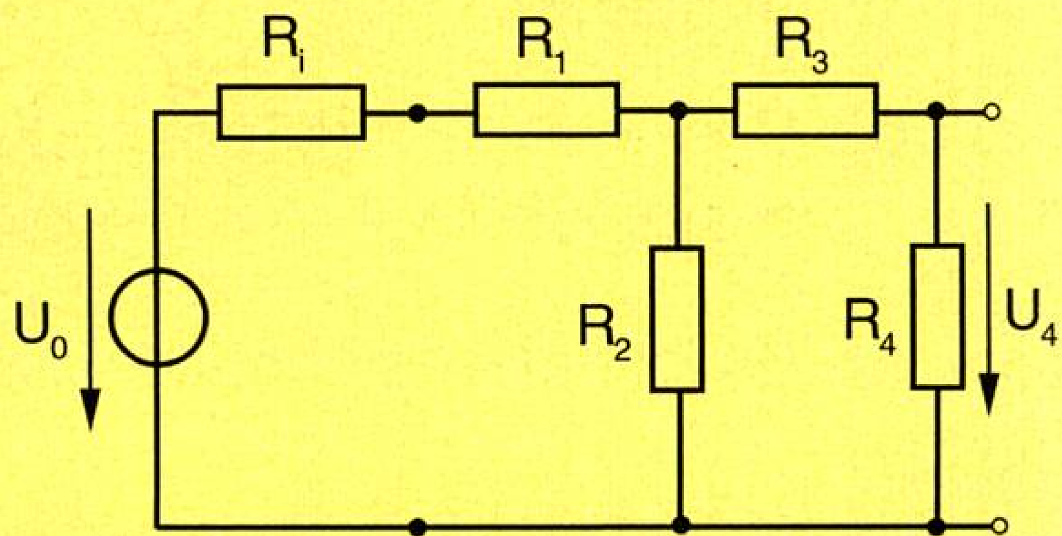


533. **Schneiden von Stangenmaterial:**
Von einer $L = 5800\,mm$ langen Stahlwelle sind Stücke von $l = 178\,mm$ Länge abzuschneiden. Die Schnittbreite l_S der Säge beträgt 2,5 mm. Man berechne **a)** die Anzahl n der abgeschnittenen Teile mit der Länge l **b)** die Länge l_A des Reststücks **c)** die Fertiglänge l_F (Summe der Einzellängen) **d)** den gesamten Werkstoffverlust l_V (Reststück und Schnittabfall) **e)** den prozentuellen Anteil p des Werkstoffverlustes l_V bezüglich der Rohlänge L.



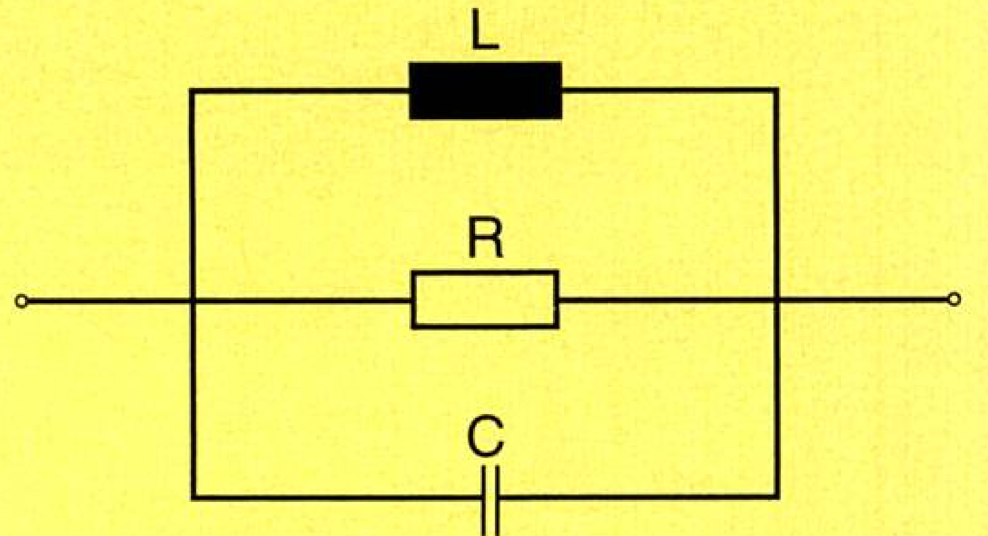
Elektrotechnik/Elektronik

534. Gegeben ist eine Spannungsquelle mit $U_0 = 12\,V$ Leerlaufspannung und dem Innenwiderstand $R_i = 5\,\Omega$. Diese liegt an einem Widerstandsnetzwerk mit **a)** $R_1 = 20\,\Omega$, $R_2 = 100\,\Omega$, $R_3 = R_4 = 60\,\Omega$ **b)** $R_1 = R_2 = 50\,\Omega$, $R_3 = 100\,\Omega$, $R_4 = 200\,\Omega$. Wenn die Ausgangsspannung U_4 nach der Formel $U_4 = \frac{R_2R_4U_0}{(R_i + R_1)(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)}$ zu berechnen ist, wie groß ist sie dann jeweils?



535. Der Parallelschwingkreis gemäß nebenstehender Schaltung ist wie folgt dimensioniert: $R = 4\,k\Omega$, $C = 50\,\mu F$, $L = 200\,mH$. Der Wirkwiderstand wird mittels $R_W = \frac{\omega^2L^2R}{\omega^2L^2 + R^2(1-\omega^2LC)^2}$ und der Blindwiderstand mittels $R_B = \frac{\omega LR^2(1-\omega^2LC)}{\omega^2L^2 + R^2(1-\omega^2LC)^2}$ berechnet. R_W und R_B sind für **a)** $\omega = 0\,s^{-1}$ und **b)** $\omega = 200\,s^{-1}$ zu bestimmen.

Anleitung: $[L] = 1H = 1\Omega\cdot s$, $[\omega] = 1(H\cdot F)^{\frac{-1}{2}} = 1s^{-1}$, H.....Henry, F.....Farad.



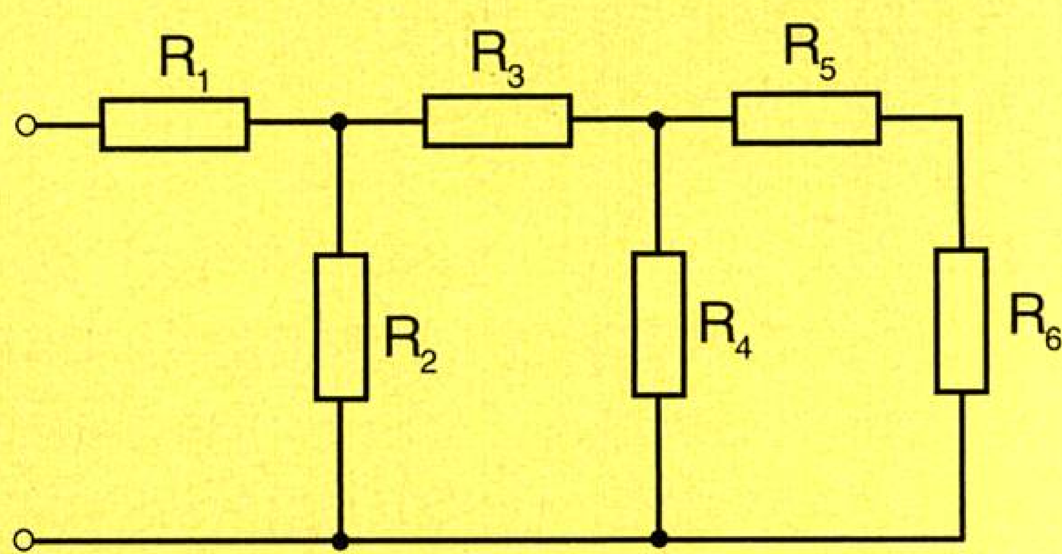
536. Der Betrag $|X_C|$ des Blindwiderstands eines Kondensators bei Wechselstrom beträgt $|X_C| = \frac{1}{2\pi fC}$. Wie groß ist $|X_C|$, wenn die Frequenz $f = 50\,Hz$ ist und der Kondensator 0,5 µF Kapazität besitzt?

Anleitung: $[f] = 1Hz = 1s^{-1}$, $[C] = 1F = 1s\cdot\Omega^{-1}$, Hz.....Hertz

537. Die nebenstehende Schaltung aus 6 Widerständen besitzt einen Gesamtwiderstand laut folgender Formel:

$$R = \frac{R_1((R_2 + R_3)(R_4 + R_5 + R_6) + R_4(R_5 + R_6)) + R_2(R_3(R_4 + R_5 + R_6) + R_4(R_5 + R_6))}{(R_2 + R_3)(R_4 + R_5 + R_6) + R_4(R_5 + R_6)}$$

Wie groß ist der Gesamtwiderstand R, wenn jeder der 6 Widerstände $R_i = 1\,k\Omega$ beträgt?



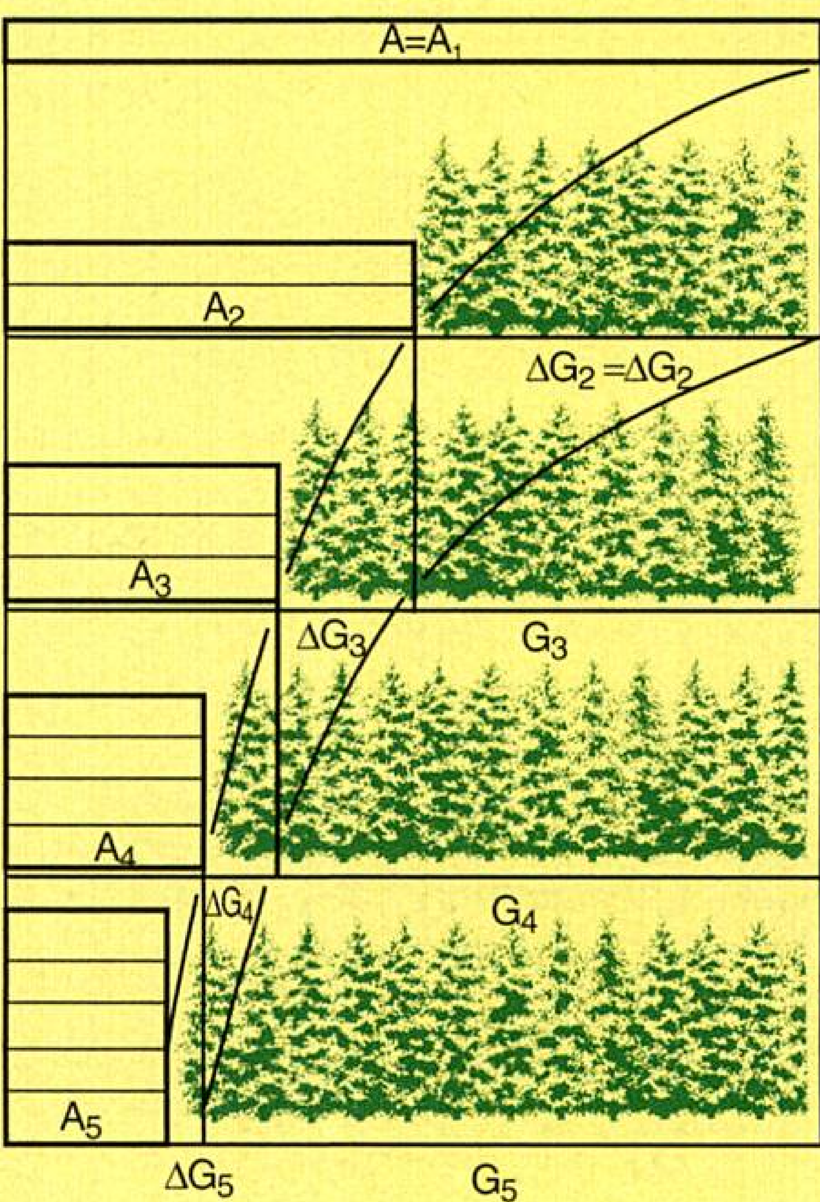
Bautechnik

538. Der Boden eines 3,19 m breiten Ganges soll verfliest werden. Wie viele quadratische Klinker[1] der Seitenlänge 15 cm müssen verlegt werden, wenn zwischen den einzelnen Klinker-Platten eine Fugenbreite von 10 mm bestehen soll und diese an der Wand des Ganges fugenlos anliegen?

539. Kitt auf PVC-Basis verformt sich rein plastisch, seine Dehnung ε soll 0,05 betragen. Es besteht die Absicht, eine Horizontalfuge eines 2 m hohen Wandverbaus mit dem Kitt abzudichten. Wie groß ist die Fugenbreite f zu dimensionieren, wenn sich die Fugenbreite f (in mm) aus $f = \frac{L\cdot\Delta L}{\varepsilon}$ errechnet, die Längenänderung $\Delta L = 0{,}35\,mm/m$ beträgt und die Höhe L des Wandverbaus in m einzusetzen ist?

[1]) Klinker ist ein besonders hart gebrannter Ziegel.

540. Ist es sinnvoll, möglichst **hohe** Wohnbauten zu errichten? Ein beliebtes Argument ist „... durch Häufung von Stockwerken bei Wohnbauten gewinnt man Grünflächen". Heißt das nun, dass man die Geschoße in **beliebiger** Anzahl stapeln darf? Um diese Fragen zu beantworten, veranschaulichen wir uns folgende Situation: Möchte man eine zu schaffende Wohnfläche A ebenerdig anordnen, würde das eine Grünfläche der Größe A benötigen. Werden n Geschoße vorgesehen, so beträgt die bebaute Fläche $A_n = \frac{A}{n}$ (vgl. Seite 101, Aufgabe **745**.).



a) Wie groß ist der Gewinn G_n an Grünfläche eines n-stöckigen Gebäudes gegenüber einem einstöckigen Gebäude gleicher Wohnfläche A?

b) Wie viel Grünfläche ΔG_n gewinnt man beim Übergang von n-stöckige auf (n+1)-stöckige Bauten gleicher Wohnfläche A?

c) Es ist nebenstehende Tabelle anzulegen ($1 \leqslant n \leqslant 10$)

$a_n = \frac{A_n}{A} \cdot 100\%$, $g_n = \frac{G_n}{A} \cdot 100\%$, $\Delta g_n = \frac{\Delta G_n}{A} \cdot 100\%$

Mit Hilfe der angelegten Tabelle versuche man, sich ein Urteil über das eingangs gestellte Problem zu bilden!

n	A_n	a_n %	G_n	g_n %	ΔG_n	Δg_n %
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.

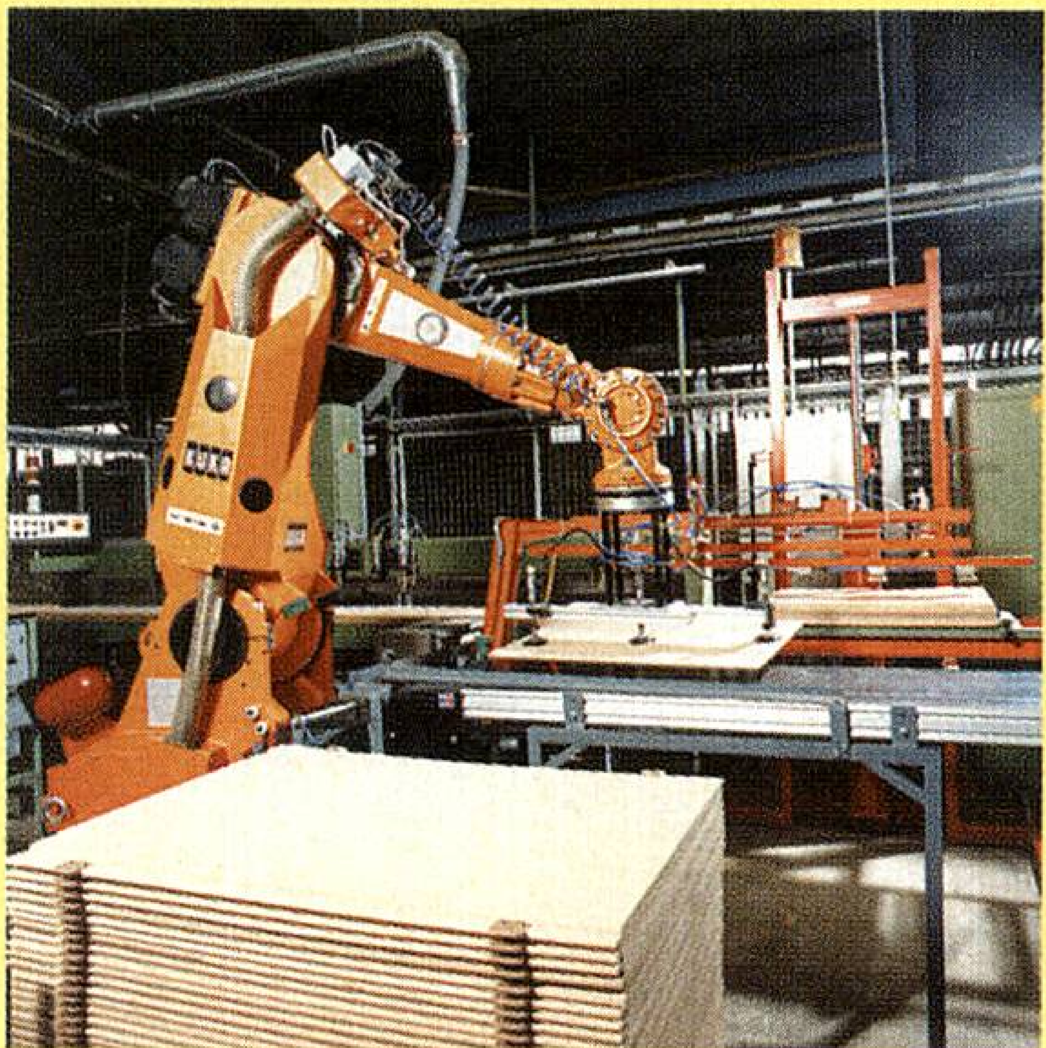
Wirtschaftsingenieurwesen

541. Ab einer Einkaufsmenge m von 1000 Stück wird beim Ankauf von Rechnerchips ein Preisnachlass von p = 30% gegenüber dem Einzelpreis e gewährt. Man stelle einen Term auf, der

a) den Einkaufspreis von m Stück zum Einzelpreis e angibt,

b) den um p% ermäßigten Einkaufspreis von m Stück angibt.

c) Welchen Wert haben die Terme von **a)** und **b)** für die Werte: m = 2000, e = 179,50, p = 30?



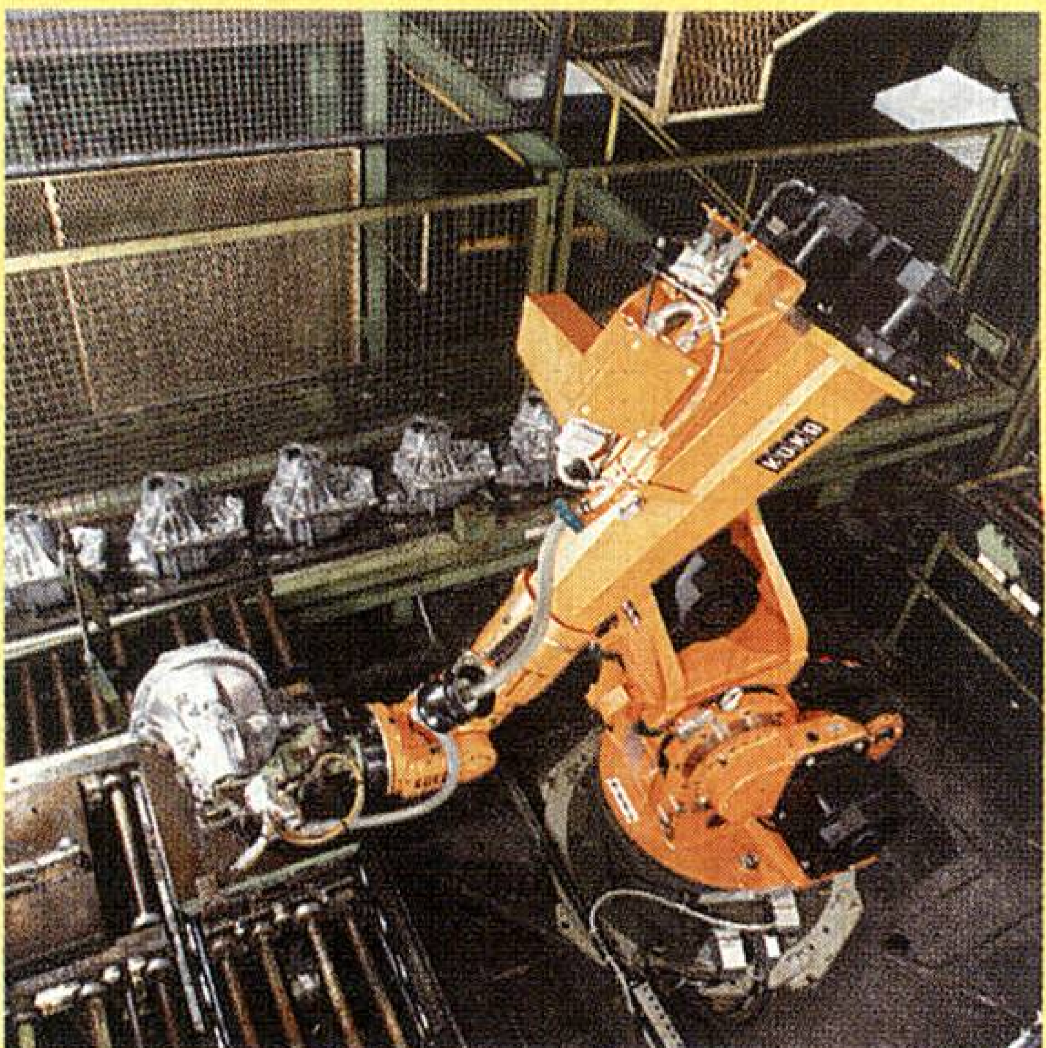
542. Zwei Fertigungseinheiten zu je 5 Arbeitern sind in zwei Schichten beschäftigt, integrierte Schaltkreise (ICs) in gedruckte Schaltungen einzusetzen. Eine Einheit arbeitet 40 Stunden/Woche, jeder Arbeiter verursacht Lohnkosten L_1 von 3000,— Euro/Monat (inkl. aliquoter Sonderzahlungen).

a) Man formuliere unter Verwendung der Variablen L_1 einen Term, der **(1)** die Jahreskosten **(2)** die Stundenkosten darstellt.

b) Es wird rationalisiert. Ein Industrieroboter, der 80 Stunden/Woche im Einsatz ist, wird in beiden Schichten von je einem Ingenieur und einem Arbeiter gewartet. Der Roboter kostet R = 180000,— Euro, die in 5 Jahren linear abgeschrieben werden. Ein Ingenieur verursacht Lohnkosten von $L_2 = 5000$,— Euro/Monat, ein Arbeiter $L_1 = 3000$,— Euro/Monat. Man formuliere mit den Variablen L_1, L_2 und R einen Term für **(1)** die Jahreskosten **(2)** die Stundenkosten.

c) Welchen Wert haben die Terme von **a)** und **b)** für die oben angegebenen Werte? Ist der Wert in **a)** größer als jener in **b)**?

Bemerkung: Das Jahr wird zu 52 Wochen gerechnet.



Chemieingenieurwesen

543. Man berechne die relative Molekülmasse von **a)** Glukose: $C_6H_{12}O_6$ **b)** Ethanol: C_2H_5OH **c)** Monosaccharid: $C_nH_{2n}O_n$.

544. Wie viel Gewichtsprozent Wasser enthält Kristall-Soda ($Na_2CO_3 \cdot 10\,H_2O$) in erhitztem Zustand: $Na_2CO_3 \cdot n\,H_2O$ ($n \leqslant 10$) für **a)** $n = 10$ **b)** $n = 2$ **c)** allgemein?

Bemerkung: Der Punkt zwischen Na_2CO_3 und $n\,H_2O$ deutet die lose Verbindung eines Na_2CO_3-Moleküls mit $n\,H_2O$ Molekülen an.

545. Man berechne die relative Molekülmasse von

a) Chinin: $C_{20}H_{24}N_2O_2$ (Summenformel)

b) Kaliumhexacyanoferrat (II): $K_4Fe(CN)_6 \cdot 3\,H_2O$

c) Polyamid PA6: $\left[NH-(CH_2)_5-CO \right]_n$

546. Wie viel Gramm wiegen **a)** 2 mol Wasser **b)** n mol Wasser **c)** p mol Wasser gemischt mit q mol Kochsalz NaCl?

Tabelle der Ordnungszahlen (oben) und der Atomgewichte (unten) chemischer Elemente

1 H 1,008		
6 C 12,011	7 N 14,008	8 O 16,00
11 Na 22,99	16 S 32,06	17 Cl 35,46
19 K 39,096	26 Fe 55,85	

547. a) 1 mol Alkohol ($CH_3 - CH_2 - OH$) und n mol Wasser werden gemischt. Welches Gewicht hat 1 mol der Mischung?

b) Wie viel Gramm reinen Alkohol enthalten 5 mol p-prozentiger Alkohol?

c) 3 mol HCl werden in n mol Wasser gelöst. Wie viel Gewichtsprozent HCl enthält die Lösung?

548. a) Wie viel Sulfationen SO_4^{2-} sind in 500 ml einer Schwefelsäure der Konzentration $c = 0{,}1$ mol/l vorhanden?

Anleitung: In 1 mol sind ca. $6 \cdot 10^{23}$ Moleküle vorhanden.

b) Wie viel Sulfationen sind in x Litern einer Schwefelsäure der Konzentration c in mol/l vorhanden?

THINK THINK THINK ThInk THINK THINK THINK ThInk THINK ThInk THINK ThInk THINK THINK THINK THINK

THINK ThInk THINK THINK THINK ThInk THINK



549. Im Jahre 1997 verblüffte das Rechengenie Enrico Termi das Fernsehpublikum.
Vor laufender Kamera sprach er zu dem Reporter, der ihn interviewte: „Sie kennen doch Ihre eigene Schuhgröße."
„Natürlich."
„Gut, dann multiplizieren Sie diese zunächst mit 2."
„Hab' ich."
„So, jetzt geben Sie zu diesem Produkt 39 hinzu und multiplizieren das Ganze mit 50. Wenn Sie das haben, addieren Sie 47 hinzu."
„Ja! Und jetzt Herr Professor?"
„Jetzt müssen Sie nur mehr Ihr Geburtsjahr abziehen, dann sind Sie fertig."
„Ich erhalte eine vierstellige Zahl!"
„Natürlich! Aber diese Zahl hat etwas Besonderes an sich. Die ersten zwei Ziffern geben Ihre Schuhgröße an und die letzten zwei Ziffern Ihr Alter."
„Stimmt, wieso wissen Sie das?"
Ja, woher wusste Professor Termi das alles? War das nur ein Zufall?
Wer kommt dem Rechenkünstler auf die Schliche?

Anmerkung: Man beachte, dass das Gespräch im Jahre 1997 stattgefunden hat.

550. Auf einem Tisch stehen zwei Gläser. Im linken Glas ist Rotwein, im rechten Weißwein enthalten. In beiden Gläsern befinden sich die gleichen Mengen an Flüssigkeit. Zunächst wird ein Löffel Rotwein genommen und in das Nachbarglas geschüttet. Anschließend wird kräftig umgerührt und man nimmt vom Weißwein wiederum einen Löffel voll und schüttet den Inhalt in das Rotweinglas zurück.

Befindet sich jetzt im Weißwein mehr Rotwein als Weißwein im Rotwein? Oder ist es vielleicht umgekehrt?



551. Viele Firmen testen die „Computer-Intelligenz" von Bewerberinnen und Bewerbern, um deren Begabung für den Umgang mit Computern herauszufinden. Die Fähigkeit, Sachverhalte in Formeln zu fassen, ist ein wichtiger Bestandteil solcher Tests.

Wer mit Variablen und Termen umzugehen vermag, wird bei der Beantwortung der folgenden Fragen, für die maximal 12 Minuten Zeit zur Verfügung stehen, keine Schwierigkeiten haben:[1]

a) Eine Maschine verbraucht A Liter Diesel pro Stunde. Wie viele Minuten dauert es, bis B Liter Diesel verbraucht sind?

☐ (1) $\frac{B}{A}$ ☐ (2) $\frac{A}{B}$

☐ (3) $60\left(\frac{B}{60\,A}\right)$ ☐ (4) $\frac{60\,A}{B}$

☐ (5) Keine der Antworten (1) bis (4) ist zutreffend!

b) $\frac{A\,(B+C)^3}{D\,(E-F)^2} = G$

Wenn A und D mit H multipliziert werden, was lässt sich dann über G aussagen?

☐ (1) G wird größer ☐ (2) G wird kleiner

☐ (3) G bleibt unverändert

☐ (4) G ist ungleich $\frac{A\,(B+C)^3}{D\,(E-F)^2}$

c) Ein Computer kostet x,— Euro Miete für das erste Monat und y,— Euro für jedes weitere Monat. Wie hoch sind die Kosten für z Monate, wenn z eine natürliche Zahl größer 1 ist?

☐ (1) $x+zy$ ☐ (2) $(x+y)\,z$

☐ (3) $x+(z+1)\,y$ ☐ (4) $x+yz-y$

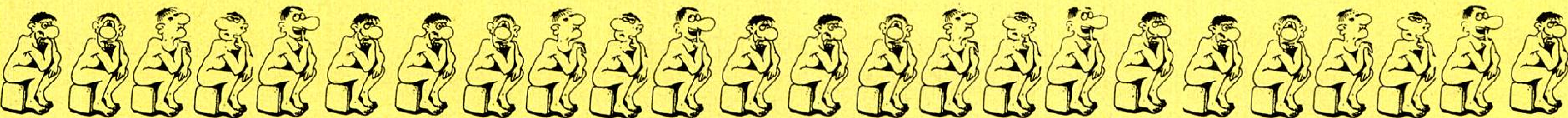
☐ (5) Keine der Antworten (1) bis (4) ist zutreffend!

d) Die Zahlen α, β, γ and δ sind natürliche Zahlen. 3α ist größer als 2β, 2β ist größer als γ und γ ist größer als δ. Welcher der nachstehenden Terme ergibt den kleinsten Wert?

☐ (1) $\frac{\delta}{2\beta}$ ☐ (2) $\frac{\delta}{3\alpha}$

☐ (3) $\frac{\gamma}{3\alpha}$ ☐ (4) $\frac{2\beta}{\gamma}$

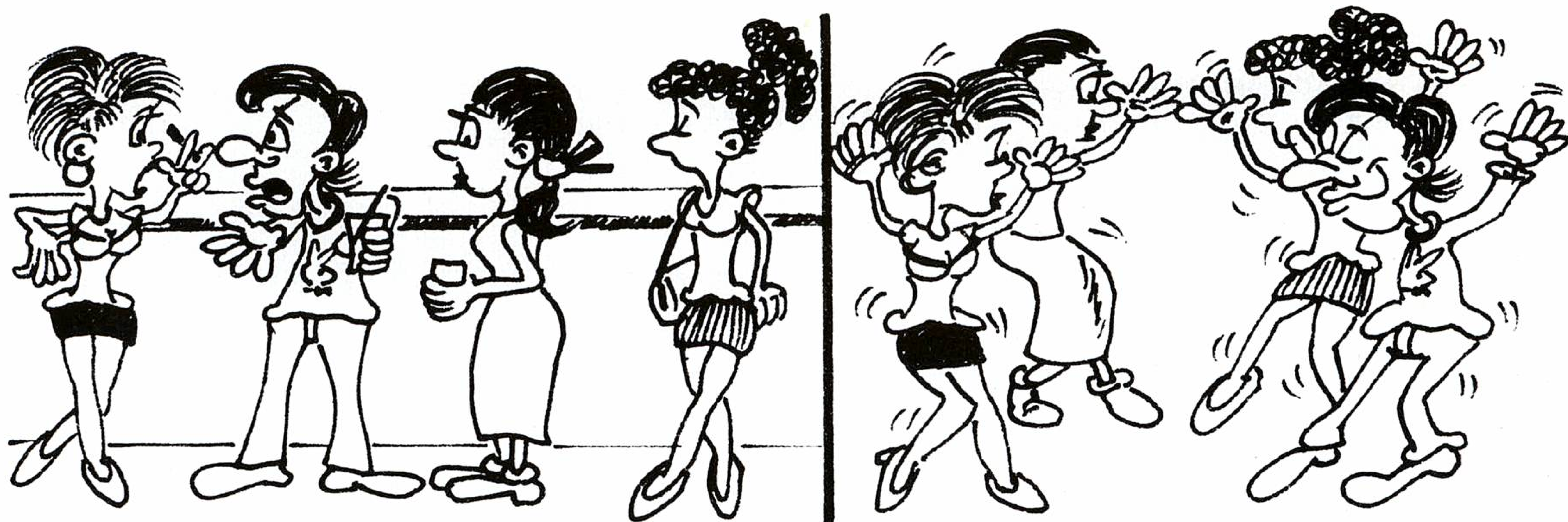
☐ (5) Es gibt keinen kleinsten Wert, wenigstens zwei der in (1) bis (4) genannten Terme sind einander gleich.



[1]) Diese Fragen verstehen sich als kleine Auswahl. Tatsächlich wird ein Test, um aussagekräftig zu sein, einige Dutzend Problemstellungen umfassen.

LINEARE GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN IN EINER VARIABLEN

1. Lineare Gleichungen in einer Variablen



Vor kurzem konnte man in einer Schülerzeitung folgenden Bericht lesen:

„... und ganz besonders toll ging es um 22 Uhr in der Disco zu: 50 Mädchen und Burschen tanzten, wobei die Burschen eindeutig in der Minderheit waren, denn auf einen Burschen kamen drei Mädchen..."

Kann man aus dieser Mitteilung entnehmen, wie viele Mädchen und wie viele Burschen um 22 Uhr tanzten?

Überlegen wir: Wenn man die Anzahl der Burschen mit x bezeichnet, so ist die Anzahl der Mädchen 3x (*„denn auf einen Burschen kamen drei Mädchen"*).

Insgesamt waren es 50 Mädchen und Burschen.

Also erhalten wir folgende Gleichung:

Burschen + Mädchen = Burschen und Mädchen insgesamt

$$x + 3x = 50$$
$$4x = 50 \qquad |:4$$
$$x = 12{,}5$$

12,5 Burschen und 37,5 Mädchen müssten es gewesen sein. Und wenn man die Probe macht, wird dieses Ergebnis bestätigt.

12,5 Burschen? Natürlich gibt es so etwas nicht! Also gibt es keine Lösung.

Von allem Anfang an hätten wir sagen sollen, **welche** Zahlen als Lösung in Frage kommen. Nur natürliche Zahlen können als Lösung im Zusammenhang mit obiger Problemstellung akzeptiert werden.

Denn es gibt nun einmal keine negative, gebrochene oder irrationale Anzahl von Menschen. Die Menge der Zahlen, die als Lösung einer Gleichung in Frage kommt, bezeichnen wir als **Grundmenge G**.

Definition:

Werden zwei Terme T_1 und T_2 durch ein Gleichheitszeichen „=" miteinander verbunden, so entsteht eine **Gleichung**.

Definition:

Die **Grundmenge G** einer Gleichung ist die Menge aller Zahlen, die als mögliche Lösungen der Gleichung vorgesehen sind.

Beispiel:

Über der Grundmenge $G = \mathbb{Z}$ ist die Gleichung $-x + 99 = 98 - 2x$ zu lösen!

Eine Gleichung bleibt „richtig", wenn man ...

① auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder

② auf beiden Seiten die gleiche Zahl subtrahiert.

Lösung:

$$\begin{aligned} -x + 99 &= 98 - 2x && \mid +2x \quad ① \\ -x + 2x + 99 &= 98 - 2x + 2x \\ x + 99 &= 98 && \mid -99 \quad ② \\ x + 99 - 99 &= 98 - 99 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Probe:

Die gefundene Lösung wird in den Linksterm T_L und in den Rechtsterm T_R eingesetzt:

$T_L(-1) = -(-1) + 99 = 1 + 99 = \mathbf{100}$

$T_R(-1) = 98 - 2(-1) = 98 + 2 = \mathbf{100}$ $\qquad T_L = T_R$ (w)

$-1 \in G$ und erfüllt die Gleichung, wie die Probe gezeigt hat. Man fasst die Menge aller Lösungen zur **Lösungsmenge L** zusammen.

Auf unser Beispiel bezogen ergibt sich: $\mathbf{L = \{-1\}}$

Definition:

Die **Lösungsmenge L** einer Gleichung ist die Menge aller Zahlen der Grundmenge, für die die Gleichung in eine wahre Aussage übergeführt wird.

Was heißt eigentlich **„eine Gleichung lösen"**?

Eine Gleichung lösen bedeutet, jene Zahl oder jene Zahlen aus der Grundmenge zu bestimmen, die an Stelle der Variablen x eingesetzt eine wahre Aussage ergeben, d. h. die Gleichung erfüllen.

Zwei Gleichungen, die bei gleichen Grundmengen die selben Lösungsmengen besitzen, heißen **äquivalente (gleichwertige) Gleichungen**. Alle Umformungen, die eine Gleichung in eine äquivalente Gleichung überführen, bezeichnet man als **Äquivalenzumformungen**.

Die linke Seite der Gleichung — der „Linksterm" T_L — muss also gleich der rechten Seite der Gleichung — dem „Rechtsterm" T_R — sein.

Beispiel:

Die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{3x}{5} - 3 = 7$ ist zu ermitteln!

Eine Gleichung bleibt „richtig", wenn man ...

③ auf beiden Seiten mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) multipliziert oder

④ auf beiden Seiten durch die gleiche Zahl ($\neq 0$) dividiert.

Lösung:

Hier ist keine Grundmenge direkt gegeben. In solchen Fällen, in denen man also die Grundmenge nicht aus dem Text der Aufgabe entnehmen kann, wollen wir die Menge $\mathbb{R}$ als Grundmenge betrachten.

$$\begin{aligned} \frac{3x}{5} - 3 &= 7 && \mid +3 \quad ① \\ \frac{3x}{5} &= 10 && \mid \cdot 5 \quad ③ \\ 3x &= 50 && \mid :3 \quad ④ \\ x &= \frac{50}{3} \end{aligned}$$

Probe:

$T_L\left(\frac{50}{3}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{50}{3} - 3 = \mathbf{7}$ (gekürzt: $\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\overset{10}{\cancel{50}}}{\cancel{3}}$) $\qquad T_R = \mathbf{7}$ $\qquad T_L = T_R$ (w)

Somit gilt: $\mathbf{L} = \left\{\frac{50}{3}\right\}$

Beispiel:

Die Lösungsmenge der Gleichung $3x-9-[-4x+5-(3x+2)]=-10$ ist in **a)** $\mathbb{N}_g$ **b)** $\mathbb{Q}$ zu ermitteln![1)]

Lösung:

Es werden die Klammern aufgelöst und gleichartige Terme zusammen gefasst:

$$\begin{aligned} 3x-9-[-4x+5-3x-2] &= -10 && \\ 3x-9-[-7x+3] &= -10 && \\ 3x-9+7x-3 &= -10 && \\ 10x-12 &= -10 && \mid +12 \quad ① \\ 10x &= 2 && \mid :10 \quad ④ \\ x &= \tfrac{2}{10} && \mid \text{Kürzen!} \\ x &= \tfrac{1}{5} && \end{aligned}$$

Probe:

$$T_L\left(\tfrac{1}{5}\right)=0{,}6-9-[-0{,}8+5-(0{,}6+2)]=-8{,}4-[+4{,}2-2{,}6]=$$

$$=-8{,}4-1{,}6=-10 \qquad T_R=-10 \qquad T_L=T_R \quad \text{(w)}$$

$\frac{1}{5}\notin\mathbb{N}_g$, während $\frac{1}{5}\in\mathbb{Q}$ ist. Es gilt somit: **a)** $L=\{\,\}$ **b)** $L=\left\{\frac{1}{5}\right\}$

Howbeit, for easie alteratiō of equations. I will propounde a fewe exāples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to auoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =====, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

1. 14.ze.—+—.15.ϕ=====71.ϕ.
2. 20.ze.——.18.ϕ=====.102.ϕ.
3. 26.ʒ—+—10ze=====9.ʒ——10ze—+—213.ϕ.

Erstmals im Jahre 1557 tritt das Gleichheitszeichen auf: im „Wettstein des Witzes“, einem Lehrbuch der Algebra. Der Autor Robert RECORDE argumentierte, dass *„nichts gleicher ist als ein Paar paralleler Linien“*.

Beispiel:

Die Lösungsmenge der Gleichung $(x-3)(x-2)=(x-5)(x-6)$ ist über der Grundmenge $G=\mathbb{N}$ zu ermitteln!

Lösung:

$$\begin{aligned} x^2-3x-2x+6 &= x^2-5x-6x+30 && \mid -x^2 \quad ② \\ -5x+6 &= -11x+30 && \mid +11x-6 \quad ① \; ② \\ 6x &= 24 && \mid :6 \quad ④ \\ x &= 4 && \end{aligned}$$

Probe:

$$T_L(4)=1\cdot 2=2 \qquad T_R(4)=(-1)(-2)=2 \qquad T_L=T_R \quad \text{(w)}$$

Es gilt somit: $L=\{4\}$

Definition:

Eine Gleichung, die in der Form $ax+b=0$ ($a, b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$) gegeben ist bzw. in diese Form übergeführt werden kann, heißt **lineare Gleichung in einer Variablen**.

Bei dem obigen Beispiel tritt erstmals die Variable x^2 auf. Dennoch zählt man solche Gleichungen — wenn sich wie hier die x^2-Potenzen (bzw. höhere Potenzen) wegheben („eliminieren“)[2)] — zu den **linearen Gleichungen** (vgl. die Definition in der Außenspalte).

Wenn in einer Gleichung die gesuchte Variable mindestens einmal im Nenner eines Bruches auftritt, spricht man von einer **Bruchgleichung**.

Gleichungen, in denen Bruchzahlen nur als Koeffizienten auftreten (wie etwa im folgenden Beispiel), sind keine Bruchgleichungen, sondern Gleichungen mit Brüchen.

---

1) *„... ist in $\mathbb{N}_g$ zu ermitteln“* ist eine andere Formulierung für *„... ist über der Grundmenge $G=\mathbb{N}_g$ zu ermitteln“*.

2) eliminare (lat.): über die Schwelle bringen.

Beispiel:
Die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{x}{5} + \frac{x-3}{2} = x - 3$ ist in $\mathbb{R}$ zu ermitteln!

Lösung:
Der Linksterm und der Rechtsterm der Gleichung werden mit dem Hauptnenner multipliziert, wobei jedes Glied der Gleichung sofort gekürzt wird. In unserem Fall wird die Gleichung mit 10 multipliziert:

$$2x + 5(x-3) = 10(x-3)$$
$$2x + 5x - 15 = 10x - 30$$
$$7x - 15 = 10x - 30 \quad | -10x + 15 \quad ② ①$$
$$-3x = -15 \quad | :(-3) \quad ④$$
$$x = 5$$

Probe:
$T_L(5) = 1 + 1 = \mathbf{2}$ $\quad T_R(5) = 5 - 3 = \mathbf{2}$ $\quad T_L = T_R$ (w)

Es gilt somit: $\mathbf{L = \{5\}}$

Definition:
Die **Definitionsmenge D** einer Gleichung ist die Menge jener Elemente aus der Grundmenge, für die die Terme der Gleichung in einen sinnvollen Zahlenwert übergehen.

Es gilt: $L \subseteq D \subseteq G$

Bei Bruchgleichungen ist die Angabe der **Definitionsmenge** notwendig.

Bei Gleichungen verwendet man für die gesuchte Variable fast immer den Buchstaben x. Dieses x kommt in der Mathematik oft vor und hat die verschiedensten Bedeutungen[1].

Friedrich TORBERG schildert in seinem Roman „Der Schüler Gerber" unter anderem wie die Aufgaben einer Mathematikschularbeit an die Tafel geschrieben werden und welche Gedanken sich die Hauptfigur des Romans, der begabte Schüler Kurt Gerber, hiezu macht:

„Schon stehen einige weiße Lettern da. Rätselhaft, wie chinesische Zauberblumen, die sich im Wasser entfalten. Weiß man, was aus ihnen werden wird? Weiß man, was dieses X hier für eine besondere Bedeutung hat? X kann so vieles bedeuten! X ist kein Buchstabe schlechthin, ja nicht einmal ein mathematisches Zeichen. X ist vielgestaltig. ... Und überall ist X. Es gibt keinen Bruchstrich, auf dem X nicht gedeiht. X ist im allgemeinen genügsam. Wenn man es richtig zu behandeln versteht, dann läßt es sich willfährig biegen und drehen, dann fällt von den tausend Früchten, die es tragen kann, just die richtige dem Sorgsamen in den Schoß.

Beispiel:
Die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{5x-13}{4x+5} = 1$ ist in $\mathbb{Q}$ zu bestimmen!

Lösung:
Um die Definitionsmenge D zu ermitteln, berechnen wir zunächst jenen Zahlenwert, für den der Nenner Null wird:

$4x + 5 = 0 \Leftrightarrow 4x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$

$-\frac{5}{4}$ ist zwar ein Element der Grundmenge G, doch ist $-\frac{5}{4}$ von vornherein als Lösung nicht möglich:

$$T_L = \frac{5\left(-\frac{5}{4}\right) - 13}{4\left(-\frac{5}{4}\right) + 5} = \frac{-\frac{25}{4} - 13}{-5 + 5} = -\frac{19{,}25}{0}$$

$-\frac{19{,}25}{0}$ ist kein definierter Zahlenwert. Die Zahl $-\frac{5}{4}$ wird somit als Lösung nicht in Erwägung gezogen.

Jene verbleibenden Elemente, für die die Terme der Gleichung in einen sinnvollen Zahlenwert übergehen, werden zur Definitionsmenge D zusammen gefasst: $D = \mathbb{Q} \setminus \left\{-\frac{5}{4}\right\}$

Wir multiplizieren nun die Gleichung $\frac{5x-13}{4x+5} = 1$ mit dem Hauptnenner $4x + 5$ und erhalten:

$$5x - 13 = 4x + 5 \quad | +13 - 4x \quad ① ②$$
$$x = 18$$

Da 18 ein Element der Definitionsmenge ist, gilt: $\mathbf{L = \{18\}}$

Wir verzichten bei diesem Beispiel auf die Probe!

---

[1]) Andererseits ist es (z. B. in der Physik) auch wichtig, Gleichungen lösen zu können, wenn die gesuchte Variable anders bezeichnet ist.

Aus dem Hausübungsheft eines Schülers:

$$\frac{1}{x-3} + \frac{4}{x+3} = \frac{6}{x^2-9} \quad | \cdot (x-3)(x+3)$$

$$1(x+3) + 4(x-3) = 6$$

$$x + 3 + 4x - 12 = 6$$

$$5x - 9 = 6 \quad | +9$$

$$5x = 15 \quad | :5$$

$$\underline{x = 3} \qquad \underline{\underline{L = \{3\}}}$$

Die Variable x wurde richtig berechnet. Warum die angegebene Lösungsmenge dennoch falsch ist, ist nach Durcharbeitung des folgenden Beispiels sicher leicht zu verstehen.

Beispiel:
Man ermittle die Lösungsmenge der Gleichung
$\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$; $G = \mathbb{N}$.

Lösung:
Zunächst wird die Definitionsmenge bestimmt. Dabei gilt es, jene Elemente der Grundmenge auszuschließen, für die einer der Nenner Null wird:
$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \qquad x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
$(x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-1=0 \Leftrightarrow x=1) \vee (x-2=0 \Leftrightarrow x=2)$, denn ein Produkt von Termen ist ja bekanntlich genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.
Somit sind also die Zahlen 2 und 1 auszuschließen: $\mathbf{D = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}}$
Nun empfiehlt sich schrittweises Vorgehen.

Nenner:[1]	Erweiterungsfaktor:	Erweiterter Zähler:
$x-2$	$x-1$	$(x-1)(x-1)$
$x-1$	$x-2$	$(x-2)(x-2)$
$(x-1)(x-2)$	1	$2x-3$

Hauptnenner: $\underline{(x-1)(x-2)}$
Die Gleichung wird mit dem Hauptnenner multipliziert:

$$(x-1)(x-1) - (x-2)(x-2) = 2x - 3 \quad | \text{ Ausmultiplizieren!}$$

$$x^2 - 2x + 1 - x^2 + 4x - 4 = 2x - 3$$

$$2x - 3 = 2x - 3 \quad | +3 \quad ①$$

$$2x = 2x \quad | :2 \quad ④$$

$$\mathbf{x = x}$$

Die Gleichung $x = x$ stimmt für alle Elemente der Definitionsmenge:
$\Rightarrow \mathbf{L = D = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}}$

Alle Wege gehen über X. Ohne X kein Leben. Und wenn es einmal nicht von Anbeginn da ist, dann kommt es bestimmt später, zwängt sich durch einen kleinen Spalt in die Rechnung, überkreuzt in beschaulicher Daseinsfreude seine Spinnenbeine und wartet; oft nur darauf, wieder hinausgeworfen zu werden, „eliminiert". Oft auf etwas, das ihm gleich sei. Es gibt Faktoren, deren Bestimmung es ist, X gleich zu sein. Ihnen zuliebe muß man das X oft bis aus dem Unendlichen herbeiholen. Die ganze Zeit über war es nicht da, keine Notwendigkeit für sein Vorhandensein scheint zu bestehen, aber plötzlich kommt es doch daher, kommt mit einem kleinen Gleichheitszeichen als Vorspann ankutschiert und will dementsprechend behandelt werden. So ist dieses X nun einmal. Mit welchem Recht? Warum? Zu welchem Zweck, zu welchem Behuf, zu welchem Ende? Wer hat ihm diesen Rang eingeräumt? Und weshalb gerade X? Und wieso steht es fest, daß X dem und dem gleich ist? Da stimmt etwas nicht. Irgendwo klafft eine Lücke. Die Sache, die sich recht heiter anläßt wie ein schnurriges Spielzeug, mit dem man allerlei Kunststücke ausführen kann — die Sache wird mit einem Mal bitter unverständlich. X =. Wie denn? Eine stille Übereinkunft? Es gibt einige, die nicht gefragt wurden! Man hat sie übergangen als man sich darauf einigte! Wenn sie nun ihre Zustimmung verweigern? Ja — das dürfen sie nicht. X ist stärker als sie. Seine Enden wachsen und krümmen sich, umschlingen ihren Leib und ihren Hals, bis sie die Existenz des X anerkannt haben und mit ihr manipulieren, wie es X befiehlt. ..."

© Paul Zsolnay Verlag Gesellschaft m.b.H., Wien/Hamburg 1958.

[1]) Alle Nenner, die nicht vollständig faktorisiert sind, werden in dieser Spalte — ähnlich wie bei den Term-Umformungen — zerlegt! (Faktorisierung der Nenner).

Einige historische Bemerkungen zu linearen Gleichungen:

Die Lösung linearer Gleichungen findet sich bereits auf babylonischen Keilschrifttafeln aus dem 2. Jahrtausend v. Chr. Auch quadratische und sogar kubische Gleichungen wurden dort behandelt. Natürlich, wie in der babylonischen und ägyptischen Mathematik üblich, nur in einzelnen Beispielen. Es gab keine allgemeine Theorie. In der klassischen griechischen Mathematik hatte man ebenfalls keine Schwierigkeiten, lineare Gleichungen zu lösen: Man hat sie geometrisch interpretiert. Auch quadratische Gleichungen (z. B. $x^2 - 5x + 6 = 0$) konnte man behandeln. Die geometrische Interpretation war nicht so leicht möglich, da jedes Quadrat als Fläche gedeutet wurde, die man ja nicht zu einer Strecke addieren konnte.

Mit Gleichungen allgemeiner Art hat sich ausführlich **DIOPHANT von Alexandria** im 3. Jahrhundert n. Chr. beschäftigt.
Die erste zusammenfassende Darlegung der Lösung linearer und quadratischer Gleichungen stammt von **Abū Abdallāh Moḥammed ibn Mūsā al-Ḫwārizmī** (kurz: Al-Ḫwarizmī[2], 780–850). Er stammte aus Ḫwarizm (südlich des Aralsees) und wirkte am Hofe Bagdads. Sein Werk „Al-kitab almuchtasar fi hisāb al-ǧabr wa'lmuqābala" (ein kurz gefasstes Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen, kurz „Algebra" genannt) hat nicht nur die indischen Ziffern in das Abendland gebracht, sondern es diente auch Jahrhunderte lang als Grundlage der Gleichungslehre. Al-Ḫwārizmī kann zu Recht als „Vater der Algebra" bezeichnet werden. Man hat nur mit positiven Zahlen operiert.

Beispiel:

$\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-9} - \frac{1}{x-10}$, $G = \mathbb{R}$, $L = ?$

Lösung:

$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$; $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$; $x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 9$;
$x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 10$

Die Zahlen 3, 4, 9 und 10 müssen aus der Grundmenge ausgeschlossen werden: $D = \mathbb{R} \setminus \{3, 4, 9, 10\}$

Nenner:[1]	Erweiterungsfaktor:	Erweiterter Zähler:
$x-3$	$(x-4)(x-9)(x-10)$	$(x-4)(x-9)(x-10)$
$x-4$	$(x-3)(x-9)(x-10)$	$(x-3)(x-9)(x-10)$
$x-9$	$(x-3)(x-4)(x-10)$	$(x-3)(x-4)(x-10)$
$x-10$	$(x-3)(x-4)(x-9)$	$(x-3)(x-4)(x-9)$

Hauptnenner: $\underline{(x-3)(x-4)(x-9)(x-10)}$

Die Gleichung wird mit dem Hauptnenner multipliziert:

$(x-4)(x-9)(x-10) - (x-3)(x-9)(x-10) =$
$= (x-3)(x-4)(x-10) - (x-3)(x-4)(x-9)$

Gleichungen dieser Art führen auf die Multiplikation einer größeren Anzahl von Binomen. Wenn man die gemeinsamen Faktoren auf beiden Seiten heraushebt, erspart man sich viel Rechenarbeit:
$(x-9)(x-10)[(x-4)-(x-3)] = (x-3)(x-4)[(x-10)-(x-9)]$

④ ②	$(x^2-19x+90)(-1) = (x^2-7x+12)(-1)$	$:(-1), -x^2$
① ②	$-19x+90 = -7x+12$	$+7x-90$
④	$-12x = -78$	$:(-12)$

$$x = 6{,}5$$

Probe:

$T_L\left(\frac{13}{2}\right) = \frac{2}{7} - \frac{2}{5} = \frac{10-14}{35} = -\frac{4}{35}$ $\quad T_R\left(\frac{13}{2}\right) = -\frac{2}{5} + \frac{2}{7} = \frac{-14+10}{35} = -\frac{4}{35}$

$T_L = T_R$ (w)

Es gilt somit: $L = \{6{,}5\}$

Beispiel:

Man ermittle die Lösungsmenge der Gleichung $\dfrac{\frac{5x+3}{3}}{\frac{x+5}{4}} = 3$ in $\mathbb{N}$!

Lösung:

Definitionsmengen-Bestimmung: $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$, $\Rightarrow D = \mathbb{N}$!

Unter Beachtung der Gesetze über das Auflösen von Doppelbrüchen erhalten wir:

[1]) Alle Nenner, die nicht vollständig faktorisiert sind, werden in dieser Spalte — ähnlich wie bei den Term-Umformungen — zerlegt! (Faktorisierung der Nenner).

[2]) Von diesem Namen leitet sich das Wort **Algorithmus** ab.

$\frac{4(5x+3)}{3(x+5)} = 3$	$\cdot 3(x+5)$ (3)
$4(5x+3) = 9(x+5)$	Ausmultiplizieren!
$20x + 12 = 9x + 45$	$-9x - 12$ (2)
$11x = 33$	$:11$ (4)
$x = 3$	

Probe:

$T_L(3) = \frac{\frac{18}{3}}{\frac{8}{4}} = 3$ $\quad T_R = 3 \quad T_L = T_R$ (w)

Es gilt somit: $L = \{3\}$

Formeln kann man wie Gleichungen behandeln!

In der Wirtschaft verwendet man Formeln zur Berechnung der Zinsen. Sind jedoch die Zinsen bekannt und ist eine andere Größe zu berechnen, muss man diese Formel umformen — nach den Regeln der **Gleichungsumformung!**

Welche Zinsen erhält man, wenn ein Kapital von 343 756,— Euro zu einem Zinssatz von 5% für 132 Tage angelegt wird?

Bekanntlich errechnen sich die (einfachen) Zinsen Z nach der Formel $Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{36000}$, wobei K das Kapital, p der Jahreszinssatz und t die Anzahl der Tage bedeuten. (Für das Jahr werden dabei 360 Tage gesetzt.)

Wir brauchen also nur K= 343 756,—, p = 5 und t = 132 in die Formel einzusetzen: $Z = \frac{343756 \cdot 5 \cdot 132}{36000} = 6302{,}19 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Z = 6302{,}19}$

Und wenn nun umgekehrt Z, p und t gegeben sind, wie kann man das Kapital K errechnen? K = ?

Um eine Antwort auf diese Frage zu geben, braucht man nur aus der Formel $Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{36000}$ die Größe K auszurechnen:

$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{36000}$	$\cdot 36000$ (3)
$36000\,Z = K \cdot p \cdot t$	$:p:t$ (4)
$K = \frac{36000\,Z}{p \cdot t}$	

Bei dieser Umformung haben wir K als Variable betrachtet und mit Z, p und t wie mit Zahlen gerechnet. Wer also mit dem Lösen von Gleichungen vertraut ist, wird keine Schwierigkeiten haben, Formeln „umzustellen“, d. h. aus einer Formel eine bestimmte Größe auszurechnen.

Beispiel:

$\frac{O_P}{2} = xy + xz + yz$ mit $x, y, z > 0 \qquad y = ?$

Lösung:

Die gesuchte Größe y tritt zweimal auf: $\frac{O_P}{2} = xy + xz + yz$. Es gilt nun, alle y auf eine Seite zu bringen und anschließend y zu faktorisieren:

$\frac{O_P}{2} - xz = xy + yz$	y faktorisieren!
$\frac{O_P - 2xz}{2} = y(x+z)$	$:(x+z)$ (4) $\quad x + z \neq 0$, da $x, z > 0$
$y = \frac{O_P - 2xz}{2(x+z)}$	

Die Variable, nach der die Gleichung aufzulösen ist, heißt **Gleichungsvariable**. Alle Variablen, die nicht Gleichungsvariable sind, werden wie bestimmte, feste Zahlenwerte behandelt.

Auf nebenstehendes Beispiel bezogen ist y Gleichungsvariable.

Aufgaben, die durch verbale Angaben gegeben sind und mathematisch gefasst auf Gleichungen führen, nennt man **Textgleichungen**. Nachdem man die Beziehung zwischen den gegebenen Größen und der gesuchten Größe erkannt hat, wird der Zusammenhang in die Sprache der Mathematik übertragen, d. h. es wird der **Ansatz** gemacht. Allgemein brauchbare Regeln für das Aufstellen des Ansatzes gibt es nicht. Je nach Aufgabenstellung sind unter anderem Kenntnisse aus den Bereichen der Technik und Wirtschaft notwendig.



Beispiel:
Herr Antl tankt ein Gemisch aus Super- und Normalbenzin und bezahlt für insgesamt 40 Liter 38 Euro. Aus wie viel Liter Normal- bzw. Superbenzin besteht das Gemisch, wenn 1 Liter Normalbenzin 0,8 Euro und 1 Liter Superbenzin 1 Euro kostet?

Lösung:

Wir überlegen: Nach welcher Größe wird gefragt? Die Anzahl der Liter Normalbenzin und die Anzahl der Liter Superbenzin sind zu ermitteln. 2 Größen! In solchen Fällen, in denen nach **mehr als einer Zahl** gefragt wird, muss man eine Größe durch die andere ausdrücken:

Anzahl der Liter Normalbenzin: x
Anzahl der Liter Superbenzin: $40-x$

Lesen wir den Beispieltext nochmals. Fast immer ist jedes Wort von Bedeutung. Es sind die Literpreise von Normal- und Superbenzin gegeben und der Endpreis ist auch bekannt:

$$\underbrace{0{,}8x}_{\text{Kosten des Normalbenzins}} + \underbrace{1\cdot(40-x)}_{\text{Kosten des Superbenzins}} = \underbrace{38}_{\text{Gesamtkosten}}$$

Die Gleichung wird gelöst:

$$0{,}8x+40-x=38 \quad |-40 \quad ②$$
$$-0{,}2x=-2 \quad |:(-0{,}2) \quad ④$$
$$x=10$$

Normalbenzin: 10 Liter

Superbenzin: $40-10=30$ Liter

Probe:

Bei Textgleichungen ist es wichtig, das gefundene Ergebnis anhand des gegebenen Textes (und **nicht** anhand der Gleichung!) zu überprüfen:

10 l Normalbenzin kosten:	8 Euro	
30 l Superbenzin kosten:	30 Euro	
40 l Gemisch kosten insgesamt	38 Euro	Stimmt!

2. Lineare Ungleichungen in einer Variablen

Beispiele für lineare Ungleichungen in einer Variablen:

$x-5<3,\quad x+(x-1)\cdot 4 \geqslant 0,\quad 0 \leqslant x-1,\quad x>x+1, \ldots$

Wie könnte man Ungleichungen definieren? Und was sind „lineare Ungleichungen in einer Variablen"?

Eine Ungleichung bleibt „richtig", wenn man...

① auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert.

Beispiel:
Die Ungleichung $x-5<0$ ist in $\mathbb{N}$ zu lösen!

Lösung:

Jede Zahl der Grundmenge (hier $\mathbb{N}$), die die Ungleichung erfüllt, heißt **Lösung**[1]. Auf beiden Seiten der Ungleichung wird die Zahl $+5$ addiert: $x<5$

[1]) Ungleichungen haben oft mehrere Lösungen!

Probe:

Die Zahlen 0, 1, 2, 3 und 4 sollen die Ungleichung erfüllen. Wir überprüfen das, indem wir diese Zahlen der Reihe nach in die Ungleichung einsetzen:

$0-5<0 \Leftrightarrow -5<0$ (w)
$1-5<0 \Leftrightarrow -4<0$ (w)
$2-5<0 \Leftrightarrow -3<0$ (w)
$3-5<0 \Leftrightarrow -2<0$ (w)
$4-5<0 \Leftrightarrow -1<0$ (w) $L=\{0, 1, 2, 3, 4\}$

Beispiel:

Die Lösungsmenge der Ungleichung $14x-12<13x-5$ ist über der Grundmenge $\mathbb{P}$ zu ermitteln!

Lösung:

$14x-12<13x-5$ $\quad | -13x+12$ ② ①
$x<7$

Probe:

$28-12<26-5 \Leftrightarrow 16<21$ (w)
$42-12<39-5 \Leftrightarrow 30<24$ (w)
$70-12<65-5 \Leftrightarrow 58<60$ (w) $L=\{2, 3, 5\}$

Beispiel:

Die Ungleichung $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}>2(x-11)$ ist in $\mathbb{N}_g$ zu lösen!

Lösung:

$\frac{x}{3}+\frac{x}{5}>2(x-11)$ $\quad |\cdot 15$ ③
$5x+3x>30(x-11)$
$8x>30x-330$ $\quad |-30x$ ②
$-22x>-330$ $\quad |:(-22)$ ⑥ Division durch eine negative Zahl: Umkehrung der Ordnungsrelation!
$x<15$

Probe:

$0+0>2(-11)$ (w) $\quad \frac{8}{3}+\frac{8}{5}>2(-3)$ (w)
$\frac{2}{3}+\frac{2}{5}>2(-9)$ (w) $\quad \frac{10}{3}+2>2(-1)$ (w)
$\frac{4}{3}+\frac{4}{5}>2(-7)$ (w) $\quad 4+\frac{12}{5}>2(1)$ (w)
$2+\frac{6}{5}>2(-5)$ (w) $\quad \frac{14}{3}+\frac{14}{5}>2(3) \Leftrightarrow \frac{112}{15}>\frac{90}{15}$ (w)

$L=\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

Beispiel:

Die Ungleichung $x-3>x+1$ ist in $\mathbb{Z}$ zu lösen!.

Lösung:

$x-3>x+1$ $\quad |+3$ ①
$x>x+4$ $\quad |-x$ ②
$0>4$

Die Ungleichung ist für **kein** Element der Grundmenge erfüllt: $L=\{\,\}$

Eine Ungleichung bleibt „richtig", wenn man...

② auf beiden Seiten die gleiche Zahl subtrahiert,

③ beide Seiten mit der gleichen **positiven** Zahl multipliziert,

④ beide Seiten durch die gleiche **positive** Zahl dividiert,

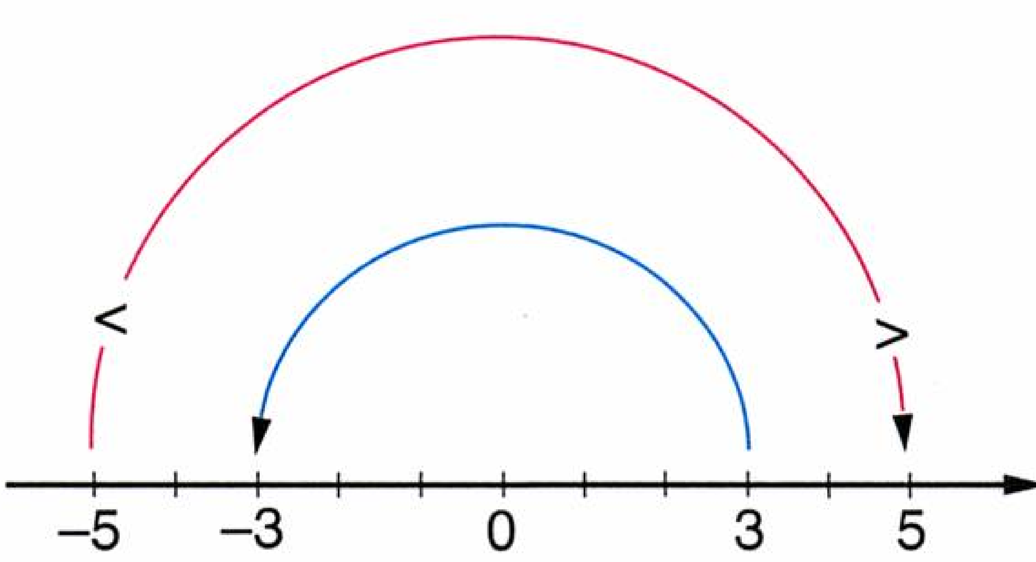
⑤ beide Seiten mit der gleichen **negativen** Zahl multipliziert und das Ungleichheitszeichen **umkehrt** oder

⑥ beide Seiten durch die gleiche **negative** Zahl dividiert und das Ungleichheitszeichen **umkehrt**.

Die Regeln ⑤ und ⑥ lassen sich auch so zusammenfassen:

Bei Multiplikation mit einer negativen Zahl bzw. Division durch eine negative Zahl ist die Ordnungsrelation umzukehren, d. h. aus $\geqslant(>)$ wird $\leqslant(<)$ und umgekehrt!

Dies lässt sich leicht an einfachen Zahlenbeispielen überlegen: $5>3$ Multiplikation mit (-1) liefert: $-5<-3$ usw.



AUFGABEN

Bei den folgenden Aufgaben ist die Lösungsmenge in $\mathbb{Z}$ zu ermitteln!

552. a) $5x+3-(2x-1)-4=2x+1$ **b)** $7x-(4-2x)=12-(3x-3)-19$

553. a) $2x-3+(4x+1)=7x+(11-2x)-(1+5x)$ **b)** $3x+7-(2x+1)=4x-(5+6x)+(7+x)$

554. a) $8x+2-(7x-3)+2=5+(2x-3)+(9x-5)$ **b)** $2x-8-(3x-4)-5x=8+(7-6x)-(4-5x)$

555. a) $3x-1-[5x-(2-4x)]=-11$ **b)** $9x-5=2x-[5x+2-(3x+2)-2]+x+1$

556. a) $x-1-[2x-3-(4x-5)]=6x-(5x-3)$ **b)** $2x+5-[3x+2-(3x+2)]=6x-(4-2x)+9$

557. a) $x+2-\{3x-4-[5x-6-(x+1)]\}=x+1$ **b)** $3x+5-\{2x+1-[2x-3-(x-2)]\}=x+15$

558. a) $x-1-\{2x-3-[4x+5-(x-6)-7)]\}=x+2$ **b)** $2x-3-\{5x+2-[4x+3-(2x-1)-4]\}=x-5$

559. $2x-3-(x+5)-\{3x-2+[5x+3-(2x+3)]\}=3x-[8x+4-(3x-11)]$

560. $2x+1-\{4x+5-[1+(2x+3)+3x-(4x+2)]\}=3x-[5x+2-(3x+1)]-3$

561. a) $4(x-3)=16$ **b)** $3(x+4)=8x+7$

562. a) $7(3x-6)=63$ **b)** $4(3x+2)-12=6x+8$

563. a) $9(5x+3)=24(x+2)$ **b)** $7(x-3)-8=5(3x-1)-5$

564. a) $3(2x-1)-8x=15(x-1)-5$ **b)** $5(3x-2)+7=9(5x+4)-(5x+39)$

565. a) $3(5x-2)-2(4x+1)=2(3x-5)+5$ **b)** $20(x+3)-2(4x+5)=2(14x+9)$

566. a) $8(9x+2)-4(3x+2)=6(2x+1)+2(x+1)$ **b)** $2(x-2)-4(3x-2)=5(x-4)-6(x-7)$

567. a) $(x+4)(x+8)=(x-1)(x+58)$ **b)** $(x-20)(x-57)=(x-50)(x-48)$

568. a) $(x-5)(10-x)=(3-x)(2+x)+2(x+20)$ **b)** $(x-1)(2-x)=(3+x)(4-x)+5(x-4)$

569. $(3x+2)(x+2)\cdot 2=(3x+4)(x+2)+2(x+2)\cdot 3+3+3x(x-2)$

570. $(x+3)(x+1)=(2x+1)(x+2)-(x+3)(x-1)$

571. $(x-3)(x+2)+(x+5)(x-4)=(2x+1)(x+3)-57(5-x)$

572. $(2x+5)^2+(3x+4)^2=(13x+2)(x+1)+2(15+14x)$

573. $(9x+5)^2-(3x+2)^2=(12x+3)(6x+1)+6(x+3)$

574. $(2x+1)^3+(x+1)^3=(2x+1)^2\cdot 2x+(x+2)^3+x^2$

575. $(4x+2)^3-(3x+2)^3=(37x+1)(x+2)^2-(107x+1)(x+1)-35$

576. a) $\frac{2x+1}{3}+5=3+\frac{12x+15}{9}$ **b)** $1-\frac{4x+6}{9}=x-\frac{5x+1}{4}$

577. a) $2x+\frac{3x-2}{4}=4+\frac{2x+3}{7}$ **b)** $\frac{3x+5}{18}-\frac{x}{2}=-\frac{3x-2}{9}$

578. a) $\frac{x-3}{2}-\frac{3x-13}{2}=\frac{2x+5}{15}$ **b)** $5x-\frac{3x+2}{5}+\frac{11x+3}{7}=\frac{13x+3}{8}+4$

579. a) $\frac{5x+2}{3}-\frac{2x-3}{2}=\frac{x+2}{4}+\frac{2x+21}{10}$ **b)** $\frac{4x+13}{10}-\frac{7x+6}{25}=\frac{x+6}{4}-\frac{x+4}{20}$

580. a) $\frac{x+3}{2}+\frac{x-2}{3}+\frac{2x-3}{4}=\frac{1-x}{12}$ **b)** $\frac{3x+2}{2}-\frac{2x+7}{3}+\frac{8x+16}{4}=\frac{13x+123}{11}$

581. a) $\frac{9x+7}{5}-\frac{3x+2}{9}=\frac{5x+2}{3}-\frac{4x+2}{45}$ **b)** $\frac{3x+4}{5}+\frac{5x+2}{6}=\frac{x+2}{2}+\frac{7x+2}{8}$

582. a) $\frac{2x+1}{3}-\frac{5x+7}{12}=\frac{3x+1}{4}-\frac{5x+4}{3}-\frac{x+1}{2}$ **b)** $\frac{3x+4}{22}-\frac{5x+3}{11}=-\frac{2x+3}{3}-\frac{2(3+4x)}{9}+\frac{4x+3}{3}$

583. a) $\frac{x+2}{3}-2-\frac{x+3}{4}=\frac{x+4}{5}-\frac{3x+1}{4}-\frac{5x+1}{3}$ **b)** $\frac{x+3}{5}+5-\frac{3x+2}{4}=\frac{4x+3}{2}+\frac{7x+27}{6}-\frac{3(7x+6)}{20}$

584. a) $\frac{x+5}{3}-\left(\frac{x+7}{7}+\frac{x-20}{3}\right)=\frac{14-3x}{21}$ **b)** $\frac{17x-51}{9}-\left(-\frac{13x-3}{6}+11-\frac{9x-7}{4}\right)=0$

585. a) $\frac{x+3}{5}-\left(\frac{x+4}{9}-\frac{6-x}{15}\right)=1-\left(\frac{2x+4}{3}-\frac{3x+4}{5}\right)$ **b)** $\frac{x+7}{3}+\left(\frac{x+2}{4}-\frac{15-2x}{24}\right)=\left(\frac{2x+3}{9}-\frac{x-2}{24}\right)+\frac{90x+19}{72}$

586. a) $\frac{2}{x}+\frac{3}{x}+\frac{4}{2x}+\frac{5}{3x}+\frac{6}{4x}=\frac{61}{12}$ **b)** $-\frac{2}{x}+\frac{3}{2x}-\frac{4}{3x}+\frac{5}{4x}+\frac{6}{5x}=\frac{65}{8}$

Bei den folgenden Aufgaben ist die Lösungsmenge in $\mathbb{Q}$ zu ermitteln!

587. a) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{10}\left(\frac{x}{2}+3\right)+\frac{3}{2}\right]=1$ **b)** $3\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot 4-\left(\frac{x}{3}+1\right)\right]=x-3$

588. a) $\frac{6x-3}{x}=5$ **b)** $\frac{x+3}{2x-4}=3$ **c)** $\frac{3x+1}{2(x+1)}=\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{2x+1}{3x+7}=\frac{5}{13}$

589. a) $\frac{4(3x-4)}{5(x-2)}=\frac{8}{5}$ **b)** $\frac{2x+3}{3x-2}=1$ **c)** $\frac{7x+5}{9x+10}=\frac{3}{4}$ **d)** $\frac{3x-4}{8x+3}=\frac{2}{19}$

590. a) $\frac{x+3}{2x-4}=\frac{x+9}{2x}$ **b)** $\frac{19}{5x+4}=\frac{23}{8x-1}$ **c)** $\frac{3x-5}{7-4x}=\frac{6x-11}{15-8x}$ **d)** $\frac{x+2}{3x-1}=\frac{x+5}{3x+1}$

591. a) $\frac{x}{x-9}=\frac{x+9}{2x}$ **b)** $\frac{x-2}{x}=\frac{x+3}{x+10}$ **c)** $\frac{x+4}{2x-1}=\frac{x-3}{2x+5}$ **d)** $\frac{x+30}{x+10}=\frac{x+60}{x+20}$

592. a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{5x}{2}\right)^2-\left(\frac{13x}{2}-\frac{5}{2}\right)^2=-(6x)^2+29$ **b)** $(2x+1)^2=\left(\frac{5x}{2}+8\right)^2-\left(\frac{3x}{2}+9\right)^2$

593. a) $(6x-13)^2=\left(\frac{13x}{2}-6\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{5x}{2}+4\frac{1}{2}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{5x}{7}+\frac{8}{9}\right)^2=\left(\frac{13x}{7}+3\right)^2-\left(\frac{12x}{7}-4\right)^2$

594. a) $\frac{4}{x-2}-\frac{3}{x-1}=\frac{1}{x}$ **b)** $\frac{4}{x+7}+\frac{5}{x+1}=\frac{9}{x+2}$

595. a) $\frac{1}{2x-5}+\frac{3}{2x+5}=\frac{6}{3x+5}$ **b)** $\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}$

596. a) $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$ **b)** $\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+8}$

597. a) $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+8}=\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+10}$ **b)** $\frac{1}{x-12}-\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-9}-\frac{1}{x-4}$

598. a) $\frac{4}{x-4}-\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-5}$ **b)** $\frac{1}{x+\frac{5}{2}}-\frac{3}{x+\frac{3}{2}}=\frac{6}{x+7}-\frac{8}{x+\frac{11}{2}}$

599. a) $\frac{4}{x+3}-\frac{1}{x+5}=\frac{4}{x+2}-\frac{1}{x+1}$ **b)** $\frac{4}{1+x}-\frac{3}{3+x}=\frac{3}{1-x}-\frac{4}{2-x}$

600. a) $\frac{5x}{x-2}-\frac{x}{x+2}=4$ **b)** $\frac{x}{x-4}-\frac{x}{x+4}=0$

601. a) $\frac{x+2}{2-x}+\frac{x-2}{2+x}=\frac{4}{4-x^2}$ **b)** $\frac{x+6}{4-x}-\frac{x-6}{4-x}=\frac{24}{16-x^2}$

602. a) $\frac{x+3}{(x-3)^2}=\frac{2}{x+3}-\frac{x}{x^2-9}$ **b)** $\frac{x-1}{(x+1)^2}=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$

603. a) $\frac{x}{x+2}+\frac{4(x-2)}{(x+2)^2}=\frac{x}{x-2}$ **b)** $\frac{x}{x^2-6x+9}-\frac{1}{x^2-3x}=\frac{1}{x}$

604. a) $\frac{3x+2}{2x-4}-\frac{3x^2+1}{2x^2-8}=\frac{16x+114}{4x^2+8x}$ **b)** $\frac{7x+3}{3x-3}-\frac{7x^2+2}{3x^2-3}=\frac{20x+44}{6x(x+1)}$

605. a) $\frac{2x+1}{5x-5}-\frac{x+2}{4x-4}+\frac{11x-18}{3x-3}=1$ **b)** $\frac{2x+1}{3x+3}-\frac{5x-3}{2x+2}+\frac{7x-3}{4x+4}=\frac{1}{2}$

606. a) $\frac{3x+1}{4x-10}-\frac{7x+5}{10x-25}=\frac{8}{5}-\frac{5x-1}{6x-15}$ **b)** $\frac{x+2}{2x-1}-\frac{x-1}{4x-2}=\frac{x+7}{20x-10}+\frac{9}{20}$

607. a) $\frac{2x-4}{x-1}+\frac{2x+2}{4x-4}+\frac{5x-9}{3x-3}+\frac{9x-23}{2x-2}=4$ **b)** $\frac{7x-3}{2x-6}-\frac{3(9x-1)}{10(x-3)}=1-\frac{13x+99}{6x-18}+\frac{5x-9}{x-3}$

608. a) $\frac{2(x-1)}{x+3}-\frac{11x-11}{3(x+3)}+\frac{17x-9}{2(x+3)}+\frac{23x+1}{6(x+3)}=2$ **b)** $\frac{x-9}{x-5}-\frac{x-9}{x-4}-\frac{x-7}{x-2}=\frac{x-8}{x-5}-\frac{x-8}{x-2}-\frac{x-7}{x-4}$

609. a) $\frac{2\left(3-\frac{x}{5}\right)}{3}-4\left(1-\frac{x}{3}\right)-\frac{x}{3}=\frac{2\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}{27}+\frac{5}{54}$ **b)** $\frac{5\left(2-\frac{x}{3}\right)}{4}-2\left(3-\frac{x}{5}\right)+\frac{1}{2}=\frac{3\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{4}\right)}{5}+\frac{1}{10}$

610. a) $\frac{\frac{5x+1}{4}}{\frac{9x+1}{3}}=\frac{3}{7}$ **b)** $\frac{\frac{x+3}{x-3}-\frac{x-3}{x+3}}{\frac{3x}{x-3}}=2$ **c)** $\frac{\frac{x-1}{x+1}+1}{\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}}=2$

Bei den nachstehenden Gleichungen handelt es sich um Zusammenhänge aus Mathematik, Physik und Technik. Es ist die jeweils gefragte Größe zu berechnen, wobei im Ergebnis keine Doppelbrüche vorkommen sollen:

611. a) $O_p=G+M$ (1) $G=?$ (2) $M=?$ **b)** $u=a+b+c$ (1) $a=?$ (2) $c=?$

612. a) $A=a\cdot b$ (1) $a=?$ (2) $b=?$ **b)** $V=G\cdot h$ (1) $G=?$ (2) $h=?$

613. a) $M=2a\cdot h_a$ (1) $a=?$ (2) $h_a=?$ **b)** $A=\pi ab$ (1) $a=?$ (2) $b=?$

614. a) $W=U\cdot I\cdot t$ (1) $I=?$ (2) $t=?$ **b)** $V=a\cdot b\cdot c$ (1) $a=?$ (2) $c=?$

615. a) $A=\frac{ab}{2}$ (1) $a=?$ (2) $b=?$ **b)** $A=\frac{ef}{2}$ (1) $e=?$ (2) $f=?$

616. a) $V=\frac{Gh}{3}$ (1) $G=?$ (2) $h=?$ **b)** $A=\frac{\pi ab}{2}$ (1) $a=?$ (2) $b=?$

617. a) $b=\frac{\pi r\alpha}{180°}$ (1) $\alpha=?$ (2) $r=?$ **b)** $V=\frac{abh}{3}$ (1) $a=?$ (2) $h=?$

618. a) $P=\frac{Bp}{100}$ (1) $p=?$ (2) $B=?$ **b)** $Z=\frac{Kpt}{36000}$ (1) $t=?$ (2) $K=?$

619. a) $v=\frac{s}{t}$ (1) $s=?$ (2) $t=?$ **b)** $\rho=\frac{A}{s}$ (1) $A=?$ (2) $s=?$

620. a) $Pp=Qq$ (1) $P=?$ (2) $q=?$ **b)** $ah_a=bh_b$ (1) $h_a=?$ (2) $b=?$

621. a) $U_2=U_1\cdot\frac{d_1}{d_2}$ (1) $U_1=?$ (2) $d_2=?$ **b)** $\frac{P}{Q}=\frac{h}{\ell}$ (1) $h=?$ (2) $Q=?$

622. a) $O_{Pr}=2G+M$ (1) $G=?$ (2) $M=?$ **b)** $u=2a+c$ (1) $c=?$ (2) $a=?$

623. a) $u=a+2b+c$ (1) $a=?$ (2) $b=?$ **b)** $u=2a+2b$ (1) $a=?$ (2) $b=?$

624. a) $v=v_0+at$ (1) $a=?$ (2) $v_0=?$ **b)** $v=v_0-gt$ (1) $v_0=?$ (2) $t=?$

625. a) $m_1v_1+m_2v_2=0$ (1) $v_2=?$ (2) $m_1=?$ **b)** $F\ell-Na=0$ (1) $\ell=?$ (2) $N=?$

626. a) $y=kx+d$ (1) $d=?$ (2) $k=?$ **b)** $ax+by=c$ (1) $a=?$ (2) $y=?$

627. a) $z=ax+by+c$ (1) $b=?$ (2) $x=?$ **b)** $ax+by+cz=d$ (1) $a=?$ (2) $z=?$

628. a) $O_Q=2ab+2ac+2bc$ (1) $a=?$ (2) $b=?$ **b)** $yR=F_1y_1+F_2y_2$ (1) $y_1=?$ (2) $F_2=?$

629. a) $m=\frac{a+c}{2}$ (1) $a=?$ (2) $c=?$ **b)** $s=\frac{a+b+c}{2}$ (1) $a=?$ (2) $b=?$

630. a) $s=\frac{v_0+v}{2}\cdot t$ (1) $v_0=?$ (2) $t=?$ **b)** $A=\frac{a+c}{2}\cdot h$ (1) $a=?$ (2) $h=?$

631. a) $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (1) $x_1=?$ (2) $y_2=?$ **b)** $\frac{v_1-v_0}{v_0}=-e$ (1) $v_0=?$ (2) $v_1=?$

632. a) $Q=-(P-B)\ell_1+B\ell_2$ (1) $B=?$ (2) $\ell_2=?$ **b)** $y-y_1=k(x-x_1)$ (1) $k=?$ (2) $x_1=?$

633. a) $Q=mc(T_2-T_1)$ (1) $c=?$ (2) $T_2=?$ **b)** $xR=F(x_2+x_3)$ (1) $x_3=?$ (2) $F=?$

634. a) $\ell=\ell_0(1+\alpha t)$ (1) $\ell_0=?$ (2) $\alpha=?$ **b)** $V=V_0(1+\gamma t)$ (1) $V_0=?$ (2) $t=?$

635. a) $s=\frac{v\cdot t_1}{2}+v(t-t_1)$ (1) $t=?$ (2) $v=?$ **b)** $k=\frac{f_1\cdot r+f_2}{R}$ (1) $f_1=?$ (2) $f_2=?$

636. a) $f=\frac{w+u}{w+v}\cdot v_0$ (1) $v=?$ (2) $w=?$ **b)** $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ (1) $x_1=?$ (2) $y_1=?$

637. a) $t_1=\frac{v}{g}-\frac{t}{2}$ (1) $g=?$ (2) $v=?$ **b)** $\ell_2=\frac{l_1}{l_1+l_2}(\ell+\ell_1)$ (1) $\ell_1=?$ (2) $l_1=?$

638. a) $x=a+\frac{a_1-a}{h}\cdot z$ (1) $a_1=?$ (2) $h=?$ **b)** $x=a-\frac{a-b}{h}\cdot z$ (1) $a=?$ (2) $z=?$

639. a) $w=\frac{1}{R}(f+mr)+c$ (1) $f=?$ (2) $r=?$ **b)** $c_p=c_v+\frac{R}{M}$ (1) $R=?$ (2) $M=?$

640. a) $y=Af\left(t-\frac{r}{c}\right)$ (1) $c=?$ (2) $t=?$ **b)** $A\cdot\ell=\frac{A\cdot R}{K-1}(T_1-T_2)$ (1) $K=?$ (2) $T_1=?$

641. a) $P=\frac{Qf_1+(Q+G)f_2}{2r}$ (1) $G=?$ (2) $Q=?$ **b)** $P=Q\cdot\frac{r(1+f_2)+f}{R-f_1r}$ (1) $f_1=?$ (2) $r=?$

642. a) $q=\frac{m-k}{m-1}\cdot c_v(T_2-T_1)$ (1) $m=?$ (2) $T_2=?$ **b)** $w=\frac{v}{a}\cdot\frac{6M_1}{3M_1+M_2}$ (1) $M_1=?$ (2) $a=?$

643. a) $c=\frac{M_1v_1+M_2v_2-(v_2-v_1)KM_1}{M_1+M_2}$ (1) $v_1=?$ (2) $M_2=?$ **b)** $x=\frac{D_1x_1+D_2x_2}{D_1D_2}$ (1) $D_1=?$ (2) $x_2=?$

644. a) $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ (1) $R_1=?$ (2) $R=?$ **b)** $\frac{1}{f}=\frac{1}{g}+\frac{1}{b}$ (1) $b=?$ (2) $f=?$

645. a) $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$ (1) $R_2=?$ (2) $R_3=?$ **b)** $R=R_1+\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}$ (1) $R_1=?$ (2) $R_2=?$

646. a) $\frac{3(m-2)}{Em}=\frac{1}{E_1}$ (1) $E=?$ (2) $m=?$ **b)** $Q=\frac{4h-r}{4h-2r}$ (1) $h=?$ (2) $r=?$

647. a) $c=\frac{(M_1-M_2)v_1+2M_2v_2}{M_1+M_2}$ (1) $M_1=?$ (2) $v_2=?$ **b)** $c=\frac{(c_1m_1+c_2m_2)}{m}\cdot\frac{(\vartheta-\vartheta_1)}{(\vartheta_2-\vartheta)}$ (1) $\vartheta=?$ (2) $\vartheta_2=?$

648. a) $T=\left(\frac{h}{v_1}+\frac{h}{v_2}\right)\cdot\frac{b}{s}$ (1) $h=?$ (2) $v_2=?$ **b)** $M=\frac{P}{2}\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)-P\lambda$ (1) $P=?$ (2) $\lambda=?$

649. a) $r=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3}$ (1) $R_1=?$ (2) $R_3=?$ **b)** $I_1=\frac{U+I_0R'_2}{R_1+R'_1+R'_2}$ (1) $R_1=?$ (2) $R'_2=?$

650. a) $s=v_0t-\frac{g}{2}\cdot t^2$ (1) $v_0=?$ (2) $g=?$ **b)** $s=v_0t+\frac{a}{2}\cdot t^2$ (1) $a=?$ (2) $v_0=?$

651. a) $V=\ell r\left(h-\frac{r\pi}{2}\right)$ (1) $h=?$ (2) $\ell=?$ **b)** $x=\frac{a(a+2c)}{2(a+b+c)}$ (1) $b=?$ (2) $c=?$

652. a) $E=h(f_1-f_2)+mc^2$ (1) $m=?$ (2) $f_1=?$ **b)** $c_1=c+v\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ (1) $c=?$ (2) $v=?$

653. a) $D=\frac{Mmv^2}{2(M+m)}$ (1) $m=?$ (2) $M=?$ **b)** $E=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(v_1^2-v_2^2)$ (1) $m_1=?$ (2) $m_2=?$

654. a) $I=\frac{BH^3}{12}-\frac{bh^3}{12}$ (1) $b=?$ (2) $B=?$ **b)** $V=\frac{\pi r^4(p-p_0)\cdot t_0}{8\mu\ell}$ (1) $p=?$ (2) $\ell=?$

655. Vermindert man eine Zahl um ihre Hälfte und dieses Ergebnis um sein Drittel, so erhält man 5. Wie lautet die Zahl?

656. Ein neues Badezimmer wird verfliest. Am ersten Tag wird die Hälfte aller Fliesen verlegt, am zweiten Tag ein Drittel aller Fliesen, am dritten und vierten Tag die Hälfte des jeweils verbleibenden Restes. Wie viele Fliesen werden verlegt, wenn am Ende des vierten Tages noch 5 Stück überbleiben?

657. Das 3-fache einer Zahl, vermehrt um ein Viertel dieser Zahl, ergibt um 4 weniger als das 4-fache dieser Zahl, vermindert um die Hälfte der ursprünglichen Zahl. Wie lautet die Zahl?

658. Die Summe aus der Hälfte und dem Fünfzehntel einer Zahl ist um 19 größer als die Summe aus dem Zwanzigstel und dem Fünftel. Wie lautet die Zahl?

659. Eine zweiziffrige Zahl, bei der die Zehnerstelle den doppelten Wert der Einerstelle hat, besitzt die Ziffernsumme 6. Wie heißt die Zahl?

Anleitung: Man wähle die Einerziffer als Variable.

660. Eine zweiziffrige Zahl, bei der die Einerstelle den dreifachen Wert der Zehnerstelle hat, besitzt die Ziffernsumme 12. Wie heißt die Zahl?

661. Der Wert der Zehnerstelle einer zweistelligen Zahl ist um 3 kleiner als jener der Einerstelle. Werden die Ziffern vertauscht, so ist die entstehende Zahl um 2 größer als das Doppelte der ursprünglichen Zahl. Wie lautet die ursprügliche Zahl?

Anleitung:

	Zehner	Einer	Darstellung der Zahlen
gegebene Zahl	$x-3$	x	$10(x-3)+x$
Zahl mit vertauschten Ziffern	x	$x-3$	$10x+x-3$

662. Die Zehnerstelle einer Zahl hat einen um 7 kleineren Wert als die Einerstelle. Vertauscht man beide, ist die entstehende Zahl um 5 größer als das 3-fache der ursprünglichen Zahl. Welche Zahl erfüllt diese Bedingungen?

663. Die Einerziffer einer dreistelligen Zahl ist 7. Die Hunderterstelle hat den 3-fachen Wert der Zehnerstelle. Werden Einer- und Hunderterziffer vertauscht, erhält man eine um 198 kleinere Zahl. Wie lautet die ursprügliche Zahl?

664. In einer dreistelligen Zahl ist der Wert der Hunderterstelle doppelt so groß wie jener der Zehnerstelle, der Wert der Einerstelle um 5 größer als der der Zehnerstelle. Vertauscht man die Hunderter- und die Einerziffer, so erhält man eine Zahl, die um 36 kleiner ist als das 3-fache der ursprünglichen Zahl. Wie lautet die ursprüngliche Zahl?

665. Eine dreistellige Zahl hat die Einerziffer 9. Nimmt man diese Ziffer rechts weg und setzt sie links an, so ist die neue Zahl um 33 kleiner als das 4-fache der ursprünglichen Zahl. Wie lautet die ursprüngliche Zahl?

Anleitung: ursprüngliche Zahl: $10x+9$. Die Zahl x ist zweistellig. Durch rechtes Ansetzen von 9 entsteht eine dreistellige Zahl. Die Zahl x nimmt den 10-fachen Wert an.

666. Eine vierstellige Zahl hat die Tausenderziffer 1. Nimmt man diese Ziffer links weg und setzt sie rechts an, so ist die neue Zahl um 90 größer als die ursprüngliche Zahl. Wie lautet die ursprüngliche Zahl?

Anleitung: ursprüngliche Zahl: $1000+x$

667. Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist 103. Wenn die größere der beiden Zahlen durch die kleinere dividiert wird, erhält man 33 als Quotienten und 1 als Rest. Wie lauten die beiden Zahlen?

668. Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist 87. Wenn man die größere der beiden Zahlen durch die kleinere dividiert, erhält man 13 als Quotienten und 3 als Rest. Wie lauten die beiden Zahlen?

669. Die Differenz zweier natürlicher Zahlen ist 94. Wenn die größere der beiden Zahlen durch die kleinere dividiert wird, erhält man 24 als Quotienten und 2 als Rest. Wie lauten die beiden Zahlen?

670. 60 000,— Euro sollen unter drei Preisträgern derart verteilt werden, dass auf den zweiten Preis $\frac{2}{3}$ des ersten Preises und auf dem dritten Preis die Hälfte des zweiten Preises entfallen. Welche Beträge entfallen auf die drei Preise?

671. Der Gewinn einer OHG[1] ist laut Gesellschaftsvertrag wie folgt auf die Gesellschafter Müller, Maier und Schmidt aufzuteilen: Maier erhält $\frac{4}{5}$ des Gewinnanteils von Müller, Schmidt erhält $\frac{3}{4}$ des Gewinnanteils von Maier. Wie viel erhält jeder, wenn der Gewinn 600 000,— Euro beträgt?

672. Jemand kauft vom gleichen Erzeuger drei verschiedene Warenposten A, B, C. Die Rechnung des Transportunternehmens für die Zulieferung lautet auf 3600,— Euro. Aus kalkulatorischen Gründen sind die Bezugsspesen den einzelnen Warenposten zuzurechnen, wobei auf die Ware B 75 % der Bezugsspesen für Ware A und auf Ware C $\frac{2}{3}$ der Bezugsspesen für Ware B entfallen. Welche Beträge sind den einzelnen Warenposten zuzurechnen?

673. Wie viel Prozent Salzgehalt hat die Mischung von 50 kg 20%-iger und 350 kg 4%-iger Salzlösung?

Anleitung:

Salzlösung in kg	Salzgehalt in %	Menge des Salzes in kg
50	20	$50 \cdot \frac{20}{100}$
350	4	$350 \cdot \frac{4}{100}$
400	x	$400 \cdot \frac{x}{100}$

674. Wie viel Prozent Alkoholgehalt hat die Mischung von 200 Liter 86 %-igem Alkohol und 500 Liter 37 %-igem Alkohol?

675. Wie viel Liter Wasser sind zu 150 Liter 84 %-igem Alkohol hinzuzufügen, um 60 %-igen Alkohol zu erhalten?

676. Wie viel kg einer 22 %-igen Salzlösung sind zu 6 kg einer 15 %-igen Salzlösung hinzuzufügen, um eine 19 %-ige Salzlösung zu erhalten?

677. Jemand hat 10 kg 30 %-iger Salzlösung und beabsichtigt, durch Mischung einer anderen Salzlösung 35 kg 20 %-ige Sole herzustellen. Welche Konzentration muss die zum Mischen verwendete zweite Lösung aufweisen?

678. Jemand hat 1200 Liter 12 %-igen Alkohol und beabsichtigt, 1800 Liter 36 %-igen Alkohol herzustellen. Welchen Alkoholgehalt muss die zum Mischen verwendete Flüssigkeit haben?

679. In einer Fabrik wird zur Abkühlung eines auf chemischem Wege erzeugten Produktes 500 Liter Wasser zu 42° C benötigt. Wie viel Liter Wasser zu 80° C, das aus einem Prozess gewonnen wird, und wie viel Liter Leitungswasser (zu 4° C) werden hiezu benötigt?

680. Jemand benötigt 36 kg 20 %-ige Salzlösung. Es stehen zum Mischen zwei Salzlösungen zur Verfügung, die 15 bzw. 24 %-ige Konzentration aufweisen. Welche Mengen der vorhandenen Salzlösungen sind für die Mischung erforderlich?

681. Ein Wasserbecken mit dem Volumen V wird durch drei Rohre gespeist. Das erste Rohr benötigt 3 Stunden, das zweite 4 Stunden und das dritte 6 Stunden, um das Becken zu füllen. In welcher Zeit füllen alle drei Zuleitungen gemeinsam das Becken?

Anleitung:

Rohr	Stündlicher Zufluss	Betriebsdauer in Stunden	Zufluss während der Betriebsdauer
R_1	$\frac{V}{3}$	x	$\frac{Vx}{3}$
R_2	$\frac{V}{4}$	x	$\frac{Vx}{4}$
R_3	$\frac{V}{6}$	x	$\frac{Vx}{6}$

[1]) offene Handelsgesellschaft.

682. Um eine wichtige Durchzugsstraße nach einem Erdrutsch wieder frei zu machen, werden drei Bagger eingesetzt. Das erste Fahrzeug würde das Geröll in 27 Tagen, das zweite in 36 und das dritte in 54 Tagen wegschaffen.

a) Wie lange brauchen alle drei Bagger gemeinsam für diese Arbeit?[1)]

b) Wie lange dauern die Aufräumungsarbeiten, wenn der zweite Bagger erst am zweiten Tag und der dritte Bagger erst am vierten Tag eingesetzt werden?[1)]

683. Ein Staubecken kann durch einen Zufluss Z_1 in 42 Tagen, durch einen Zufluss Z_2 in 48 Tagen und durch einen Zufluss Z_3 in 56 Tagen gefüllt werden.

a) Wie lange dauert das Füllen des Staubeckens, wenn alle drei Zuflüsse gleichzeitig geöffnet werden?

b) Wie lange dauert das Füllen des Staubeckens, wenn der Zufluss Z_2 6 Tage nach dem Öffnen von Z_1 und Z_3 weitere 8 Tage später geöffnet werden?

684. Vier Personen A, B, C und D sind mit dem Verputzen einer Hausfassade beschäftigt. A würde die Fassade allein in 12 Tagen, B in 14, C in 30 und D in 18 Tagen verputzen. In welcher Zeit wird die Arbeit fertiggestellt, wenn alle 4 gemeinsam arbeiten?[1)]

685. Eine gebrauchte Maschine wird um 69000,— Euro, das ist um 40% weniger als der Preis einer fabriksneuen Maschine derselben Type, verkauft. Wie hoch ist der Preis der fabriksneuen Maschine?

686. Nach Abzug von 3% Skonto werden 14550,— Euro bezahlt. Wie hoch ist der Rechnungsbetrag vor dem Skontoabzug?

687. In einem Geschäft kann eine Ware aus Konkurrenzgründen nur um 260,— Euro je Stück verkauft werden. Man erzielt dabei einen 4%-igen Gewinn. Ursprünglich wollte man die Ware um 275,— Euro je Stück verkaufen. Wie viele Prozent Gewinn waren geplant?

Anleitung: 260,— Euro sind $\frac{104}{100}$ des Selbstkostenpreises, 275,— Euro sind $\frac{100+x}{100}$ des Selbstkostenpreises.

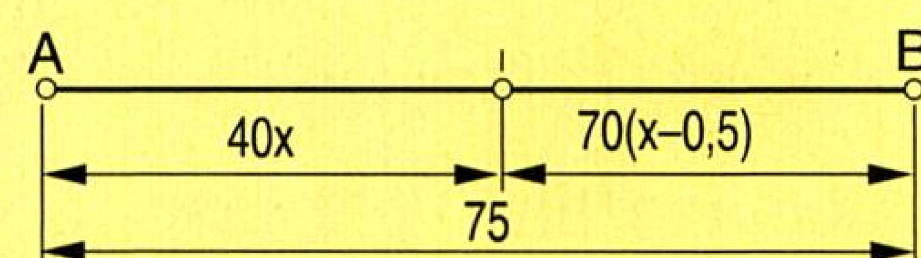
688. In einem Geschäft wird ein Elektrogerät um 1620,— Euro verkauft. Wie groß ist der Selbstkostenpreis der Erzeugerfirma, wenn diese 25%, die Großhandlung 20% und die Einzelhandlung 20% zum jeweiligen Selbstkostenpreis dazu schlagen?

689. Von zwei Kapitalien, die zusammen 14 000,— Euro ausmachen, ist das erste zu 5,5%, das zweite zu 4,8% angelegt. Die jährlichen Zinsen des ersten Kapitals sind um 152,— Euro größer als die des zweiten. Wie groß sind die beiden Kapitalien?

690. Ein LKW fährt mit einer Geschwindigkeit von 40 km/h[2)] um 9 Uhr vom Ort A nach dem 75 km entfernten Ort B ab. Eine halbe Stunde später fährt ein PKW mit einer Geschwindigkeit von 70 km/h von B in Richtung A ab. Um wie viel Uhr und in welcher Entfernung von A begegnet der PKW dem LKW?

Anleitung:

	Geschwindigkeit in km/h	Zeit in h	Weg in km
LKW	40	x	40 x
PKW	70	x − 0,5	70 (x − 0,5)



691. Herr Meier, der 4 km in einer Stunde zurücklegt, geht um 8 Uhr vom Ort A nach dem 40 km entfernten Ort B ab. Um 9 Uhr verlässt Frau Müller den Ort B mit dem Fahrrad in Richtung A mit einer Geschwindigkeit von 16 km/h.

a) Um wie viel Uhr und in welcher Entfernung von A begegnet Frau Müller Herrn Meier?

b) Um wie viel Uhr und in welcher Entfernung von A würde Frau Müller Herrn Meier einholen, wenn sie wie Herr Meier die Strecke von A nach B zurücklegt?

692. Ein LKW, der 50 km in der Stunde zurücklegt, verlässt den Ort A um halb neun Uhr. Um 10 Uhr folgt ihm ein PKW mit einer Geschwindigkeit von 80 km/h. Um wie viel Uhr und in welcher Entfernung von A hat der PKW den LKW eingeholt?

693. An einer Straße liegen die Orte A, B und C, wobei A von B 25 km und B von C 100 km entfernt sind. Um 8 Uhr fährt ein Moped vom Ort B mit einer Geschwindigkeit von 38 km/h in Richtung C ab. Um 9 Uhr fährt ein PKW vom Ort A mit einer Geschwindigkeit von 80 km/h in Richtung C ab. Um wie viel Uhr und in welcher Entfernung von C holt der PKW das Moped ein?

---

1) Wir gehen von der (nur bedingt realistischen) Annahme aus, dass weder eine gegenseitige Behinderung noch sonstige Störeinflüsse eintreten mögen.

2) Aus Gründen der Einfachheit wird bei der Berechnung eine konstante Geschwindigkeit der Fahrzeuge angenommen. Ist das realistisch? Was spricht dagegen, dass sich ein LKW konstant mit 40 km/h fortbewegt?
Wir erkennen daraus: Jedes mathematische Modell liefert infolge von Vereinfachungen nur einen Teilaspekt der Wirklichkeit. Die Arbeit mit einem Modell bedarf der ständigen Rückkoppelung an die Ausgangssituation. Trotzdem ist die Mathematisierung eines Problems nicht wertlos: Die genauen Überlegungen liefern bessere Einsichten in die Problematik — und wenn eine praxisbezogenere Lösung notwendig ist, muss man das mathematische Modell — wenn dies möglich ist — „verfeinern", d. h. die Gegebenheiten der Realität werden stärker berücksichtigt.

694. An einer Straße liegen die Orte A, B und C, wobei A von B 16 km und B von C 20 km entfernt ist. Um 7 Uhr geht Herr Gruber, der 5 km in der Stunde zurücklegt, vom Ort B in Richtung A. Um 9 Uhr fährt Frau Schmidt mit einem PKW mit einer Geschwindigkeit von 65 km/h vom Ort C in Richtung A. Um wie viel Uhr und in welcher Entfernung von A holt Frau Schmidt Herrn Gruber ein?

Bei den folgenden Aufgaben sind die Lösungsmengen der gegebenen Ungleichungen bezüglich der angegebenen Grundmenge G zu ermitteln!

695. a) $x+11<13 \quad G=\mathbb{N}$ **b)** $x+3<20 \quad G=\mathbb{P}$

696. a) $x-5<5 \quad G=\mathbb{N}_g$ **b)** $x-11<-12 \quad G=\mathbb{N}$

697. a) $x-9<1 \quad G=\mathbb{N}_u$ **b)** $-9>x+7 \quad G=\mathbb{N}_u$

698. a) $3x-8<2x+10 \quad G=\mathbb{P}$ **b)** $2x-10<x-3 \quad G=\mathbb{N}_g$

699. a) $5x-8<3x+12 \quad G=\mathbb{N}$ **b)** $7x-23>2(x+1) \quad G=\mathbb{N}$

700. a) $19(x-1)<17x+5 \quad G=\mathbb{N}$ **b)** $19x-19<7(x-1) \quad G=\mathbb{N}$

701. a) $13x-16<-6x+41 \quad G=\mathbb{P}$ **b)** $9x+2>4x+35 \quad G=\mathbb{P}$

702. a) $15x-41<-2x+27 \quad G=\mathbb{Z}$ **b)** $48x-11<5x-3 \quad G=\mathbb{P}$

703. a) $2(x-1)<\frac{5x-2}{3} \quad G=\mathbb{N}_g$ **b)** $9(x-3)>\frac{7x+4}{3} \quad G=\mathbb{P}$

704. a) $5(x-10)<\frac{10x+5}{7}+38 \quad G=\mathbb{P}$ **b)** $\frac{x+3}{4}-2<\frac{2x+1}{7}-\frac{x-5}{8} \quad G=\mathbb{P}$

705. $(3x+2)^2+(4x-1)^2>(5x+1)^2-4(2x+3)-(-10-x) \quad G=\mathbb{N}_u$

706. Addiert man zum 5-fachen einer natürlichen Zahl das 3-fache der um 1 kleineren Zahl und dividiert diese Summe durch 5, so ist das Ergebnis größer als das Doppelte der ursprünglichen Zahl. Welche Zahlen erfüllen diese Anforderungen?

707. Man berechne alle dreiziffrigen Zahlen mit der Einerziffer 0 und der Zehnerziffer 5, die größer als ihre 30fache Ziffernsumme sind!

Vermischte Aufgaben

708. Die Gleichung $x^2-3x=0$ lösen zwei Schüler auf verschiedene Arten:

(1)	(2)
$x^2-3x=0$	$x^2-3x=0$
$x^2=3x$	$x(x-3)=0$
$x=3$	$x_1=0 \quad x-3=0 \Leftrightarrow x_2=3$

Welche Variante ist richtig?

Für welche eingesetzten Zahlenwerte sind die gegebenen Terme sinnlos?

709. a) $\frac{3x+1}{5x+2}$ **b)** $\frac{x-5}{(x+3)(x-4)}$ **c)** $\frac{7x+12}{x^2-4x}$ **d)** $\frac{4x+5}{3x-x^2}$

710. a) $\frac{8x}{x+\frac{3}{4}}$ **b)** $\frac{3-7r}{r^2+7r}$ **c)** $\frac{a^2+1}{a(a^2-1)(a^2-4)}$ **d)** $\frac{x^2+x+1}{(x^2-x)(x^2-1)}$

711. a) $\frac{2z+11}{(z-1)(z+2)}$ **b)** $\frac{5s-121}{(s-3)(s^2-4)}$ **c)** $\frac{9}{(x^2-4)x(x+1)}$ **d)** $\frac{4}{(x^3-x)(x+2)}$

712.

$x^2-x^2=x^2-x^2$	Faktorisieren!
$(x+x)(x-x)=x(x-x)$	$:(x-x)$
$x+x=x$	Zusammenfassen!
$2x=x$	$:x$
$2=1$	

Wo steckt der Fehler?

713. Die wahren Aussagen sind anzukreuzen:

○ **a)** Die Lösungsmenge einer Gleichung (Ungleichung) hängt von der Grundmenge ab und ist eine Teilmenge derselben.

○ **b)** Alle Umformungen, die eine Gleichung in eine äquivalente Gleichung überführen, bezeichnet man als Äquivalenzumformungen.

○ **c)** Für die Gleichung $x = x + a$ gilt für jede Definitionsmenge D: $L = D$.

○ **d)** Für die Lösungsmenge der Ungleichung $x < x$ gilt: $L = \{\,\}$.

○ **e)** Für die Lösungsmenge der Ungleichung $x < x + a\ (a > 0)$ gilt: $L = \{\,\}$.

○ **f)** Eine Ungleichung bleibt richtig, wenn man beide Seiten der Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert und die Ordnungsrelationen unverändert lässt.

○ **g)** Um die Lösung einer Gleichung zu ermitteln ist es mitunter sinnvoll, wenn man die Gleichung mit Null multipliziert.

○ **h)** Man bezeichnet die Elemente der Definitionsmenge, die die Gleichung in eine wahre Aussage überführen, als Lösungen der Gleichung.

714. Der fehlende Text ist einzusetzen:

a) Ein Produkt von Termen ist ..... (meistens dann/genau dann/niemals) gleich Null, wenn mindestens einer der Faktoren gleich Null ist.

b) $(x-3)(x-9) = 0 \Leftrightarrow x-3 = 0 \vee$ ..... $(x-9 \neq 0\,/\,x-9 > 0\,/\,x-9 < 0\,/\,x-9 = 0)$

c) Für die Lösungsmenge der Gleichung $x = a\ (a \in D)$ gilt: $L =$ ..... $(\{a\}\,/\,\{\,\}\,/\,D)$

d) Für die Lösungsmenge der Gleichung $x = a\ (a \notin D)$ gilt: $L =$ ..... $(\{a\}\,/\,\{\,\}\,/\,D)$

e) Für die Gleichung $x = x$ gilt für jede Grundmenge G: $L =$ ..... $(\{x\}\,/\,G\,/\,\{\,\})$

f) Für die Lösungsmenge der Ungleichung $x > x + a\ (a \in D \wedge a > 0)$ gilt: $L =$ ..... $(D\,/\,\{\,\}\,/\,\{a\})$

g) Bei Textgleichungen ist die Probe — wenn immer das möglich ist — in der Form durchzuführen, dass man die gefundene Lösung anhand ..... (der verbalen Angabe/des Gleichungsansatzes) überprüft.

h) In vielen Fällen muss die Grundmenge der Textgleichung dahingehend ..... (eingeschränkt/erweitert) werden, dass die Lösung dem praktischen Sachverhalt gerecht wird. (Begründung?)



715. *„Ein Passagier will im Zug eine Fahrkarte kaufen. Als ihn der Schaffner nach der Einsteigstation fragt, antwortet der Reisende: „Ich bin zwei Haltestellen nach der Haltestelle vor der Haltestelle eingestiegen, die eine Haltestelle weniger als der halbe Weg nach St. Pölten ist.“ Worauf der Schaffner einen Moment nachdenkt und dann antwortet: „Der Fahrpreis beträgt 20 Schilling mehr als die Hälfte des um zehn Schilling vermehrten Fahrpreises, wenn dieser heute um 50 Prozent erhöht worden wäre.“ Was hatte der Passagier zu bezahlen?“*[1]

716. *„Eine Aufgabe von Étienne Bézout (1730 bis 1783): Arbeiter vereinbarten, daß sie für jeden Arbeitstag 48 fr (Franc) erhalten, wobei sie für jeden Tag ohne Arbeitsleistung 12 fr zurückgeben wollen. Nach 30 Tagen jedoch stellten sie fest, daß sie nichts verdient hatten. Wie viel Tage arbeiteten sie während der 30 Tage?“*[2]

---

1) Aus der Zeitschrift TREND, Ausgabe 4/1976.
2) Aus „Kurzweil durch Mathe“ von Johannes LEHMANN, Aulis Verlag 1980.

3. Problemstellungen der Technik

Maschineningenieurwesen/Mechatronik

717. Wirkungsgrad einer hydraulischen Presse:

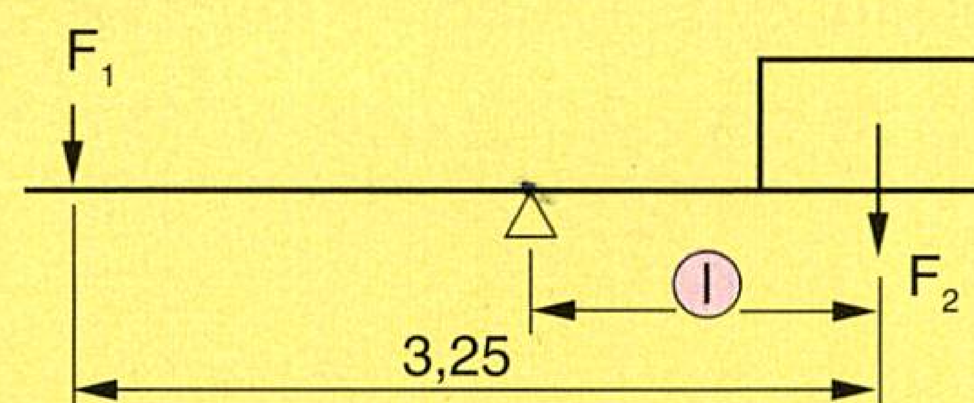
$$\eta = \frac{1 - 4\mu\frac{h_2}{d_2}}{1 + 4\mu\frac{h_1}{d_1}}$$

η ..... Wirkungsgrad (–)
μ ..... Reibungskoeffizient(–)
h_1, h_2 ..... Höhe des Dichtungsringes (mm)
d_1, d_2 ..... Kolbendurchmesser (mm)

d_1 = ? — ausgedrückt durch alle anderen Größen!

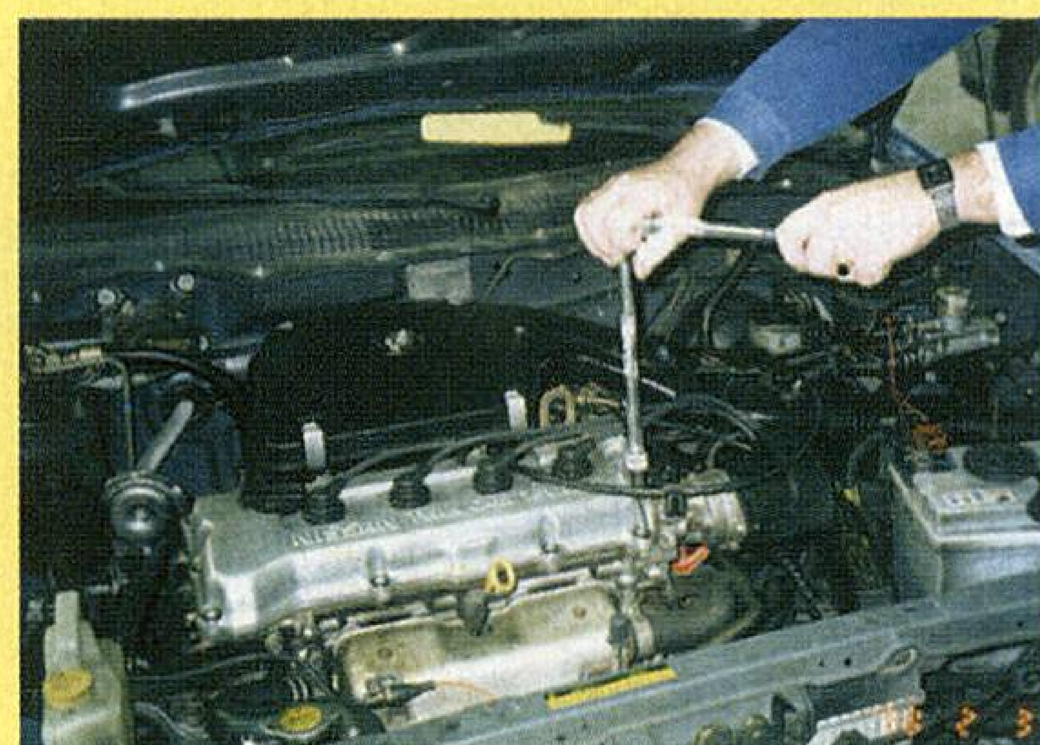
718. Eine Last ist mit einer Brechstange im Gleichgewicht zu halten. Wie lange muss diese sein, wenn die Last $F_1 = 200$ N im Abstand $r_1 = 40$ cm vom Stützpunkt wirkt und an der anderen Seite höchstens $F_2 = 80$ N aufgewendet werden können?
Anleitung: Die Drehmomente beider Kräfte müssen dem Betrag nach gleich sein. Es gilt also: $F_1r_1 = F_2r_2$.

719. In welcher Entfernung l von der Last ist eine 3,25 m lange Stange zu unterstützen, damit ein Arbeiter mit $F_1 = 384$ N eine $F_2 = 1280$ N schwere Last heben kann?



720. Bei einem Flaschenzug liegt dann Gleichgewicht vor, wenn der Quotient aus Gewicht der Last und Zahl der beweglichen Rollen gleich der aufzuwendenden Kraft ist. Welche Kraft ist erforderlich, um eine Last von 10500 N durch einen Flaschenzug (6 Rollen) zu heben, sofern 30% der aufgewendeten Kraft durch Reibung verloren geht?

721. Die Schraube eines Motors soll mit 60 Nm angezogen werden, wobei ein 25 cm langer Schraubenschlüssel verwendet wird. Welche Kraft muss am Schraubenschlüssel wirken?

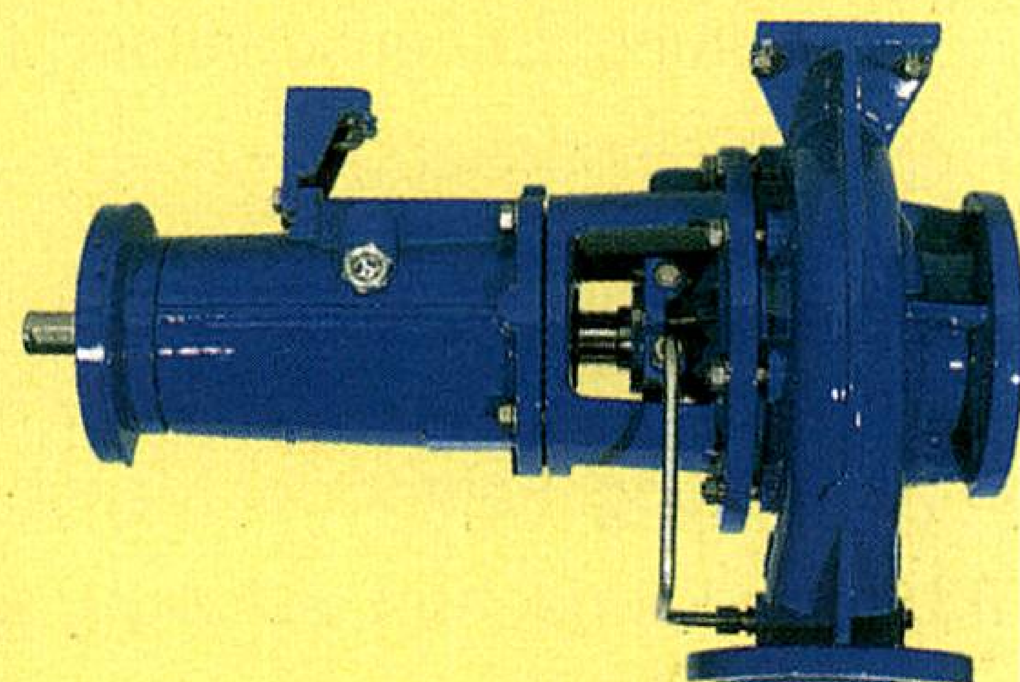


722. Ein hydraulischer Kleinkran hebt 600 kg in 6 s 2,5 m hoch. Hubleistung?

Anleitung: Gewicht = Masse × Erdbeschleunigung (g = 9,81 m/s).



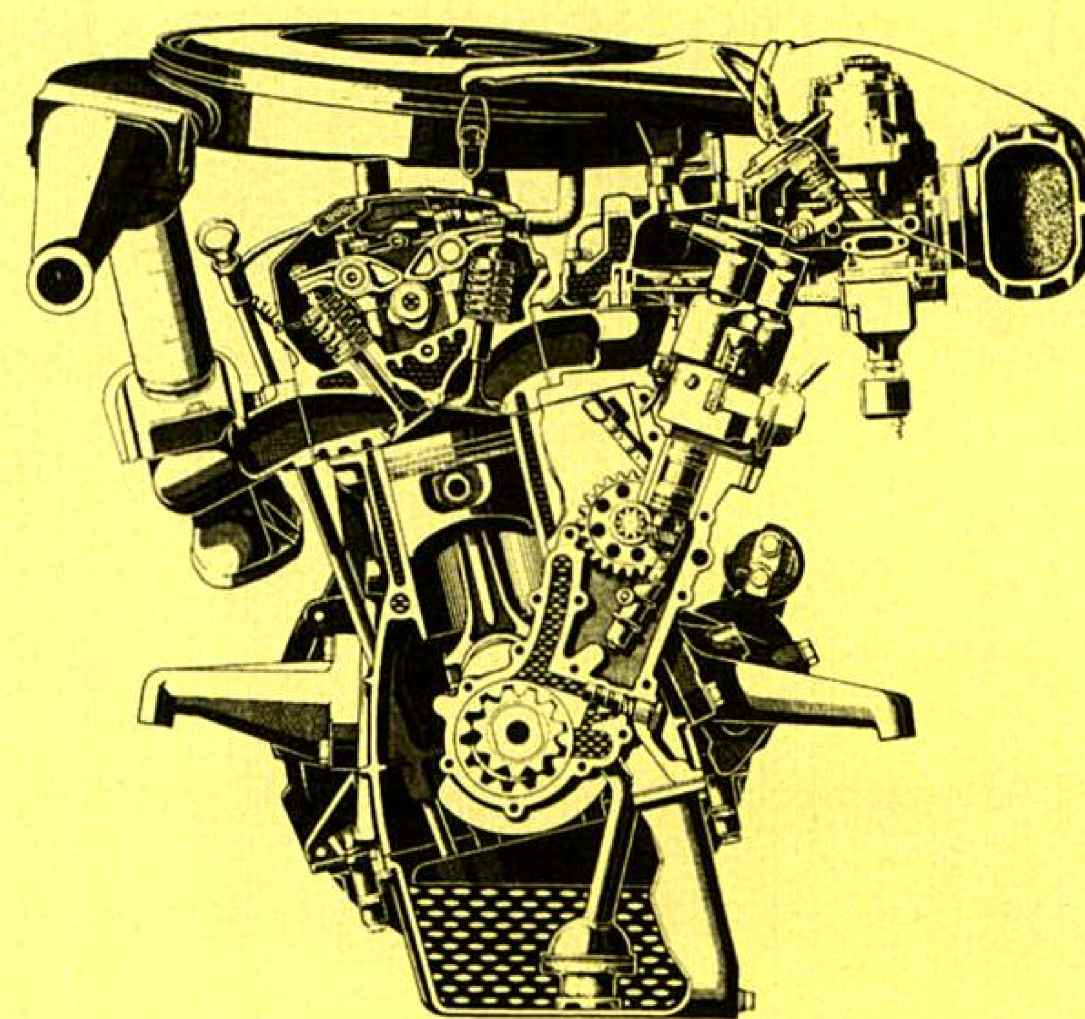
723. Eine Pumpe fördert 1800 l Wasser in 0,3 min 6,5 m hoch. Mechanische Pumpenleistung in kW?



724. Von einer legierten Stahlwelle ist ein Span abzudrehen. Wie lange dauert dies, wenn die Welle 615 mm lang ist, der Drehstahl mit einem Vorschub von 0,5 mm/U bewegt wird und sich die eingespannte Welle mit 820 U/min dreht?

725. Welche mittlere Geschwindigkeit v in m/s hat der Kolben eines Rennmotors, sobald die Hubhöhe 55 mm und die Motordrehzahl 12600 U/min beträgt?

Anleitung: Bei jeder halben Umdrehung der Kurbelwelle durchwandert der Kolben **einmal** die Hubhöhe.



726. Der Kolben eines Motors hat eine Fläche $A = 62\,cm^2$ und steht unter einem Druck von $p = 23\,N/cm^2$. Der Hub des Kolbens beträgt $h = 8{,}1\,cm$, die Drehzahl des Kurbeltriebes 5200 U/min. Welche Leistung P in kW wird entwickelt?

Anleitung: Der Kolbenhub wird während einer halben Umdrehung des Kurbeltriebes zurückgelegt. Die für die Leistungsberechnung maßgebliche Zeit in s ist also die Zeit für eine halbe Umdrehung.

727. Ein Zahnrad mit dem Durchmesser $d = 60\,mm$ wird von einem Elektromotor mit einer Leistung $P = 2{,}5\,kW$ und einer Drehzahl von 80 U/min angetrieben. Für die Festigkeitsberechnung der Zähne soll die am Umfang wirkende Kraft F bestimmt werden.

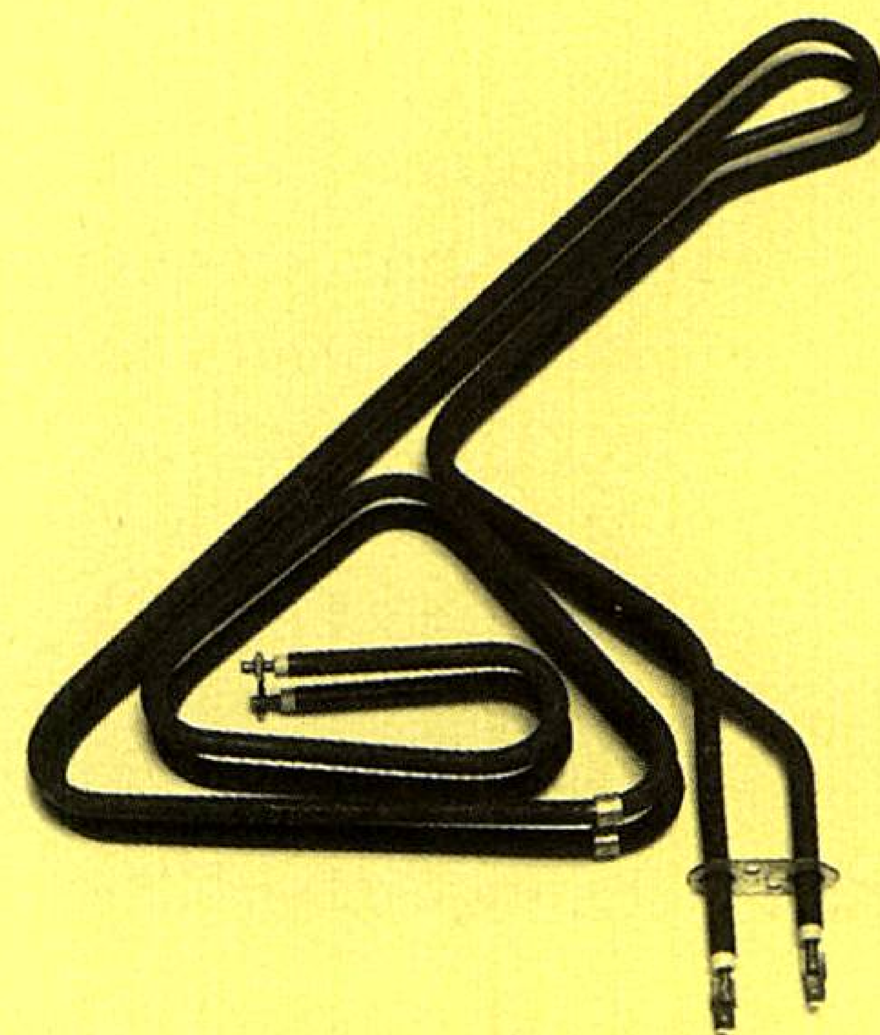
Anleitung: Leistung = Kraft × Geschwindigkeit. $P = Fv = F \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Dabei ist Δs der Umfang des Zahnrades und Δt die Zeit für eine Umdrehung (in Sekunden).

Elektrotechnik/Elektronik

728. Der Heizstrom I der Bildröhre eines Monitors beträgt 0,14 A bei einer Heizspannung $U = 11\,V$. Wie groß ist der Widerstand des Heizfadens?

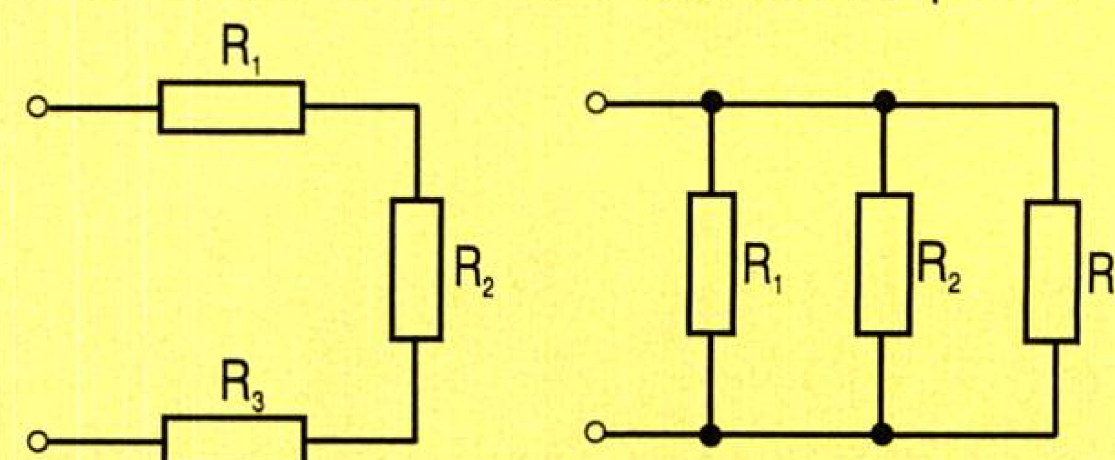
Anleitung: Die Spannung U ist gleich dem Produkt aus Stromstärke I und dem Widerstand R.

729. Wie groß ist die Stromaufnahme des Heizkörpers eines Wäschetrockners mit $R = 27{,}5\,\Omega$, der an eine Netzspannung von $U = 230\,V$ angeschlossen wird?



730. Zwei hintereinander geschaltete Spulen haben die Widerstände $R_1 = 85\,\Omega$ und $R_2 = 275\,\Omega$ und werden von einem Gleichstrom $I = 40\,mA$ durchflossen. Wie groß ist die Spannung an jeder der beiden Spulen?

731. Drei Widerstände ($R_1 = 40\,\Omega$, $R_2 = 12\,\Omega$, $R_3 = 60\,\Omega$) können parallel oder in Serie geschaltet werden. Wie groß ist jeweils der Ersatzwiderstand?



Anleitung: Serienschaltung $R_S = R_1 + R_2 + R_3$

Parallelschaltung $\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$

732. Ein Spannungsmesser hat einen Endausschlag bei $U_0 = 100\,mV$ und einen Widerstand von $R_0 = 40\,\Omega$. Welcher Vorwiderstand R_V ist erforderlich, wenn der Messbereich auf $U_n = 10\,V$ erweitert werden soll?

Anleitung: Faktor der Messbereichserweiterung $n = \frac{U_n}{U_0}$. Erforderlicher Vorwiderstand $R_V = (n-1)\,R_0$

733. Die elektrische Leistung P eines elektrischen Bügeleisens für $U = 230\,V$ das $I = 2{,}5\,A$ aufnimmt, ist zu berechnen.

Anleitung: Die Leistung P ergibt sich aus dem Produkt von Spannung U und Stromstärke I.

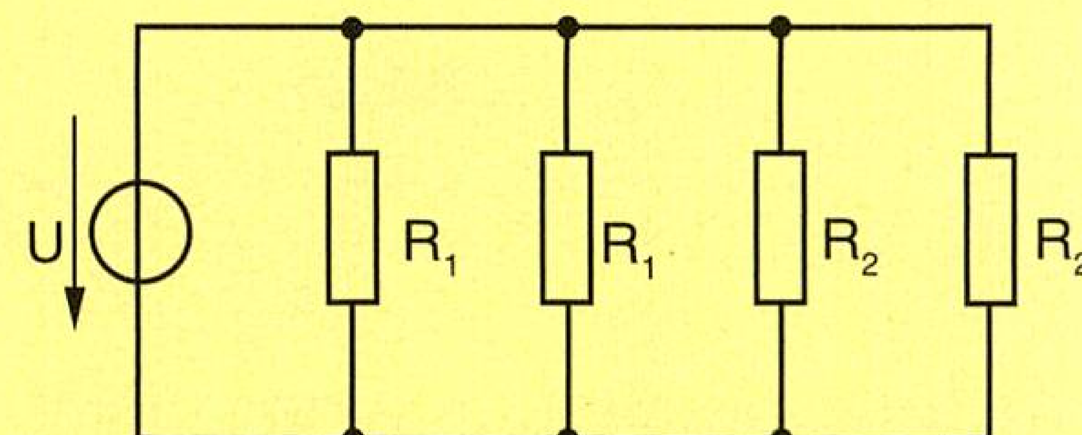
734. Wie groß ist der Energieverbrauch eines Tauchsieders, der eine elektrische Leistung von $P = 876\,W$ hat und 5 min eingeschaltet ist?

Anleitung: Die Leistung P ergibt sich aus dem Quotienten von Arbeit W und der aufgewendeten Zeit t.

735. Wie groß ist der elektrische Widerstand R eines Staubsaugers, der an eine Netzspannung U = 230 V angeschlossen ist und eine elektrische Leistung P = 352 W erbringt?
Anleitung: $U = I \cdot R$, $P = U \cdot I$

736. Ein Vorwiderstand von $R = 10\,\Omega$ wird von einem Strom $I = 6$ A durchflossen. Welche elektrische Leistung P geht am Widerstand verloren?

737. Ein Beleuchtungskörper (U = 230 V) besteht aus zwei Lampen des Typs 1 ($R_1 = 484\,\Omega$) und zwei Lampen des Typs 2 ($R_2 = 605\,\Omega$). Wie groß ist der Energieverbrauch W in einer Woche, wenn täglich durchschnittlich 5 Stunden Licht benötigt wird?



738. Eine Batterie kann 12 Stunden lang Strom mit einer Stärke I = 25 A einer Spannung U = 440 V liefern. Welche elektrische Arbeit W_0 in kWh ist aufzuwenden, um die Batterie wieder zu laden, wenn der Wirkungsgrad $\eta = 80\%$ beträgt?

Anleitung: Wirkungsgrad $\eta = \frac{\text{gewonnene Energie}}{\text{aufgewendete Energie}}$

739. Ein 1,8 kW Gleichstrommotor für U = 230 V nimmt bei Volllast I = 12 A auf. Wie groß ist sein Wirkungsgrad η?

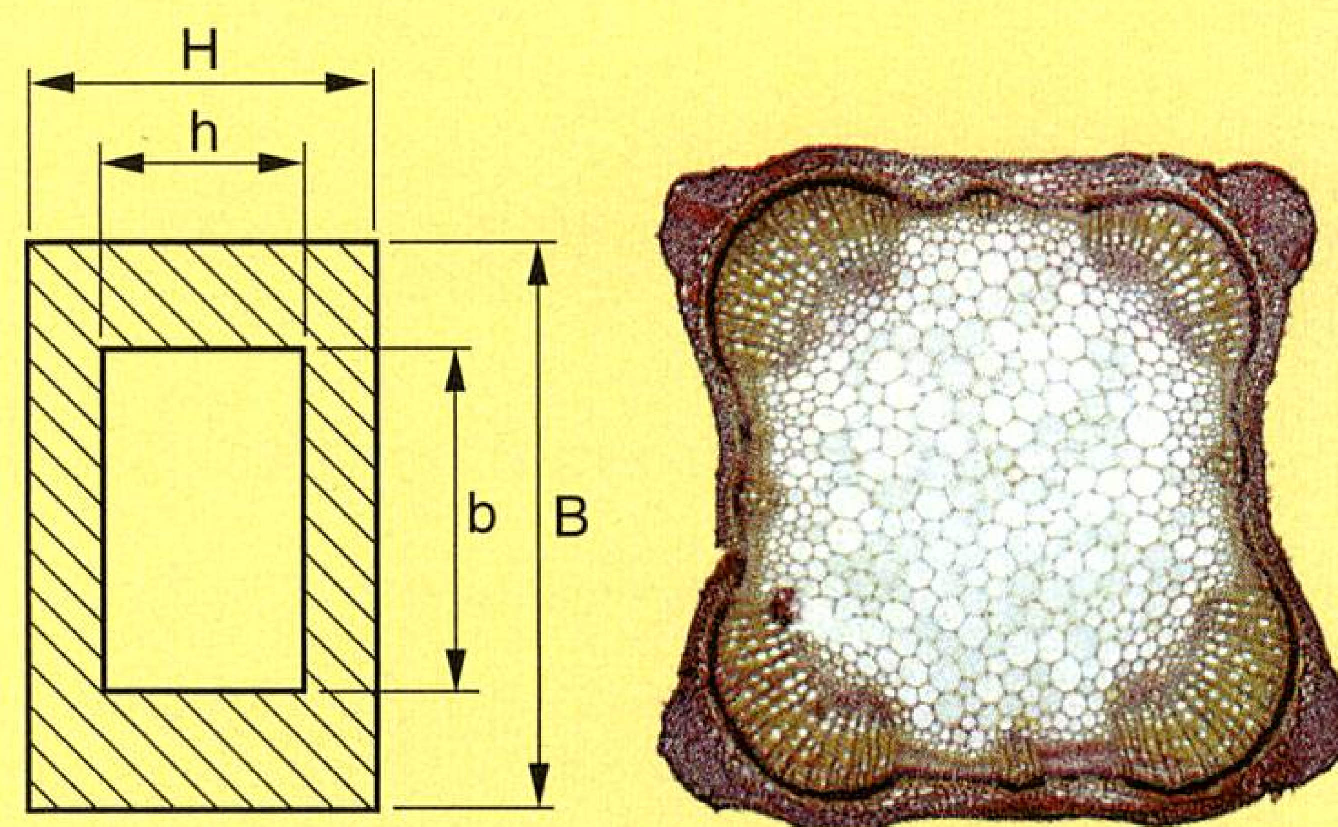
740. Ein Gleichstrommotor gibt eine Leistung von P = 2560 W ab und hat einen Wirkungsgrad $\eta = 75\%$. Wie groß ist seine Stromaufnahme bei einer Anschluss-Spannung U = 230 V?

741. Wie groß ist — für U = 230 V — die Leistung P eines Gleichstrommotors, der bei Volllast I = 9,5 A aufnimmt und einen Wirkungsgrad $\eta = 87\%$ hat?

Bautechnik

742. In einem Schüttgutsilo ($12\,m^3$) lagern 18840 kg Schüttgut. Die Dichte ρ ist zu berechnen.

743. In Vorderasien und im Mittelmeerraum ist die Zitronenmelisse beheimatet, die bei uns sowohl in Kultur als auch verwildert vorkommt. Ihren Namen erhielt die Pflanze durch den starken Duft nach Zitrone. Die Staude hat langgestielte Blätter, wird bis zu 80 cm hoch und bleibt krautig. Durch das Wachstum, ursprünglich an sehr freien, ungeschützten Stellen, muss der Stengel den **scherenden** und **drehenden Kräften** des Windes gerecht werden. Dies ist vorzüglich durch den fast **rechteckigen Stängelquerschnitt** (vgl. nebenstehendes Bild) gegeben. An diesem Prinzip wird auch im Leichtbau festgehalten.

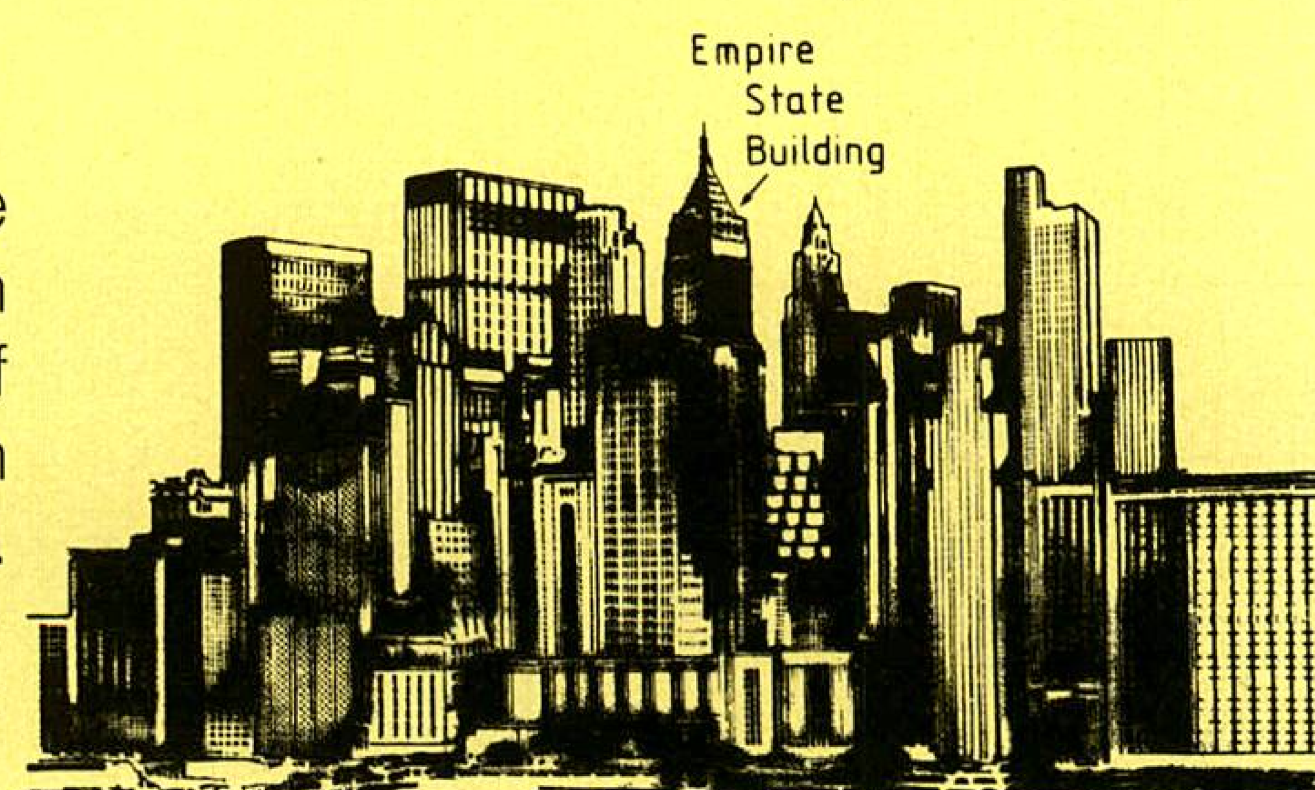


Ein Maß für die **Verwindungssteifigkeit** ist das **Widerstandsmoment W:** Aus der Formel $W = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$ für einen hohlen Träger mit rechteckigem Querschnitt — definiert in Bezug auf eine Achse — ist h explizit zu berechnen.

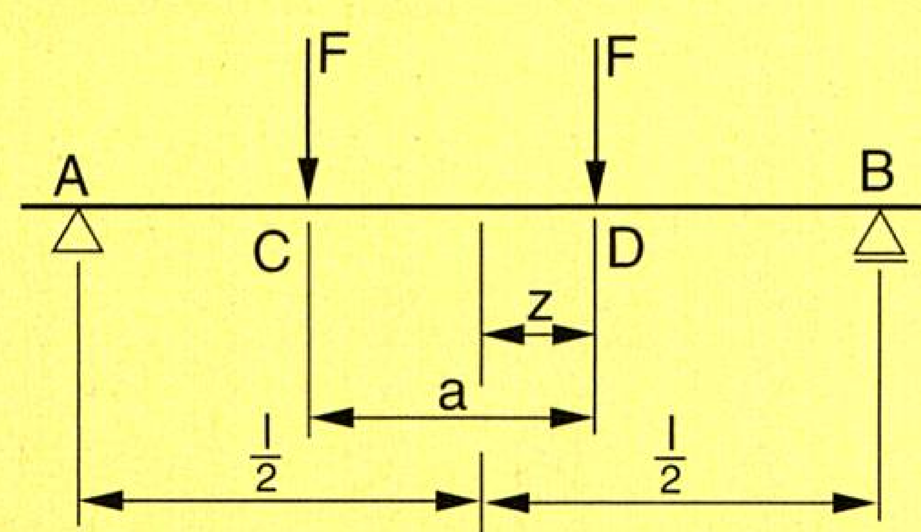
744. Wie groß ist die Dehnfuge zu wählen, wenn bei einer Außentemperatur von 12° C Eisenbahnschienen mit einer Regellänge von 120 m verlegt werden (Ausdehnungskoeffizient $\alpha = 0{,}000011$ 1/° C) und mit einer maximalen Erwärmung auf 74° C gerechnet wird?

745. Mit wie vielen Geschoßen käme das 102-stöckige Empire State Building in New York aus, wenn die Erbauer bereit gewesen wären, die tatsächlich bebaute Fläche A_{102} um 10% der — auf den 102 Geschoßen verteilten — Nutzfläche A zu vergrößern? In welchem Verhältnis stehen „alte" und „neue" Baufläche? (Vgl. Seite 78 Aufgabe **540**.)

Anleitung: $A_{102} = \frac{A}{102}$



746. Zum Bau eines Bürohauses wird im 6. Stock ein Kran eingesetzt, der auf Schienen rollt. Die Dimensionierung der Figur ist gegeben:



$l = 12\,m$

$a = 2\,m$

$m = 2\,t$

In den Radauflagepunkten C und D entstehen die Drehmomente M_C und M_D, die von den Kranrädern hervorgerufen werden. Folgende Formeln für die Außermittigkeit z liegen vor:

$$M_C = \frac{ml}{2}\left(1 - \frac{a}{l}\left(1 + \frac{2a}{l}\right) + \frac{2z}{l^2}(3a - 2z)\right)$$

$$M_D = \frac{ml}{2}\left(1 - \frac{a}{l} + \frac{2z}{l^2}(a - 2z)\right)$$

Für welchen Wert von z gilt Gleichheit der Drehmomente?

Wirtschaftsingenieurwesen

747. Die Fixkosten einer Produktion betragen 148 000,— Euro, die Stückkosten (Betriebskosten, Material, Löhne) 31,30 Euro. Der Verkaufspreis ohne MwSt. soll 37,50 Euro sein. Wie viel Stück müssen mindestens produziert und verkauft werden, damit kein Verlust entsteht?

748. Die Produktion von 25000 Stück Fliesen verursacht einer Firma Kosten in Höhe von 53 800,— Euro. Wie muss der Preis pro Stück sein (ohne MwSt.), damit die Firma — vom Produktionspreis — 9% Gewinn hat?

749. Ein Produkt wird um 114,10 Euro verkauft. In diesem Preis sind 20% Mehrwertsteuer (vom festgelegten Verkaufspreis) und 8% Gewinn der Firma (vom Produktionspreis) enthalten. Herstellungskosten des Produkts?

Textiltechnik

Garnnummern sind ein Maß für die Feinheit von Garnen. Hauptsächlich sind folgende Nummerierungen in Gebrauch.

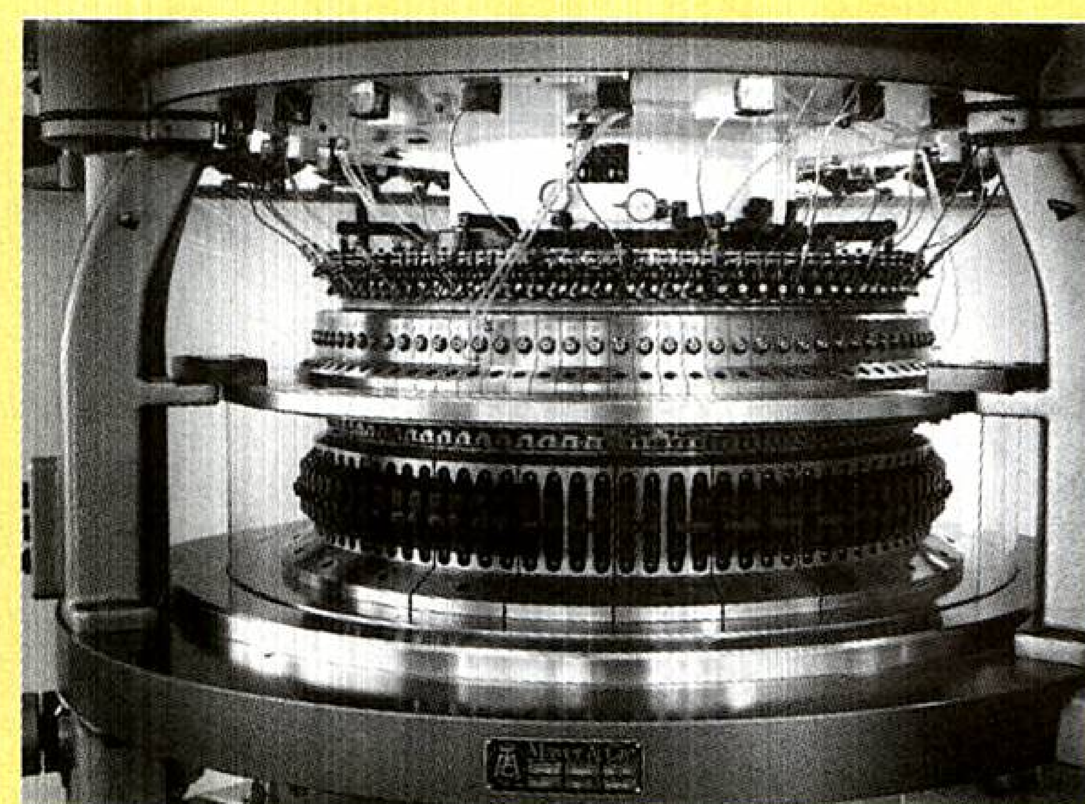
(1) Die **metrische Garnnummer Nm**: Sie gibt die Länge in Metern pro Gramm an. $Nm = \frac{l\,[m]}{m\,[g]}$. Bei Nm wird keine Einheit angegeben.

(2) Der **Titer tex** (Feinheit): Er gibt die Masse in Gramm pro km Länge an. Feinheit $= \frac{m\,[g]}{l\,[km]} = \frac{m\,[g] \cdot 1000}{l\,[m]}$. Die Einheit heißt tex (= g/km).

750. Wie viel km Garn Nm 42 enthält eine Spule mit 65 dag?

751. Für das Sticken von 400 Vereinsabzeichen soll ein Garn mit der Feinheit 28 tex[1] verwendet werden. Pro Abzeichen werden 8,5 m Garn verbraucht. Wie viel dag Garn werden benötigt?

752. Eine Stichprobe hat für ein Garn 48 tex ergeben. Das gemessene Garnstück wog 405 mg. Wie groß war seine Länge?



Zur Berechnung von **Zwirnnummern** kann bei Angabe der Garnfeinheit in Nm folgende Formel verwendet werden:

$$\frac{1}{Nm_z} = \frac{1}{Nm_1} + \frac{1}{Nm_2} + \cdots$$

753. Welche Nm hat ein Zwirn, der aus den Garnen Nm 40 und Nm 32 hergestellt wird?

---

[1]) Ttex = 28 tex heißt: 1 km wiegt 28 g.

754. Im Lager einer Zwirnerei liegen 420 kg Garn Nm 28. Nun soll ein Zwirn Nm 20 erzeugt werden.

a) Welche Nm muss das Anzwirngarn haben?

b) Wie viel kg dieses Garnes müssen bestellt werden, wenn das lagernde Garn voll aufgebraucht werden soll? Dabei wird für beide Garne die gleiche Einzwirnung angenommen, d. h. die beiden Garne sind im Zwirn mit gleicher Länge vertreten.

755. Welche Nm hat ein Dreifachzwirn, der aus drei gleich feinen Garnen erzeugt wird?

756. Bei 40 m Zwirn, aus den Garnen Nm 34, Nm 40 und Nm 60 wurden folgende Einzelfadenlängen festgestellt: Nm 34: 42 m, Nm 40: 46 m, Nm 60: 50 m. Wie viel kg Garn der einzelnen Nummern sind für eine Gesamtzwirnmenge von 500 kg zu disponieren?

Da die Einzelfäden beim Verzwirnen einen verschlungenen Weg nehmen, wird der Zwirn immer kürzer als die Einzelfäden sein. Die relative Differenz zwischen Fadenlänge und Zwirnlänge nennt man **Einzwirnung** (EZ). Sie wird in Prozent angegeben. Die Nm des Zwirns unter Berücksichtigung der Einzwirnung wird nach folgender Formel ermittelt:

$$Nm_Z\ (\text{eingezwirnt}) = \frac{Nm_z\,(100 - EZ)}{100}$$

757. a) Es ist die Nm eines Zwirns aus zwei Fäden Nm 40 bei 8 % Einzwirnung zu ermitteln.

b) Ein Dreifachzwirn aus Fäden der Nm 60 ergibt eine effektive Zwirnnummer von Nm 18. Wie viel beträgt die Einzwirnung?

Die nebenstehenden Problemstellungen haben mit Stickereigarnen zu tun und beziehen sich lediglich auf Sticken, Verzwirnung und Nähen. „Woher kommt eigentlich der Stoff für meine Bluse?“ mag sich die Leserin dieser Zeilen denken. „Das Hemd, mein Unterleibchen — wird der Stoff hierfür maschinell hergestellt?“ könnte sich der Leser überlegen. Auf diesen Bereich der Textiltechnik gehen wir gerne ein: Die Fotografie auf Seite 102 zeigt eine sogenannte **„Rundstrickmaschine“** für die Herstellung von Stoffen für Oberbekleidung oder auch Freizeitbekleidung. Es handelt sich um eine ausgesprochene Hochleistungsmaschine. Sie kann Baumwolle, Baumwoll-Mischungen, Polyester, Polyamid und selbstverständlich auch Wolle verarbeiten. Noch einige technische Daten: Die Maschine hat einen Zylinderdurchmesser von 30" mit einer Systemzahl 96 und ist in den Teilungen 18 bis 28 verfügbar.

In der Streichgarnspinnerei wird durch **Verzug** eines Vorgarnes ein feineres Garn gewonnen. Dabei wird auf der Spinnmaschine ein Garn mit größerer Geschwindigkeit abgezogen als das Vorgarn in die Maschine hineinläuft. Dadurch wird das Garn der Länge nach verzogen. Für die Berechnung dient die Formel:

$$\text{Verzug} = \frac{Nm_{Garn} - Nm_{Vorgarn}}{Nm_{Garn}} \cdot 100\%$$

758. Welche metrische Garnnummer erhält ein Vorgarn mit Nm 12 bei 40 %-igem Verzug?

In der Konfektion wird der **Nähfadenverbrauch** für 1 m Nahtlänge nach der Formel $L = 2\left(1 + 0{,}85\frac{d}{s}\right)$ berechnet, wobei die Stoffdicke d und die Stichlänge s in mm einzusetzen sind.

759. Wie groß ist der Nähfadenverbrauch für 1 m Nahtlänge bei 0,6 mm Stoffdicke und 2 mm Stichlänge? Auf wie viel mm muss die Stichlänge vergrößert werden, um pro m Naht 21 cm Faden einzusparen?

Zur Terminberechnung in der Konfektion wird folgende Formel verwendet: $T = \frac{VM \cdot A}{AZ \cdot 60 \cdot N \cdot LF}$

VM: Vorgabezeit pro Stück bei Normalleistung in Minuten
A: Auftragsmenge in Stück
AZ: Arbeitszeit pro Tag in Stunden
N: Anzahl der eingesetzten Arbeitskräfte
LF: Erwarteter Leistungsfaktor (Zeitfaktor) der Gruppe (Arbeitskraft)
T: Dauer der Fertigstellung in Arbeitstagen

760. a) Wie viele Arbeitstage benötigt man zur Fertigung einer Auftragsmenge von 1320 Stück, wenn 12 Arbeitskräfte eingesetzt sind, die tägliche Arbeitszeit 8 h, die Vorgabezeit pro Stück 96 min und der Leistungsfaktor der Gruppe 1,15 beträgt?

b) Wie viele Arbeitskräfte sind einzusetzen, wenn der Auftrag in 15 Arbeitstagen fertig sein soll?

c) Wie hoch ist dann die zu erwartende Stückzahl pro Tag („Soll-Leistung“)?

d) Welchen Leistungsfaktor erreichte diese Gruppe gestern, als die Tagesleistung 80 Stück betrug?

Zur Berechnung der Arbeitseinteilung in einer Näherei werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$\text{Taktzeit} = \frac{60\text{ min}}{\text{Stück/h}}\text{, aber auch: Taktzeit} = \frac{\text{Vorgabezeit}}{\text{Gruppenstärke}} \Rightarrow \frac{\text{Vorgabezeit}}{\text{Gruppenstärke}} = \frac{60\text{ min}}{\text{Stück/h}}$$

761. Die Vorgabezeit für eine Bluse ist 24 min/Stück, die erwartete Stundenleistung 40 Stück. Man berechne **a)** die Taktzeit **b)** die Anzahl der einzusetzenden Arbeitskräfte.

762. Die fehlenden Größen sind zu berechnen:

	Vorgabezeit in min/Stk.	Gruppenstärke	Takt in HM [1]	Stück/h
a)	24	28		
b)	12			150
c)		20		120
d)	14		60	

Chemieingenieurwesen

763. Die allgemeine Gasgleichung $p \cdot V = nRT$ ist nach T aufzulösen. Anschließend ist der Wert von T für $p = 10\,000$ Pa, $V = 2\,m^3$, $R = 8{,}3143$ J/(mol K) und $n = 3$ zu berechnen!

764. Die Mischungsgleichung $m_1p_1 + m_2p_2 = (m_1 + m_2)\,p_M$ ist nach **a)** p_1 **b)** m_2 **c)** m_1 aufzulösen.
Bemerkung: m_1, m_2 ..... Molekulargewicht, p_1, p_2, p_M ..... Gewichtsprozent.

765. Im Molenbruch $x_1 = \frac{p_1M_2}{(100 - p_1)\,M_1 + p_1M_2}$ ist der Prozentgehalt p_1 zu berechnen.

766. Die Gleichgewichtskonstante $K = \frac{C_E \cdot C_F}{C_A \cdot C_B}$ der chemischen Gleichung $A + B \rightarrow E + F$ soll nach **a)** C_E **b)** C_A aufgelöst werden.
Bemerkung: C_E, C_F ..... Konzentration der Endprodukte, C_A, C_B ..... Konzentration der Ausgangsprodukte.

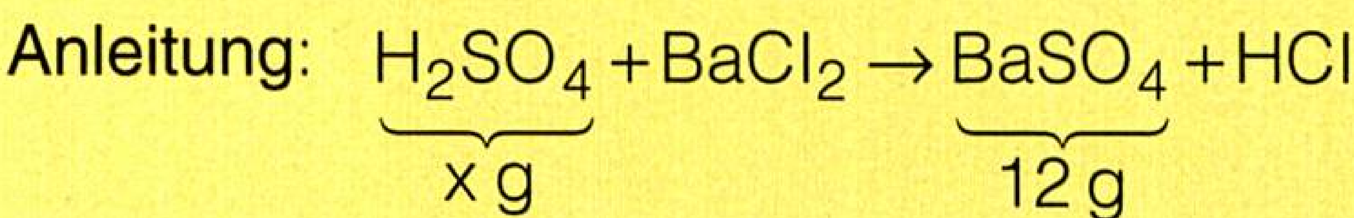
767. Natürlich vorkommender Kohlenstoff besteht zu 98,9% aus dem Isotop der Atommasse 12 und zu 1,1% aus dem „Isotop 13". Wie groß ist die relative Atommasse des Gemisches?

Anleitung: Mischungsgleichung: $\frac{m_1p_1 + m_2p_2}{p_1 + p_2} = M$

768. Silizium besteht aus folgender Mischung: 92,2% ^{28}Si, 4,7% ^{29}Si und 3,1% ^{30}Si. Mittlere relative Atommasse des Gemisches?

769. Wie viel Prozent Schwefelsäure enthält eine wässrige Lösung der Masse 27 g, wenn man den nach Zusatz von Bariumchlorid gefällten weißen Niederschlag glüht und seine Masse zu 12 g ermittelt?

Anleitung:



$$\underbrace{H_2SO_4}_{x\,g} + BaCl_2 \rightarrow \underbrace{BaSO_4}_{12\,g} + HCl$$

770. Wie viel 50%-ige Schwefelsäure erhält man aus 200 kg Schwefelkies FeS_2, der 15% unbrauchbares Gestein enthält?

1 H 1,008		
6 C 12,011	8 O 16,00	
14 Si 28,09	16 S 32,06	17 Cl 35,46
26 Fe 55,85		
56 Ba 137,36		

771. In einem 10 l Behälter befinden sich 0,3 mol Kohlenmonoxid und 0,2 mol Chlor im Gleichgewicht mit Phosgen[2] $COCl_2$. Die Gleichgewichtskonstante $K = \frac{[COCl_2]}{[CO][Cl_2]}$ ist 133 mol^{-1}.

a) Wie viel mol Phosgen ist im Behälter?

b) Welchem Gewichtsprozentsatz der Gesamtgasmenge entspricht das?

---

[1]) HM = 100 min, Taktzeit in HM $= \frac{60\text{ min}}{\text{Stück/h}} \cdot 100$.

[2]) Phosgen war einer der gefährlichsten Kampfstoffe des ersten Weltkriegs, denn es hydrolisiert in der Lunge rasch zu Salzsäure.

772. Welches Volumen nimmt Sauerstoff mit der relativen Atommasse 16 ein, wenn 350 g mit einem Druck von 180000 Pa bei 20° C aufbewahrt werden sollen?

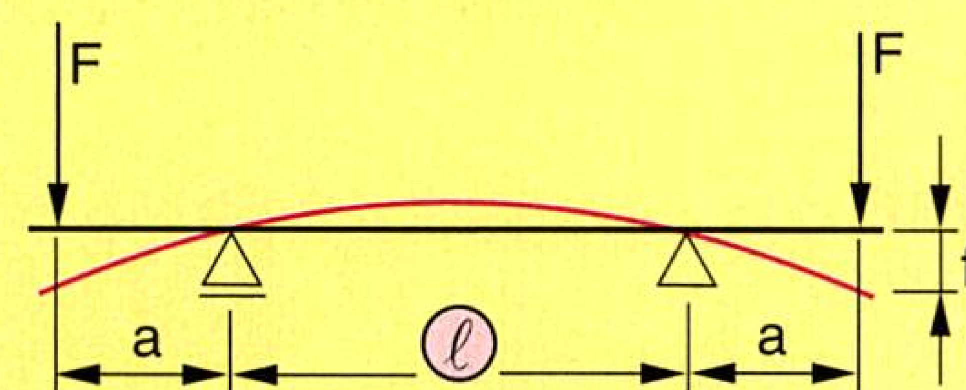
Anleitung: Das allgemeine Gasgesetz lautet $p \cdot V = \frac{m}{M} RT$, mit p ..... Druck in Pa, V ..... Volumen in m^3, m ..... Masse in g, M ..... Molmasse in $g\,mol^{-1}$, R = 8,3143 J/(mol K) (Gaskonstante), T ..... absolute Temperatur in Kelvin.

Vermischte Aufgaben

773. Durchbiegung eines Biegeträgers:

$$f = \frac{Fa^2}{EI}\left(\frac{a}{3} + \frac{\ell}{2}\right)$$

F ..... Kraft (N)
f ..... Durchbiegung unter F (mm)
E ..... Elastizitätsmodul (N/mm^2)
I ..... Axiales Flächenträgheitsmoment (mm^4)
a, ℓ ..... Abmessungen (mm)



Man berechne ℓ explizit.

774. Wie weit ist ein Gewitter noch entfernt, wenn zwischen Blitz und Donner 14 s vergehen?

Anleitung: Man rechne mit einer Schallgeschwindigkeit von 340 m/s, die bei 15° C zutrifft.

775. Welchen Weg legt ein Gegenstand im freien Fall innerhalb der ersten 0,8 s zurück? (Wert für $g = 9{,}81 m/s^2$)



776. Ein Fallschirmspringer sinkt mit 5 m/s zu Boden. Aus welcher Höhe h müsste man zu Boden springen, um mit der selben Geschwindigkeit aufzutreffen? (Wert für $g = 9{,}81 m/s^2$)

Anleitung: Es gilt $v = \sqrt{2gh}$ mit v ..... Endgeschwindigkeit beim freien Fall aus der Höhe h. (Der Luftwiderstand wird vernachlässigt).

777. Aus einer Altmetallsorte mit 60 % Kupfer und 40 % Zinn soll durch Zusatz von Kupfer eine Walzbronze mit 92 % Kupfer und 8 % Zinn hergestellt werden. Welche Mengen Altmetall und Kupfer sind für 100 kg Walzbronze erforderlich?

778. Aus zwei Messingsorten mit den Zusammensetzungen 80 % Kupfer, 20 % Zink bzw. 30 % Kupfer, 70 % Zink soll eine Gelbguss-Sorte hergestellt werden. Diese soll 65 % Kupferanteil aufweisen. Welche Anteile in Prozenten ausgedrückt haben die Messingsorten an der geplanten Legierung?

779. Wie viel kg Wasser von 20° C muss man mit 30 kg Wasser von 77° C mischen, um Badewasser von 38° C zu erhalten?

780. In einem Behälter mit 4 kg Wasser von $\vartheta_1 = 20{,}55°$ C werden 0,2 kg Wasserdampf von $\vartheta_2 = 100°$ C eingeleitet. Welche Temperatur hat das Gemisch?

Anleitung: 1 kg Wasserdampf von 100° C gibt bei der Kondensation zu Wasser von 100° C 2258 kJ ab, wodurch das kalte Wasser bereits aufgewärmt wird. Zum Erwärmen von 1 kg Wasser um 1° C werden 4,19 kJ benötigt.

781. Ein Holzbrett soll, wenn es ganz unter Wasser getaucht ist, eine Tragkraft von 220 N haben. Welche Masse muss das Brett haben? ($\rho_{Holz} = 600 kg/m^3$, $\rho_{Wasser} = 1000 kg/m^3$).

782. Wie viel m^3 Helium sind nötig um einen Freiballon zu starten, dessen Hüllengewicht 1000 N beträgt und der 4500 N Nutzlast tragen soll? ($\rho_{Luft} = 1{,}3 kg/m^3$, $\rho_{He} = 0{,}18 kg/m^3$ bei normalem Druck)

783. Bei der Dimensionierung eines elektrischen Badezimmerstrahlers mit 1800 W Leistung muss berücksichtigt werden, dass der Warmwiderstand des Heizleiters, der bei 70° C glüht, infolge des positiven Temperaturkoeffizienten um 5 % höher liegt als der Kaltwiderstand bei einer Raumtemperatur von 20° C. Es ist **a)** der Dauerstrom im Betrieb **b)** die Stromaufnahme im kalten Zustand bei 230 V Betriebsspannung zu ermitteln.

Formelumstellungen

784. a) $W_p = \frac{\pi h b^2}{16}$ $h = ?$ **b)** $Z_{aus} = (1+\mu_2)R_{i1} + R_{i2}$ (1) $R_{i1} = ?$ (2) $R_{i2} = ?$

785. a) $I_y = \frac{m}{4}\left(a^2 + \frac{b^2}{3}\right)$ $m = ?$ **b)** $y^3 = \frac{16Fx}{\pi\sigma_b}$ (1) $x = ?$ (2) $F = ?$ (3) $\sigma_b = ?$

786. a) $M = 2\frac{K}{D}\lambda^2\gamma a^2 H$ (1) $D = ?$ (2) $H = ?$ **b)** $J_{\xi\eta} = \frac{ab\pi}{4}(D^2 - d^2)$ (1) $a = ?$ (2) $b = ?$

787. a) $Y = 0{,}30\,R + 0{,}59\,G + 0{,}11\,B$ $G = ?$ **b)** $I_n = I_x n_x^2 + I_y n_y^2 + I_z n_z^2$ $I_y = ?$

788. a) $I_n = \frac{3(R^2 + 6H^2)}{20(R^2 + H^2)} \cdot R^2 m$ $m = ?$ **b)** $M_{max} = \frac{P\ell}{4} + \frac{q\ell^2}{8}$ (1) $P = ?$ (2) $q = ?$

789. a) $E = C\left(\frac{\tau}{100}\right)^4$ $C = ?$ **b)** $\frac{\Delta Q}{\Delta U} = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d}$ $\Delta U = ?$

790. a) $C_t^2 = \frac{E}{2\rho_0(1+\mu)}$ $\rho_0 = ?$ **b)** $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$ (1) $Q_2 = ?$ (2) $\varepsilon_r = ?$

791. a) $C_2 = \frac{(T_1T_2 + T_2T_3 - T_1T_3)^2}{AT_2(T_3 - T_2)(T_2 - T_1)}$ $A = ?$ **b)** $c = \frac{2bh^3E}{3(\pi + 3 - 4\sqrt{2})R^3}$ (1) $b = ?$ (2) $E = ?$

792. a) $t = \frac{s}{c-v} + \frac{s}{c+v}$ $s = ?$ **b)** $\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{h^2 - 4z^2}{bh^3} \cdot Q$ (1) $Q = ?$ (2) $b = ?$

793. a) $0 = y_0 + (x_2 - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ $x_2 = ?$ **b)** $\tau_{max} = \frac{4}{3A}\left(Q + \frac{3M_t}{d}\right)$ (1) $Q = ?$ (2) $M_t = ?$

794. a) $R = R_0(1 + \alpha(\vartheta - \vartheta_0))$ $\vartheta = ?$ **b)** $E_1 - E_2 = (m_1 - m_2)c^2$ $m_2 = ?$

795. $q_{1,2(CO_2)} = S\left[E_g - \left(\frac{T_g}{T_w}\right)^{0,65} E_w\right]$ (1) $E_w = ?$ (2) $E_g = ?$

796. $\kappa = 4{,}74 \cdot 10^4 \lambda_0 p^{-0,5} T^{0,75} e^{-5850U_i/T}$ $\lambda_0 = ?$

797. a) $M = -4qa^2 + \frac{qax}{18}\left(33 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ $q = ?$ **b)** $\varphi_\ell = \frac{i_{e1}w_{e1} + i_{e2}w_{e2}}{R_{me}}$ (1) $R_{me} = ?$ (2) $i_{e2} = ?$

798. $\tau = \frac{L}{R_1 + \Delta R + k\Omega_0 \frac{w_e}{R_m}}$ (1) $\Delta R = ?$ (2) $k = ?$ (3) $\Omega_0 = ?$ (4) $R_m = ?$

799. $\frac{S + Y_{ak}}{Y_{ag} + Y_{ak} + Y_a} = V_n$ (1) $S = ?$ (2) $Y_{ag} = ?$ (3) $Y_{ak} = ?$ (4) $Y_a = ?$

800. $\Omega_M = \frac{K_G\Phi_G\Omega_G - (R_G + R_M)I}{K_m\Phi_M}$ (1) $\Phi_M = ?$ (2) $\Phi_G = ?$ (3) $R_G = ?$

801. a) $I = \frac{U}{R_a + \frac{R_i}{n}}$ (1) $n = ?$ (2) $R_1 = ?$ **b)** $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$ (1) $C = ?$ (2) $C_2 = ?$

802. $A + \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ (1) $x_2 = ?$ (2) $y_2 = ?$

803. $v_\ell = -\frac{P\ell^3}{2Ehb^3} - (4 + 5\mu)\frac{P\ell}{4Ehb}$ (1) $P = ?$ (2) $h = ?$ (3) $E = ?$

804. $E_n - E_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{e^4 m_e}{\varepsilon_0^2 h^2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ $m_e = ?$

805. a) $v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ $\quad m_t = ?$

b) $u_{01} = \dfrac{\dfrac{u_2}{1+\frac{u_1}{E}} - \dfrac{u_2}{1-\frac{u_1}{E}}}{\dfrac{2}{1-\frac{u_1^2}{E^2}}}$ $\quad u_2 = ?$

806. a) $C_2\beta - C_1\alpha - \frac{\ell}{2Da}\left(2\gamma a^2 + \frac{1}{12}\gamma\ell^2 - A_2\right) = 0$ $\quad$ (1) $C_1 = ?$ $\quad$ (2) $\gamma = ?$

807. a) $f' = \dfrac{f}{1-\frac{v}{c}}$ $\quad v = ?$

b) $\frac{u_2}{u_1} = -\frac{Z_2}{Z_1} \cdot \dfrac{f}{\frac{Z_1 + Z_2}{vZ_1} + f}$ $\quad v = ?$

808. $\sigma_y = -\frac{P}{4\pi h}\left[(1-\mu)\frac{x}{x^2+y^2} - (1+\mu)\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$ $\quad$ (1) $P = ?$ $\quad$ (2) $\mu = ?$

809. $G_0 = S_3(1+v) + \frac{1+\mu_1}{R_a + R_{i1}} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{i3}}$ $\quad$ (1) $S_3 = ?$ $\quad$ (2) $R_2 = ?$ $\quad$ (3) $R_{i3} = ?$ $\quad$ (4) $R_{i1} = ?$

810. $I_3 = \frac{U_0 R_1 R_4}{(R_i + R_1)[(R_3 + R_4)(R_2 + R_5) + R_3 R_4] + R_i R_2 (R_3 + R_4)}$ $\quad$ (1) $R_1 = ?$ $\quad$ (2) $R_4 = ?$

811. $\sigma_\phi = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) + \frac{E\alpha}{1-\mu}\left[\frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2}\left(\frac{b}{r}\right)^2 T_b + T_r - T\right]$ $\quad$ (1) $p = ?$ $\quad$ (2) $\alpha = ?$ $\quad$ (3) $\mu = ?$ $\quad$ (4) $T_r = ?$

812. $\frac{M_{max}}{M_{min}} = 1 + \dfrac{\frac{M_{w1}}{M_{w2}}(1 - e^{-t_1/\tau_M})(1 - e^{-t_2/\tau_M})}{\frac{M_{w1}}{M_{w2}}(1 - e^{-t_1/\tau_M})e^{-t_2/\tau_M} + (1 - e^{-t_2/\tau_M})}$ $\quad$ (1) $M_{w1} = ?$ $\quad$ (2) $M_{w2} = ?$

813. a) $\frac{A}{B_1} = \dfrac{x_\sigma \xi_1}{\pi\sqrt{2}\mu_0\left[\left(\frac{h_n + 3h_k}{3h_n} \cdot \frac{3y+1}{4}\right)\frac{h_n}{\tau_p} \cdot \frac{\tau_n}{b_n} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{3y-1}{2} 0{,}3 \frac{\tau_p}{\ell}\right]}$ $\quad$ (1) $x_\sigma = ?$ $\quad$ (2) $b_n = ?$ $\quad$ (3) $\ell = ?$

Bei den folgenden Aufgaben ist die jeweils gesuchte Variable zunächst „allgemein" auszudrücken. Beim Einsetzen der speziellen Werte ist auf die richtige Einheit des Resultats zu achten!

814. Flächeninhalt einer Ellipse: $A = ab\pi$, $A = 80\,\text{cm}^2$, $b = 4\,\text{cm}$, $a = ?$

815. Flächeninhalt eines Zylindermantels: $M = 2\pi rh$, $M = 50\,\text{cm}^2$, $h = 1{,}6\,\text{cm}$, $r = ?$

816. Volumen eines Drehellipsoids: $V = \frac{4\pi ab^2}{3}$, $V = 26632\,\text{mm}^3$, $b = 1{,}7\,\text{cm}$, $a = ?$

817. Iterative[1)] Lösung der KEPLER-Gleichung für Satellitenbahnen: $E_{n+1} = M + e \cdot \sin E_n$, $E_{n+1} = 3{,}6652 \cdot 10^{-1}$, $e = 0{,}1235$, $\sin E_n = 3{,}4202 \cdot 10^{-1}$, $M = ?$

818. Kapazitiver Widerstand eines Kondensators: $X_C = \frac{1}{2\pi fC}$, $X_C = 3\,\text{k}\Omega$, $C = 106\,\text{pF}$, $f = ?$

819. Wärmefluss einer durch eine Blende abgedeckten Strahlungsquelle: $\Phi = \sigma A T^4$, $\Phi = 1500\,\text{W}$, $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\text{W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$, $T = 2273\,\text{K}$, $A = ?$

820. Temperaturabhängigkeit eines OHMschen Widerstands: $R_w = R_k(1 + \alpha\Delta T)$, $R_k = 3\,\Omega$, $R_w = 5\,\Omega$, $\alpha = 0{,}004\,\text{K}^{-1}$, $\Delta T = ?$

---

1) Ein schrittweises Rechenverfahren zur Annäherung an die exakte Lösung nennt man **Iteration**.

821. Volumen eines Kugelabschnitts: $V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$, $V = 3{,}5\,m^3$, $h = 150\,cm$, $r = ?$

822. Flächenträgheitsmoment eines rechteckigen Hohlkörpers: $I = \frac{b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3}{12}$, $I = 18364\,cm^4$, $b_1 = 18\,cm$, $h_1 = 26\,cm$, $h_2 = 20\,cm$, $b_2 = ?$

823. Widerstand zweier Leiter unterschiedlicher Länge mit gleichem Durchmesser: $R = \frac{4(\rho_1 \ell_1 + \rho_2 \ell_2)}{\pi d^2}$, $\rho_1 = \frac{1}{56}\,\Omega\,mm^2/m$, $\rho_2 = \frac{1}{33}\,\Omega\,mm^2/m$, $\ell_1 = 1\,km$, $d = 1\,mm$, $R = 80\,\Omega$, $\ell_2 = ?$

824. Wirkungsgrad einer hydraulischen Presse: $\eta = \frac{F_2}{F_1}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$, $F_1 = 5625\,N$, $\eta = 0{,}8$, $d_1 = 2{,}5\,cm$, $d_2 = 3{,}5\,dm$, $F_2 = ?$

825. Energie eines frei fallenden Körpers: $E = mgh + \frac{mv^2}{2}$, $E = 396\,J$, $g = 9{,}81\,m/s^2$, $v = 10\,m/s$, $h = 5\,m$, $m = ?$

826. Ausflusszeit eines Wasserbehälters mit Ausflussfläche A: $T = \frac{2d_0^2\pi}{\mu A\sqrt{2g}}\sqrt{z}$, $T = 9\,min$, $\mu = 0{,}82$, $d_0^2\pi = 16\,\pi m^2$, $z = 3{,}8\,m$, $A = ?$

827. Selbstinduktivität einer Ringspule: $L = \mu_0 \mu_r N^2 \cdot \frac{A}{2\pi r_m}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,H/m$, $\mu_r = 500$, $N = 10000$, $r_m = 20\,cm$, $L = 1\,H$, $A = ?$

RELATIONEN UND FUNKTIONEN

1. Relationen

Wenn man in der 39. Auflage des Österreichischen Wörterbuches nachschlägt, findet man auf Seite 482 folgende Eintragung:

Relation die, -/-en, Verhältnis, Beziehung, Zuordnung

Handelt es sich bei einer Relation um eine Beziehung zwischen zwei Menschen?

Sicherlich nicht nur, denn Beziehungen (Relationen) zwischen Zahlen haben wir schon früher kennen gelernt:

Z. B. besteht zwischen den Zahlen 3 und 4 die Beziehung, dass 3 **kleiner als** 4 ist.

Die Mengen $A = \{3, 5, 9\}$ und $B = \{9, 3, 5\}$ stehen zueinander in folgender Beziehung: $A = B$.

Was ist eine Relation?



Beispiel:

Vorgelegt seien die Mengen $A = \{3, 4, 8\}$ und $B = \{4, 16\}$.

Zwischen den Elementen $x \in A$ und $y \in B$ soll durch die Beziehung (Relationsvorschrift) „x ist Teiler von y" eine Relation festgelegt werden.

Lösung:

Um zu erkennen wie die Elemente der Mengen A und B durch die Relationsvorschrift zueinander in Beziehung stehen zeichnen wir ein „Pfeildiagramm":

Dabei wird von $x \in A$ zu $y \in B$ **genau dann** ein Pfeil gezeichnet, wenn „x ist Teiler von y" eine wahre Aussage ist.

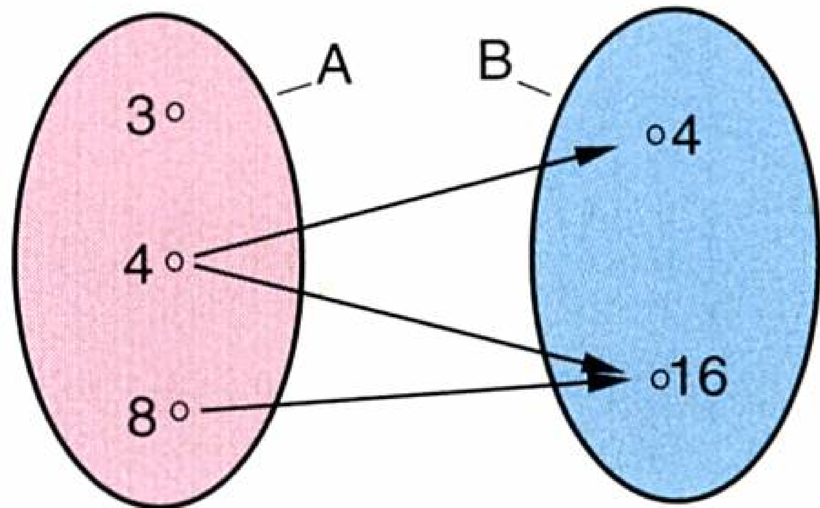
Die zugehörige Relation R ist dargestellt durch die Menge aller (geordneten) Paare (x, y), bei denen ein Pfeil von x nach y führt:

$$R = \{(4, 4), (4, 16), (8, 16)\}$$

Bildet man die Produktmenge der beiden Mengen A und B, erhält man:

$$A \times B = \{(3, 4), (3, 16), \mathbf{(4, 4)}, \mathbf{(4, 16)}, (8, 4), \mathbf{(8, 16)}\}$$

Wir erkennen: Die Relation R ist beschreibbar durch eine Teilmenge der Produktmenge $A \times B$.



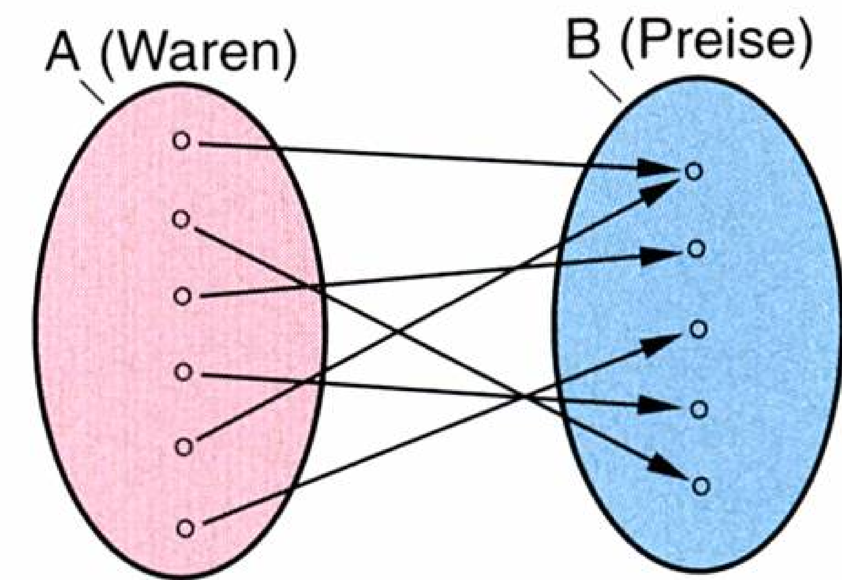
Definition:

Eine **Relation** zwischen den Mengen A und B ist beschreibbar durch eine Menge R geordneter Paare (x, y) mit $x \in A$ und $y \in B$. Ist $(x, y) \in R$, sagen wir: *„Die Relation trifft auf das geordnete Paar zu"* und schreiben auch xRy.

2. Was ist eine Funktion?

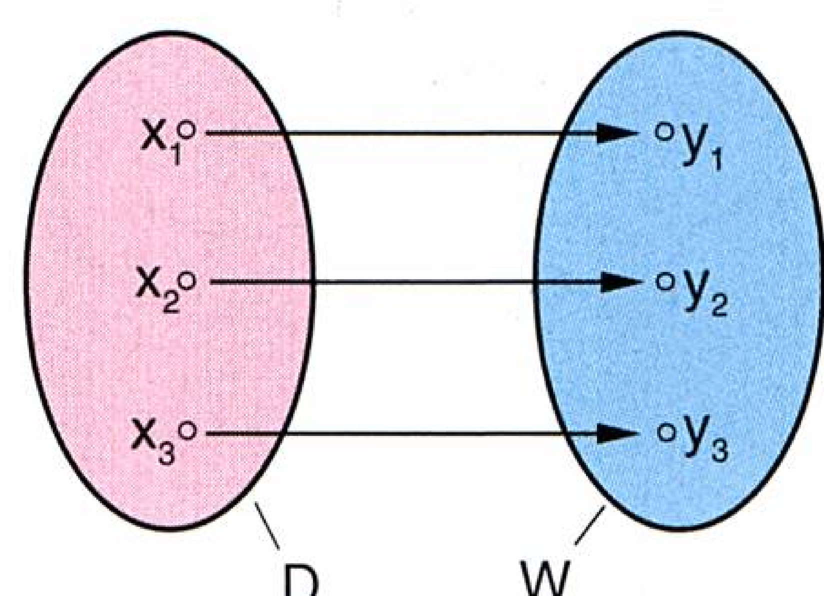
In einem Schaufenster eines Geschäfts sah ich vor kurzem eine Art von „Zuordnung": Jede Ware trug ein Kärtchen, auf dem der Preis vermerkt war. Jeder Ware wurde auf diese Weise eine Zahl (ihr Preis) zugeordnet. Es war in der Auslage **keine** Ware ohne Preisangabe. Manche Waren hatten allerdings gleich hohe Preise.

Wenn man diesen Sachverhalt abstrakt betrachtet, könnte man sagen: Es werden Elemente x einer Menge A Elementen y einer Menge B zugeordnet. Es handelt sich also wieder um eine Menge von geordneten Paaren (x, y). Es liegt somit eine Relation vor, die folgende **Besonderheiten** aufweist: **Jedem** Element x der Menge A wird **genau ein** Element y der Menge B zugeordnet. Relationen dieser speziellen Art heißen **Funktionen**.



Definition:

Eine **Funktion f** ist eine **Zuordnung** zwischen den Elementen der Menge D und W, wobei **jedem** Element $x \in D$ **genau ein** Element $y \in W$ zugeordnet ist. Die Funktion wird also durch eine Menge geordneter Paare (x, y) beschrieben, wobei $y \in W$ dasjenige Element ist, welches dem $x \in D$ zugeordnet sein soll. Man kann also f als Teilmenge von $D \times W$ auffassen!



Bezeichnungen:

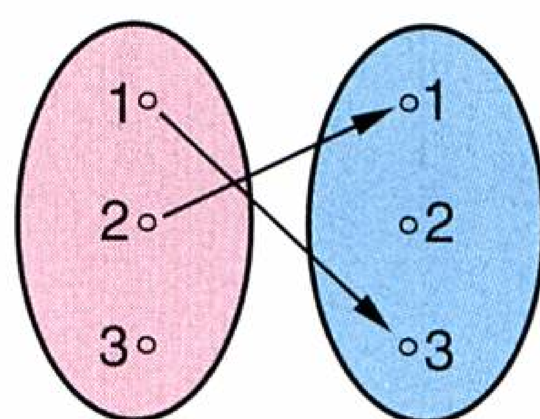
f, g, h ..... Funktionen
Es ist üblich, für die Bezeichnung von Funktionen Kleinbuchstaben zu verwenden.
D ..... Definitionsmenge
W ..... Wertemenge

$f \subseteq D \times W$ bedeutet, dass die Teilmenge f der Produktmenge D x W eine Funktion ist.

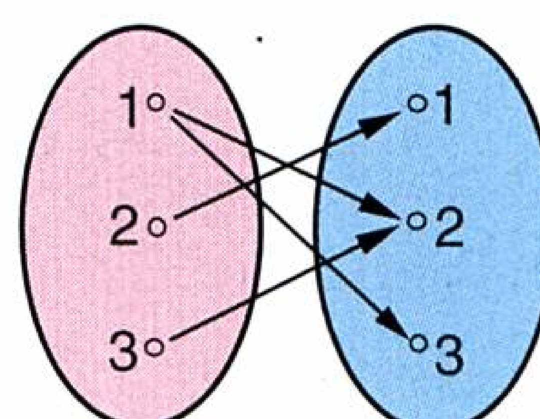
Statt $f \subseteq D \times W$ kann man schreiben: $f: D \to W$ (gesprochen: f ist eine Funktion von D nach W). Der Pfeil deutet an, dass jedem Element $x \in D$ genau ein Element $y \in W$ zugeordnet ist. Man schreibt für $(x, y) \in f$ auch $y = f(x)$ und spricht „y ist f von x".

Betrachten wir folgende Pfeildiagramme:

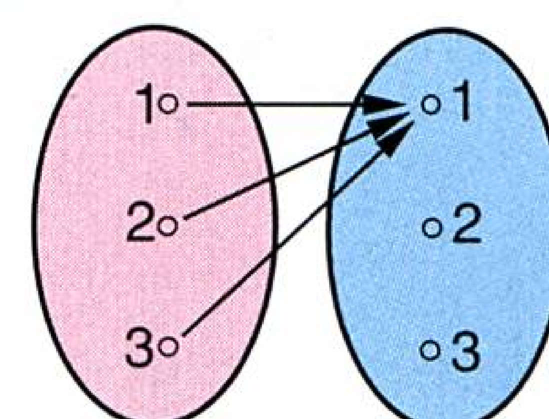
(1)



(2)



(3)



Bei **(1)** geht vom Element 3 kein Pfeil weg, bei **(2)** gehen vom Element 1 zwei Pfeile weg. Es handelt sich also **nicht** um Funktionen.

Anders liegt die Sache beim Pfeildiagramm **(3)**:

Hier geht von jedem Element aus A **genau ein** Pfeil weg, d. h. **jedem** $x \in A$ wird **genau ein** $y \in B$ zugeordnet. Das Pfeildiagramm **(3)** stellt also eine Funktion dar.

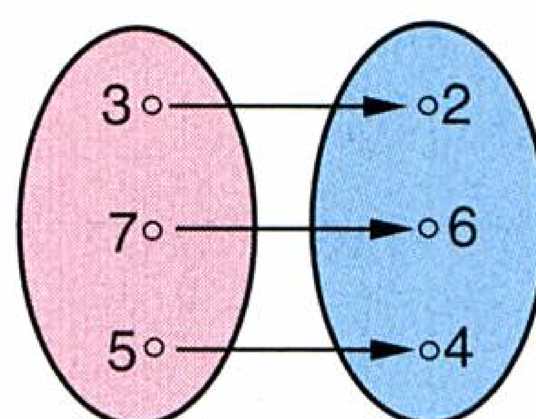
Beispiel:

{(3, 2), (7, 6), (5, 4)} ist **a)** durch ein Pfeildiagramm **b)** durch eine Wertetabelle **c)** im kartesischen Koordinatensystem darzustellen.

Weiters ist anzugeben, ob es sich um eine Funktion handelt. (Begründung!)

Lösung:

a)

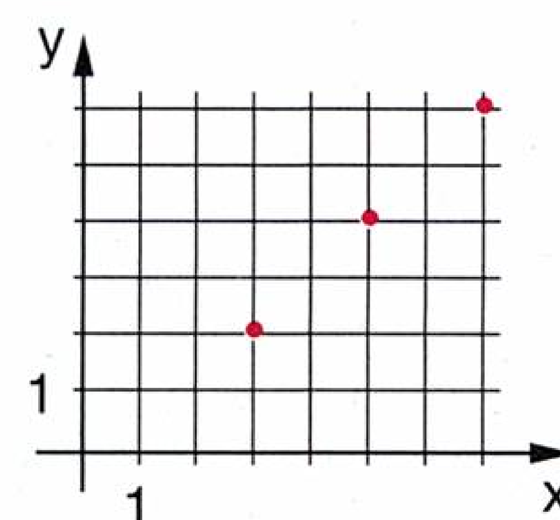


Es handelt sich um eine Funktion, weil von jedem Element der Definitionsmenge **genau ein** Pfeil ausgeht.

b) Darstellung durch eine Wertetabelle:

x	y
3	2
7	6
5	4

c) Darstellung im kartesischen Koordinatensystem:



Die Funktion {(3, 2), (7, 6), (5, 4)} des obigen Beispiels lässt sich als „Formel" in der Gestalt $x \mapsto f(x)$ darstellen: $x \mapsto x - 1$ für $D = \{3, 7, 5\}$

Spätestens an dieser Stelle wird die Sache unübersichtlich. Im Grunde genommen fehlt bei den bisherigen Betrachtungen der Bezug zur Wirklichkeit. Die ganze Angelegenheit ist reichlich abstrakt und es stellt sich die Frage: Gibt es eigentlich im „täglichen Leben" Funktionen?

Durch die folgenden Beispiele soll gezeigt werden, dass Funktionen nicht mathematischer Selbstzweck sind.

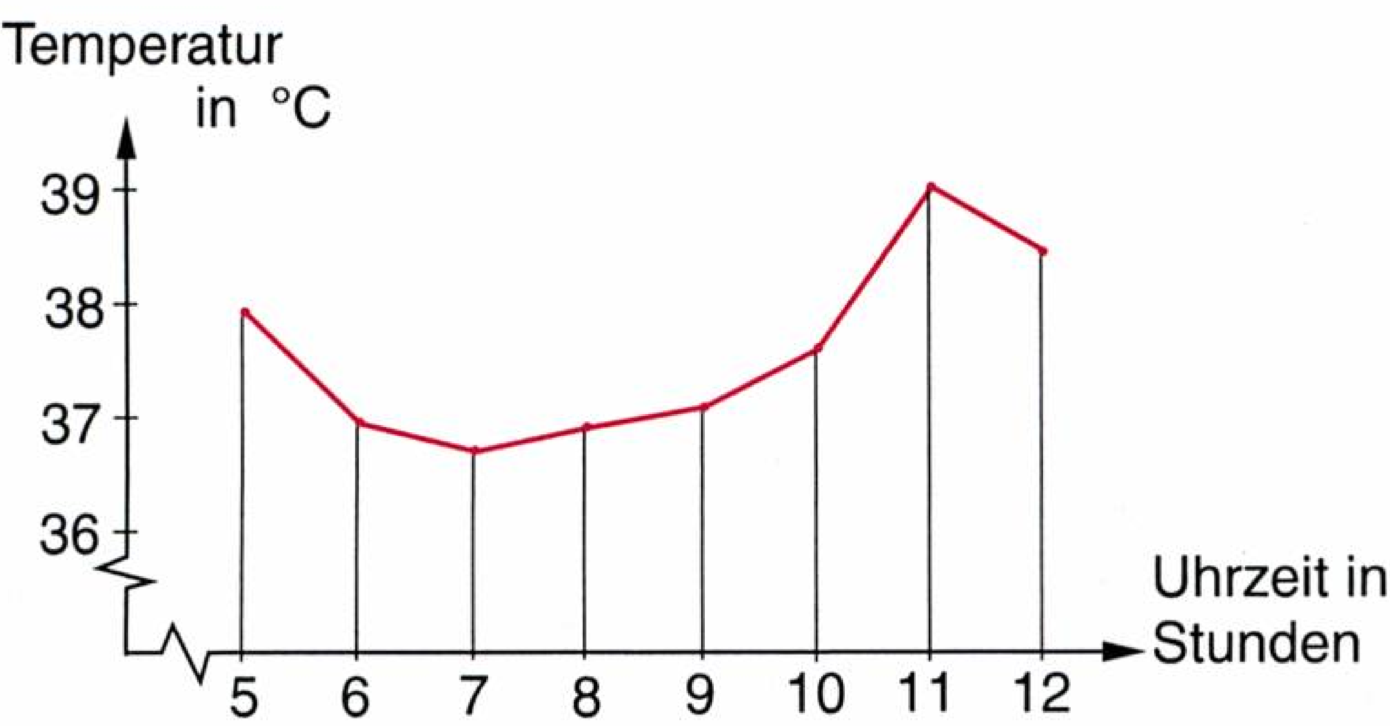
Beispiel:

Die Körpertemperatur eines Kranken wird stündlich gemessen und in eine Tabelle eingetragen:

Uhrzeit:	5^h	6^h	7^h	8^h	9^h	10^h	11^h	12^h
Körpertemperatur:	38°	37°	36,8°	37°	37,1°	37,6°	39°	38,5°

Die „Fieberkurve" des Patienten ist grafisch (zeichnerisch) darzustellen!

Lösung:



Die Temperatur ist abhängig von der Zeit, d. h. die Temperatur ist eine **Funktion** der Zeit. Die voneinander abhängigen Werte — Temperatur und Zeit — tragen wir auf zwei normal aufeinander stehenden Achsen auf, wobei die Maßstäbe beliebig sind.

Es liegen für die grafische Darstellung nur 8 Punkte vor, die unter der Annahme, dass sich die Körpertemperatur des Kranken im Zeitraum einer Stunde gleichmäßig ändert, verbunden wurden. Genau genommen entspricht dies aber nicht den Tatsachen.
Eine genauere Fieberkurve kann man nur durch eine **kontinuierliche** Temperaturmessung erhalten. Hierfür eignet sich ein auf elektronischer Basis arbeitender „Thermograph" (= Temperaturschreiber). Dieser wandelt Wärme mittels eines Temperaturfühlers in elektrische Spannung um, welche nach entsprechender Aufbereitung die Führung eines Schreibstiftes steuert. Dadurch wird eine Kurve des Temperaturverlaufs kontinuierlich — also ohne Knicke — aufgezeichnet.

Die Zahlenpaare der nebenstehenden Tabelle wurden durch Messung gewonnen und bestimmen eine sogenannte **empirische Funktion**[1] (Erfahrungsfunktion).

Bei empirischen Funktionen werden also „Mess-Serien" von zwei voneinander abhängigen Größen festgelegt, die aus der Erfahrung oder Beobachtung stammen. Die zeichnerische Darstellung ist meist sehr anschaulich und man gewinnt auf einen Blick Übersicht.

Beispiel:

Die Marktforschung für eine Ware ergab, dass der Monatsumsatz bei einem Verkaufspreis von 3000,— Euro 400 Einheiten, bei 5000,— Euro nur noch 200 Einheiten betrug.
Der Absatz bei einem Stückpreis von 4000,— Euro ist **a)** grafisch und **b)** rechnerisch zu ermitteln!

Lösung:

a) Wir wollen den gegebenen Text kurz und prägnant in einer Wertetabelle zusammen fassen:

Der Umsatz ist vom Preis abhängig, d. h. der Umsatz ist eine **Funktion** des Preises.

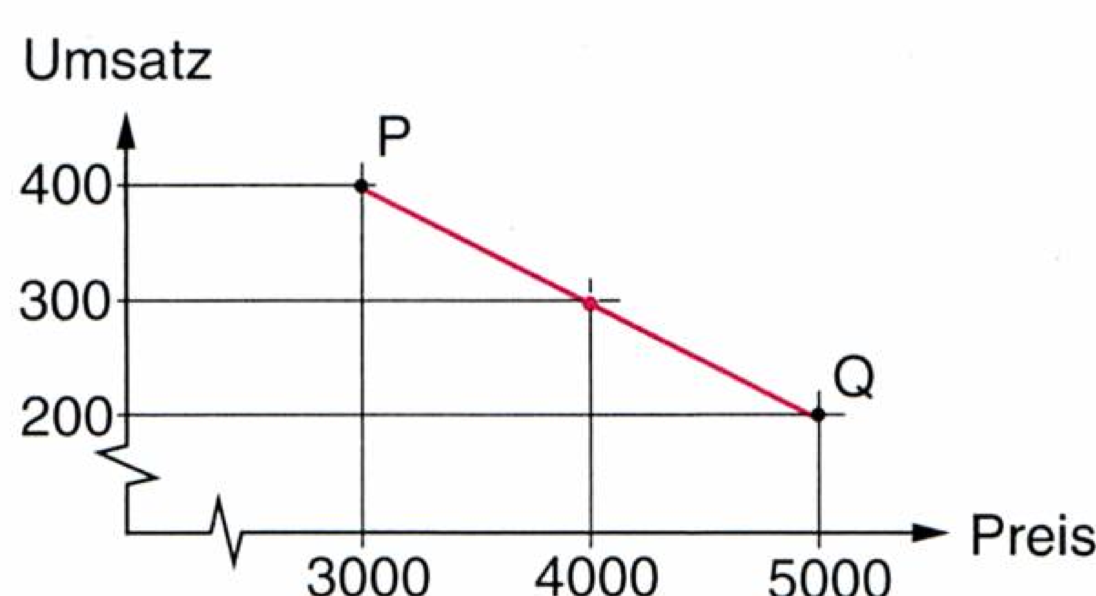
Preis	Absatz
3000	400
5000	200
4000	?

[1]) empeiria (griech.): Erfahrung.

Definition:

Die Bestimmung von Zwischenwerten einer Funktion auf Grund vorliegender Wertepaare der Funktion nennt man **Interpolation**.

Die Interpolation ist ein Näherungsverfahren. Die interpolierten Werte sind grundsätzlich ungenau.



In einem rechtwinkeligen Koordinatensystem werden die geordneten Paare (3000, 400) und (5000, 200) der Wertetabelle eingetragen. Es sind damit die Punkte P und Q der „Umsatzkurve" festgelegt.

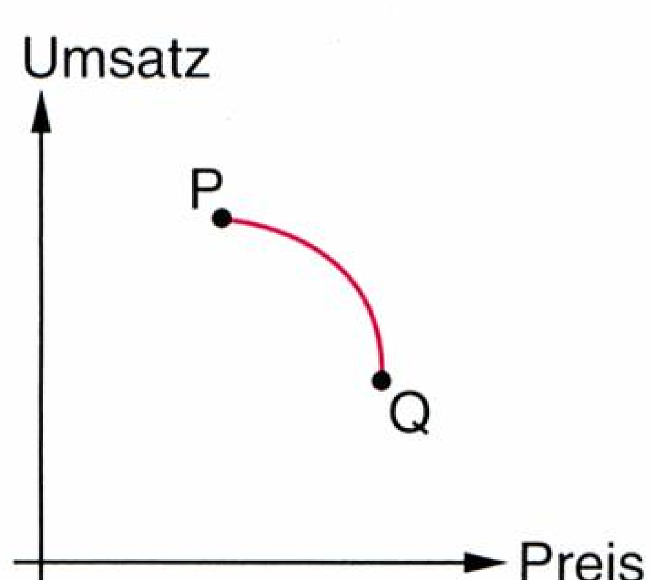
Bei der **linearen Interpolation** nimmt man nun an, dass sich die voneinander abhängigen Werte (Preis und Umsatz) **gleichmäßig** ändern und verbindet P und Q durch eine Strecke.

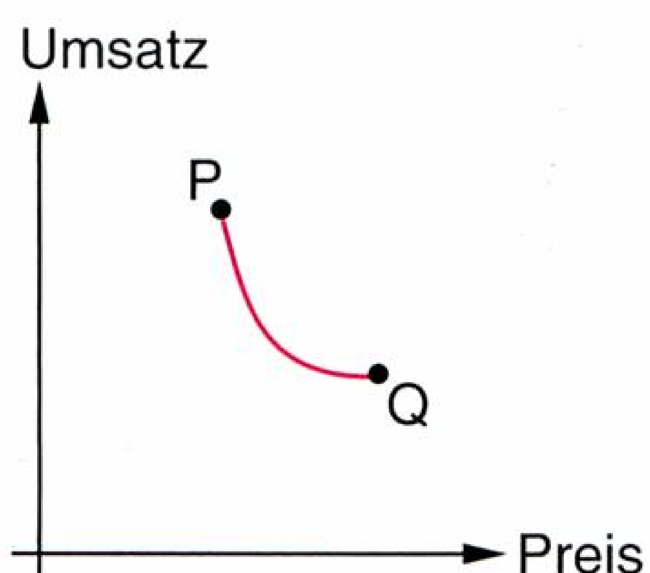
Aus der Figur lässt sich nun leicht ablesen, welcher Absatz bei einem Preis von 4000, — Euro zu erwarten ist: 300 Stück werden voraussichtlich bei einem Verkaufspreis von 4000,— Euro abgesetzt werden.

b) Bezogen auf einen Preis von 3000,— Euro und einen Absatz von 400 Stück kann man sagen:

Preiserhöhung um 2000,— Euro ⇒ Absatzminderung um 200 Stück
Preiserhöhung um 1000,— Euro ⇒ Absatzminderung um 100 Stück

400 Stück — 100 Stück = **300 Stück**





Von der Umsatzkurve des obigen Beispiels sind nur zwei Punkte bekannt: P und Q. Dadurch ist der Verlauf der Kurve natürlich nicht eindeutig bestimmt. Es bleiben beliebig viele Möglichkeiten offen, von denen zwei in den Figuren der Außenspalte eingezeichnet wurden.

Wenn man allerdings — und das ist eben der Grundgedanke der sogenannten **linearen Interpolation** — die beiden Punkte durch eine **Strecke** verbindet, so hat man eine Möglichkeit gewählt, bei der die tatsächlichen Werte **gut angenähert** werden und relativ leicht zu berechnen sind.

(1) Der Umfang u eines Kreises ist von seinem Radius r abhängig (u ist eine Funktion von r).

(2) Der Radius r eines Kreises ist von seinem Umfang u abhängig (r ist eine Funktion von u).

Welche Aussage ist richtig?

Bei **(1)** ist r die „unabhängige" (wählbare) Größe und u die davon abhängige. Bei **(2)** ist das umgekehrt.

An diesem Beispiel ist leicht erkennbar, dass — je nach Situation — die eine oder die andere Aussage zutrifft: Denkt man daran mit einem Zirkel einen Kreis zu zeichnen, dann kann man die Öffnung des Zirkels (den Radius) wählen und der Kreisumfang ergibt sich in Abhängigkeit davon. Biegt man aber ein Drahtstück zu einem Kreis, dann ergibt sich der Radius dieses Kreises in Abhängigkeit von der (vorgegebenen oder gewählten) Länge des Drahtes.

Was ist typisch für alle Funktionen?

Bei einer Funktion ist eine Größe von der anderen abhängig. Die Kenntnis der „unabhängigen" Größe zieht im Prinzip die Kenntnis der abhängigen Größe nach sich: Die Höhe des Preises bestimmt (im Hinblick auf unser obiges Beispiel) den Umsatz. Zu jeder Temperatur gehört eine bestimmte Länge eines gegebenen Metallstabs[1]) usw.

[1]) Jedes Objekt ändert beim Erwärmen seine Größe.

Diese Abhängigkeit wird durch die Verwendung von Gleichungen gut ausgedrückt, z. B. $y = 2x - 3$.

Jedem Wert von x wird ein genau bestimmter Wert von y zugeordnet!

Für $x = 1$ erhalten wir $y = -1$ $(y = 2 \cdot 1 - 3 = -1)$.

Für $x = 2$ erhalten wir $y = 1$ $(y = 2 \cdot 2 - 3 = 1)$.

Für $x = 3$ erhalten wir $y = 3$ $(y = 2 \cdot 3 - 3 = 3)$.

Übersichtlich zusammen gefasst:

x	y
1	−1
2	1
3	3

$y = 2x - 3$ legt somit über der Definitionsmenge $D = \{1, 2, 3\}$ die Funktion $f: \{(1, -1), (2, 1), (3, 3)\}$ eindeutig fest.

Man schreibt:

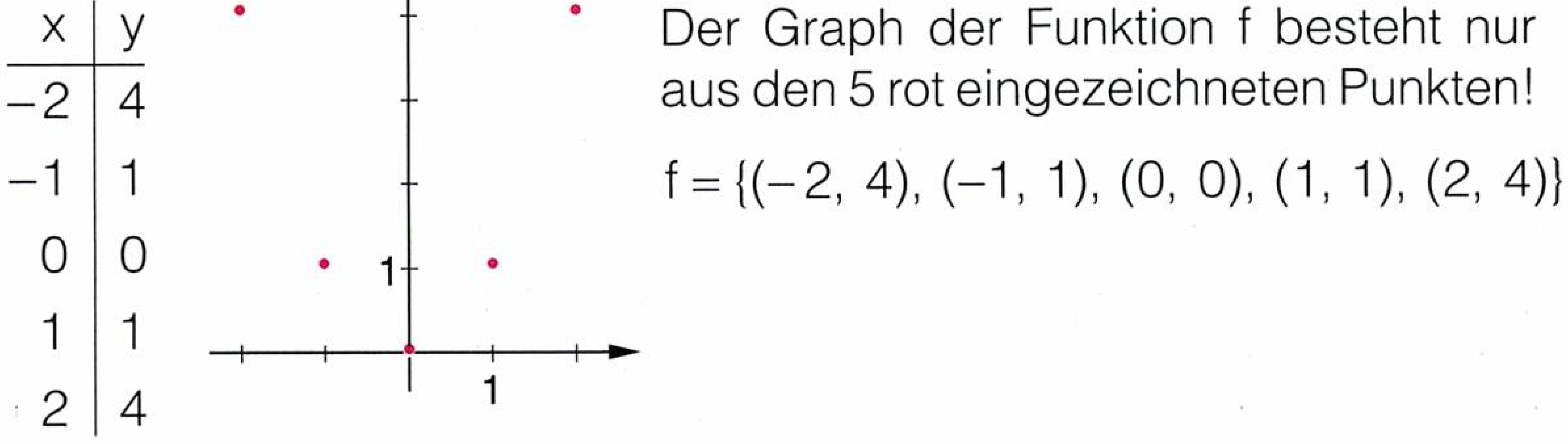
$f(1) = -1$ (gesprochen: f an der Stelle 1 = −1)

$f(2) = 1$ (gesprochen: f an der Stelle 2 = 1) usw.

Beispiel:

Die Funktion f, deren Funktionsgleichung $y = x^2$ lautet, ist für $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ zu zeichnen.

Lösung:



x	y
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4

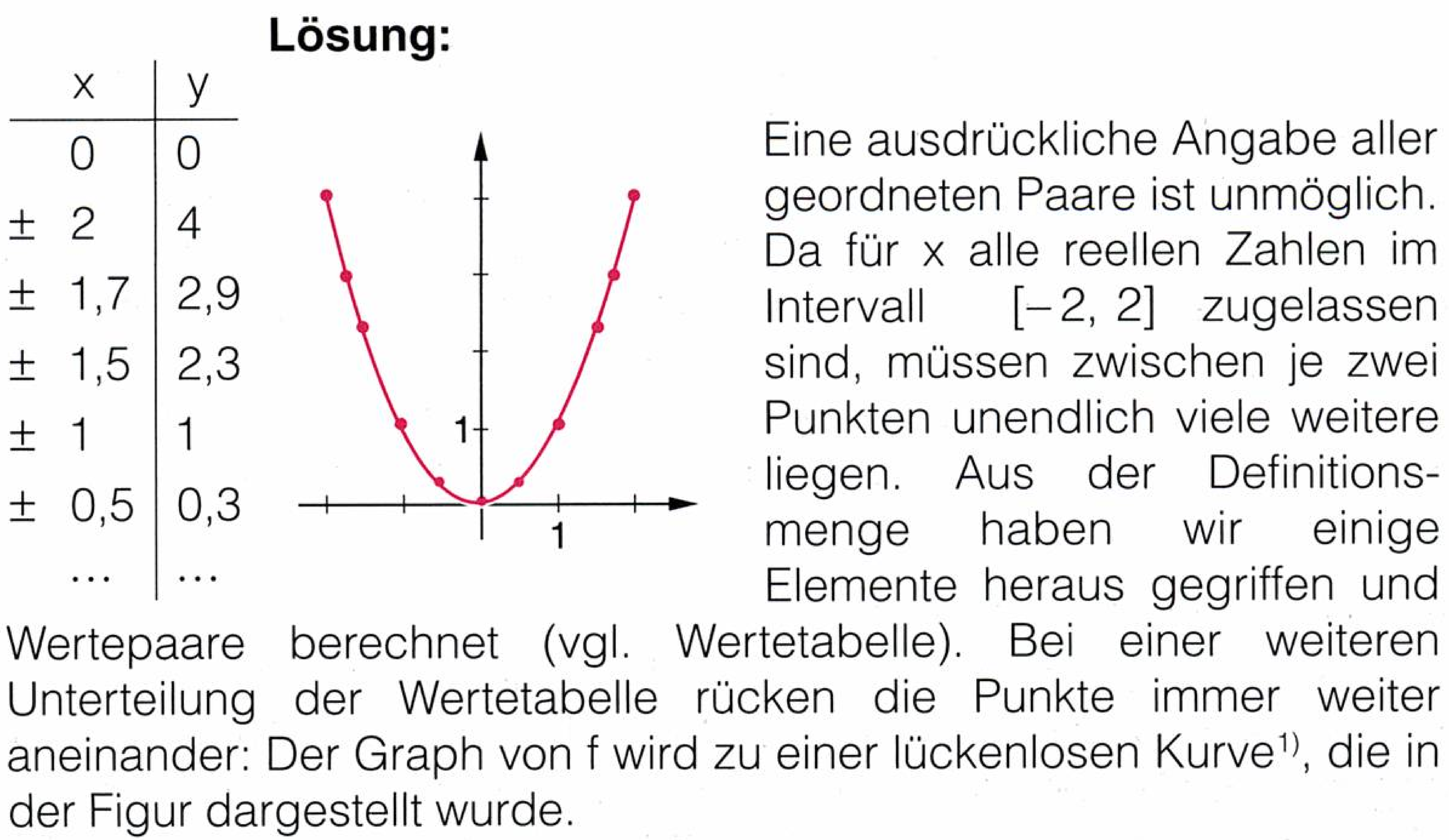
Der Graph der Funktion f besteht nur aus den 5 rot eingezeichneten Punkten!

$f = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$

Beispiel:

Die Funktion f, deren Funktionsgleichung $y = x^2$ lautet, ist für $D = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge (-2) \leq x \leq 2\}$ zu zeichnen.

Lösung:



x	y
0	0
± 2	4
± 1,7	2,9
± 1,5	2,3
± 1	1
± 0,5	0,3
…	…

Eine ausdrückliche Angabe aller geordneten Paare ist unmöglich. Da für x alle reellen Zahlen im Intervall $[-2, 2]$ zugelassen sind, müssen zwischen je zwei Punkten unendlich viele weitere liegen. Aus der Definitionsmenge haben wir einige Elemente heraus gegriffen und Wertepaare berechnet (vgl. Wertetabelle). Bei einer weiteren Unterteilung der Wertetabelle rücken die Punkte immer weiter aneinander: Der Graph von f wird zu einer lückenlosen Kurve[1], die in der Figur dargestellt wurde.

[1]) Der Begriff der Kurve ist in der Mathematik weit gefasst: Auch eine Gerade ist eine Kurve.

Eine Funktion kann durch eine Funktionsgleichung der Form

$y = f(x)$

angegeben werden. Wenn man die geordneten Paare, die die Funktionsgleichung erfüllen, in ein kartesisches Koordinatensystem einträgt, erhält man den sogenannten **Funktionsgraphen** oder die **Kurve der Funktion**.

Auf Grund des engen Zusammenhangs zwischen Funktionsgleichung und -graph wird oftmals das eine wie das andere als „Funktion" schlechthin bezeichnet.

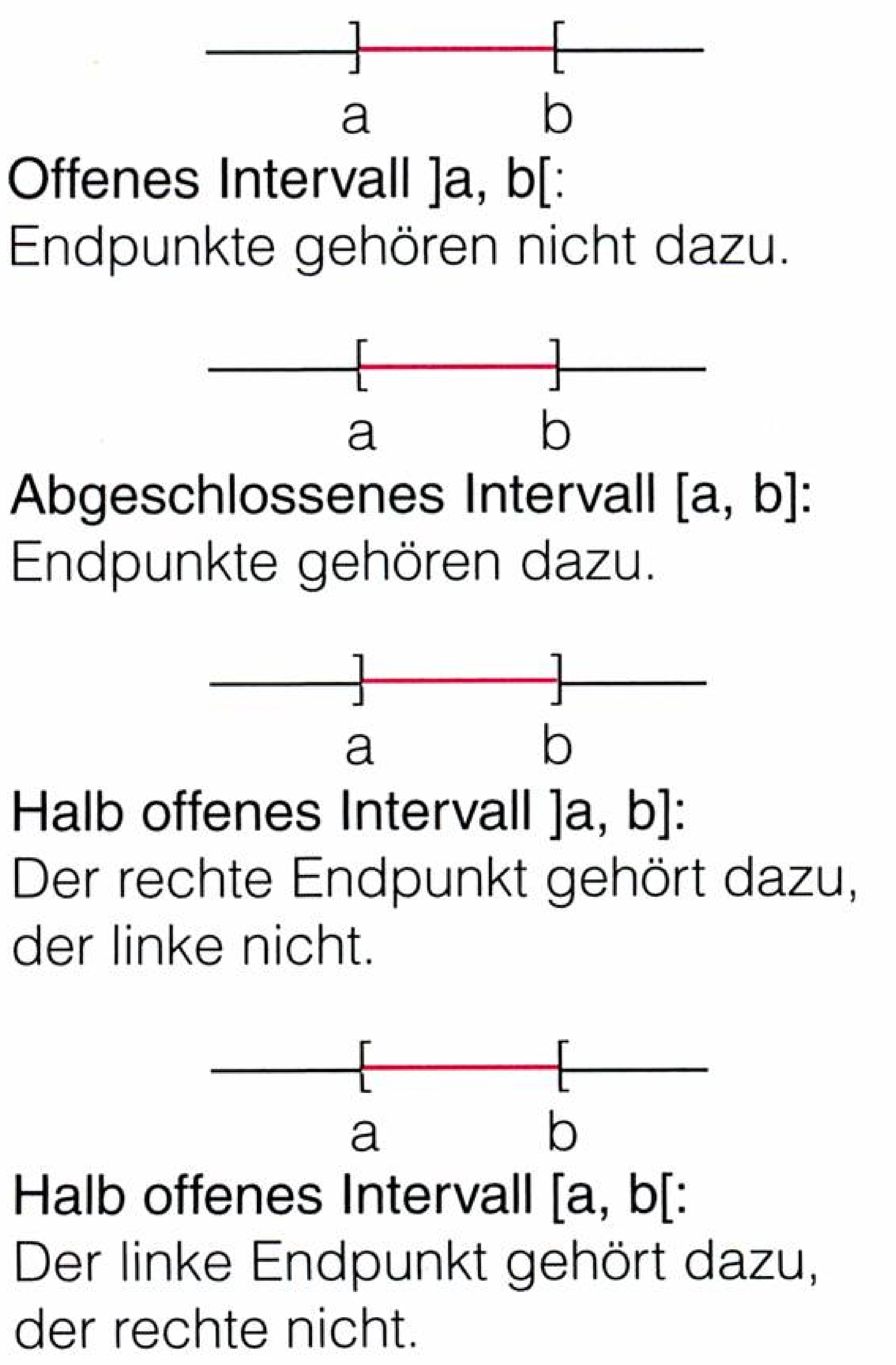
Der y-Wert heißt in diesem Zusammenhang **Funktionswert**, während die „unabhängige" Variable x auch **Argument** genannt wird.

Definition:

Die Menge aller reellen Zahlen x, die die Ungleichung $a < x < b$ erfüllen, bezeichnet man als **offenes Intervall**. Man schreibt: $]a, b[$.

Die Menge aller reellen Zahlen x, die die Ungleichung $a \leq x \leq b$ erfüllen, bezeichnet man als **abgeschlossenes Intervall**. Man schreibt: $[a, b]$.

4 Typen von Intervallen sind zu unterscheiden:



Offenes Intervall]a, b[:
Endpunkte gehören nicht dazu.

Abgeschlossenes Intervall [a, b]:
Endpunkte gehören dazu.

Halb offenes Intervall]a, b]:
Der rechte Endpunkt gehört dazu, der linke nicht.

Halb offenes Intervall [a, b[:
Der linke Endpunkt gehört dazu, der rechte nicht.

3. Lineare Funktionen

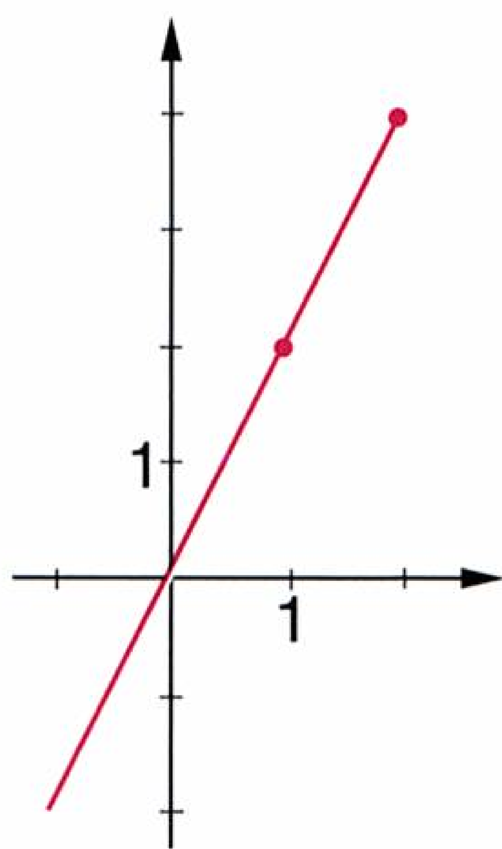
Beispiel:

Der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = 2x$ ist in einem kartesischen Koordinatensystem im Intervall $[-1, 2]$ darzustellen!

Lösung:

Wie üblich wird zunächst eine Wertetabelle aufgestellt, indem man in die Funktionsgleichung beliebige x-Werte einsetzt und den zugehörigen y-Wert ausrechnet.

x	y
0	0
−1	−2
2	4
1	2



Wir erhalten eine Gerade, die durch den Ursprung des Koordinatensystems geht.

Als „Ursprung" eines Koordinatensystems wird der Schnittpunkt der Achsen bezeichnet.

Genau genommen können wir nur vermuten, dass bei dem nebenstehenden Beispiel die Punkte der Wertetabelle auf einer Geraden liegen.

Wir werden später beweisen: Der Graph von Funktionen der Form $x \mapsto kx$ $(k \in \mathbb{R})$ ist tatsächlich immer eine Gerade. Unter diesem Gesichtspunkt genügt es, wenn wir für die grafische Darstellung von Funktionsgleichungen der Art $y = kx$ nur noch **zwei** Wertepaare ermitteln, denn eine Gerade ist ja schon durch zwei Punkte eindeutig festgelegt.

Beispiel:

Es ist der Graph der Funktion $x \mapsto kx$ für $k = \frac{1}{2}$, $k = 1$, $k = 3$ und $k = -\frac{1}{2}$ zu zeichnen.

Bei diesem Beispiel wurde keine Definitionsmenge bzw. kein Intervall angegeben. Wir vereinbaren: In solchen Fällen wird als Definitionsmenge jene Teilmenge von $\mathbb{R}$ gewählt, die den Verlauf des Graphen gut erkennen lässt.

Lösung:

Es sind also die Funktionen mit den Gleichungen $y = \frac{x}{2}$, $y = x$, $y = 3x$ und $y = -\frac{x}{2}$ zu zeichnen.

$y = \frac{x}{2}$

x	y
0	0
6	3

$y = x$

x	y
0	0
6	6

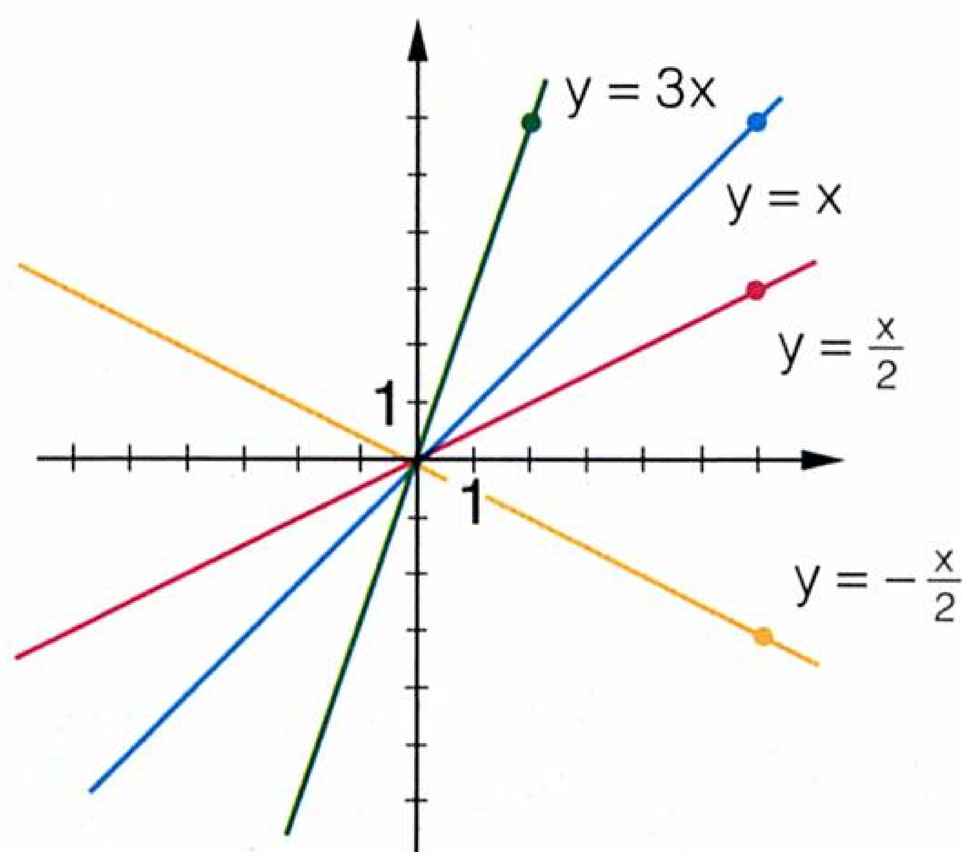
$y = 3x$

x	y
0	0
2	6

$y = -\frac{x}{2}$

x	y
0	0
6	−3

Wir wählen zwei x-Werte nun derart, dass die Entfernung der sich ergebenden Punkte ausreicht, um die Geraden hinreichend genau zu zeichnen.



Die Größe des Faktors k bestimmt die Richtung der Geraden. Man sagt: k ist das Maß für die **Steigung** der Geraden. Der Faktor k wird auch als **Anstieg** der Geraden bezeichnet.

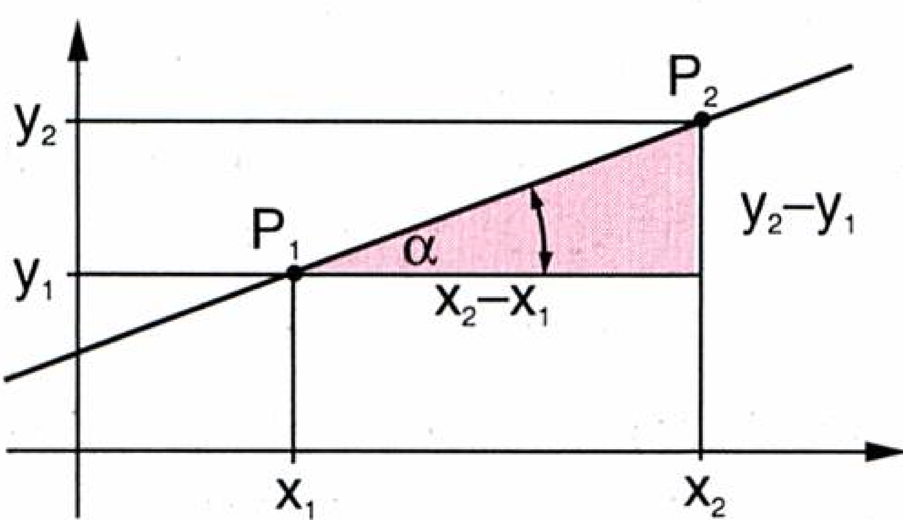
Die Funktionsgleichung heißt kurz: **„Geradengleichung" (Gleichung der Geraden)**.

Aus Gründen der Einfachheit verzichten wir oft auf die Angabe der Definitionsmenge bzw. der Wertemenge und schreiben kurz $y = f(x)$. Dennoch soll uns dabei aber bewusst sein, dass es sich bei der durch $y = f(x)$ festgelegten Funktion um die Menge aller geordneten Paare (x, y) handelt, bei denen jedem x — auf Grund der Vorschrift $y = f(x)$ — genau ein y zugeordnet wird.

Definition:

$P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ seien zwei verschiedene Punkte einer Geraden. Unter der **Steigung** oder dem **Anstieg** der Geraden versteht man folgenden Quotienten k:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Horizontaldifferenz}}$$ [1]



k hat dann für je zwei beliebige Punkte der Geraden den selben Wert.

Der in der obigen Skizze eingezeichnete Winkel α heißt **Steigungswinkel**.

[1] Genau das ist auch gemeint, wenn von der Steigung einer Straße die Rede ist. Eine Steigung von 9% heißt also, dass auf 100 m Horizontaldifferenz 9 m Höhendifferenz zu erwarten sind – vgl. Seite 116 Außenspalte.

Beispiel:

Wie lautet die Gleichung der **a)** x-Achse (Abszissenachse) **b)** y-Achse (Ordinatenachse)?

Lösung:

a) Jeder Punkt der x-Achse hat die Ordinate Null $\Rightarrow y = 0$.

b) Jeder Punkt der y-Achse hat die Abszisse Null $\Rightarrow x = 0$[1].

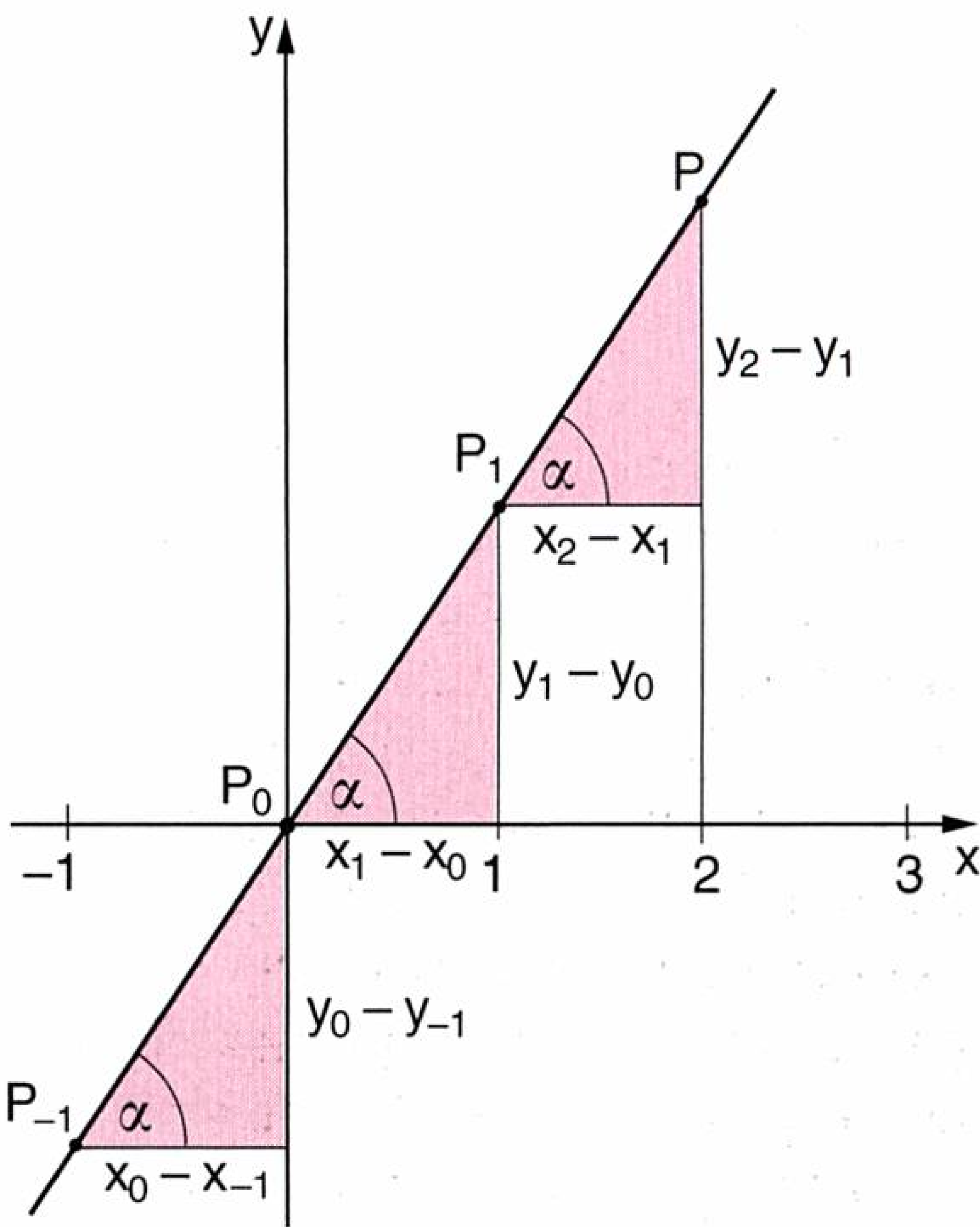
Was war den obigen Beispielen gemeinsam?

Die wesentlichen Erkenntnisse über Graphen von Funktionen der Form $x \mapsto kx \; (k \in \mathbb{R})$ fassen wir zusammen:

(1) Der Graph ist eine Gerade.

Beweis:

Die nebenstehenden rosa unterlegten Dreiecke heißen **Steigungsdreiecke**. Es sind ähnliche Dreiecke. Es gilt: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_0 - y_{-1}}{x_0 - x_{-1}} = k$. Der sogenannte **Steigungswinkel α** ist in allen Dreiecken der selbe!

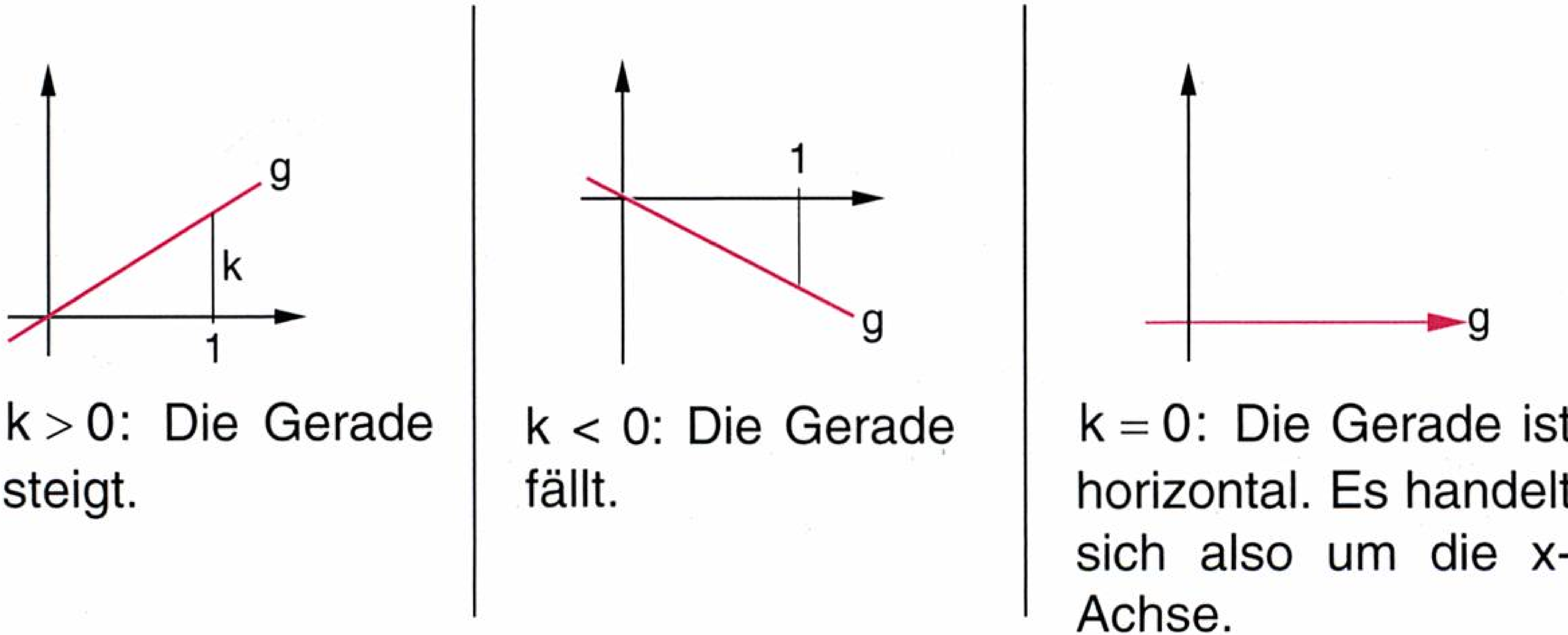


Der Graph der Funktion $x \mapsto kx \; (k \in \mathbb{R})$ ist stets eine Gerade, wenn der Anstieg zwischen zwei beliebigen Punkten $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ **stets** denselben Wert a hat. Letzteres lässt sich leicht zeigen, denn für alle x_1 und x_2 $(x_1 \neq x_2)$ gilt

einerseits: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$

andererseits: $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{k(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = k$

(2) Der Anstieg k bestimmt den Verlauf der Geraden:



$k > 0$: Die Gerade steigt.

$k < 0$: Die Gerade fällt.

$k = 0$: Die Gerade ist horizontal. Es handelt sich also um die x-Achse.

Definition:

Eine Funktion von der Form $x \mapsto kx + d$ heißt **lineare Funktion** oder **Funktion ersten Grades**. Der Graph der linearen Funktion $y = kx + d$ ist eine Gerade.

Für $d = 0$ ergibt sich $y = kx$. Dieser Sonderfall wurde schon oben behandelt.

(3) Die geordneten Paare (0, 0) und (1, k) sind stets Elemente der Funktion.
Da eine Gerade durch zwei Punkte eindeutig bestimmt ist, wird der Graph der Funktion $f: x \mapsto kx$ durch die Punkte $P_1(0, 0)$ und $P_2(1, k)$ festgelegt.

Beispiel:

Es ist der Graph der linearen Funktion $x \mapsto 4x + 2$ zu zeichnen!

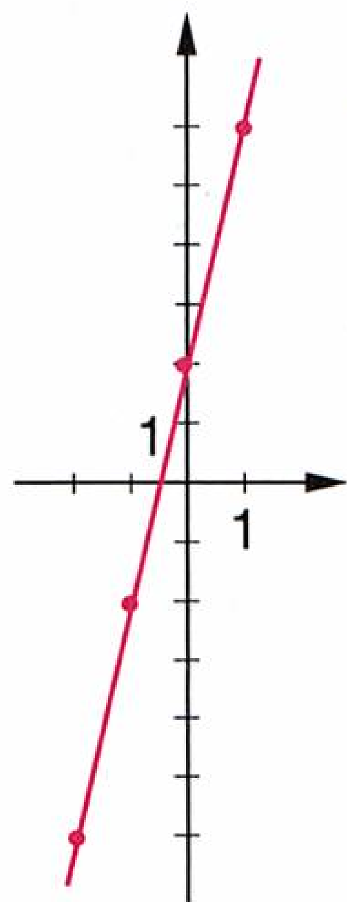
[1]) Die y-Achse und zu ihr parallele Gerade sind **keine** Funktionsgraphen.

In Österreich findet sich vor der Steigung eines Straßenstücks sehr oft das folgende Verkehrszeichen:



Lösung:

x	y
0	2
1	6
−1	−2
−2	−6



Wir erhalten eine Gerade, die die y-Achse im Punkt P (0, 2) schneidet.

Allgemein gilt: Das Glied d der sogenannten **Hauptform der Geradengleichung** $y = kx + d$ gibt an, in welcher Höhe die Gerade die y-Achse schneidet. Für $d = 0$ geht die Gerade bekanntlich durch den Nullpunkt.

Der Autofahrer wird durch die Angabe der Steigung — in unserem Fall sind es 9 % — auf Folgendes hingewiesen: Das Straßenstück wird auf den nächsten 100 m eine Höhe von 9 m überwinden!

Das ist ein Beispiel für die „außermathematische Deutung" der Steigung. Schon im nächsten Abschnitt werden wir Funktionen in weiteren außermathematischen Bereichen anwenden.

Parallele Gerade haben gleichen Anstieg. Umgekehrt: Gerade mit gleichem Anstieg sind parallel oder identisch.

Beispiel:

Die Funktionen mit den Gleichungen $y = -2x + 1$ und $y = -2x + 3$ sind zeichnerisch darzustellen.

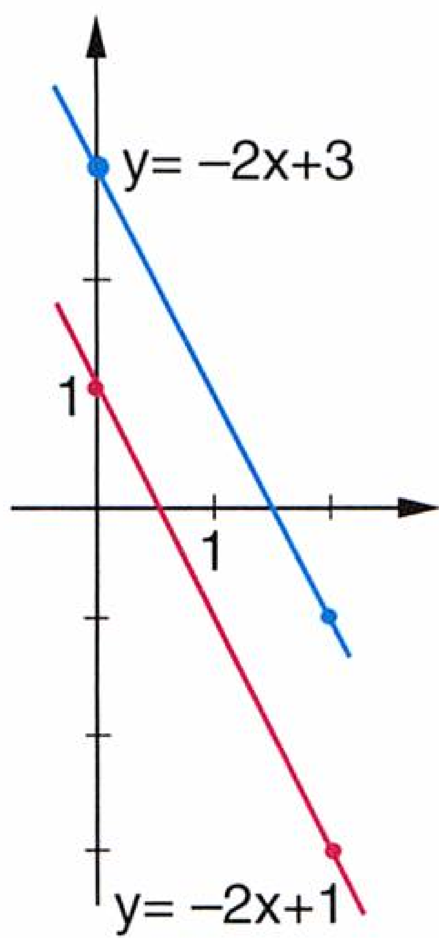
Lösung:

$y = -2x + 1$

x	y
0	1
2	−3

$y = -2x + 3$

x	y
0	3
2	−1



Die beiden Geraden laufen parallel.

Allgemein gilt: Alle Geraden mit dem gleichen Anstieg k sind zueinander parallel.

Beispiel:

Liegen die Punkte **a)** $P_1\left(1, \frac{1}{10}\right)$ **b)** $P_2\left(0, -\frac{1}{12}\right)$ auf der Geraden mit der Gleichung $y = \frac{x}{5} - \frac{1}{12}$?

Der Punkt P (a, b) liegt auf der Geraden g mit der Gleichung $y = kx + d$ **genau dann, wenn** die Koordinaten des Punktes die Geradengleichung erfüllen:

$P \in g \Leftrightarrow b = ka + d$

Allgemein:

Ein Punkt P liegt genau dann auf einer Kurve mit der Funktionsgleichung y = f(x), wenn seine Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen.

Lösung:

a) Es gibt die Möglichkeit, $P_1\left(1, \frac{1}{10}\right)$ und die Gerade $y = \frac{x}{5} - \frac{1}{12}$ in einem Koordinatensystem einzuzeichnen und einfach festzustellen, ob der Punkt auf der Geraden liegt.

Weitaus besser ist es wenn man überprüft, ob die Koordinaten des Punktes die Gleichung erfüllen:

$P_1\left(1, \frac{1}{10}\right)$ wird in $y = \frac{x}{5} - \frac{1}{12}$ eingesetzt: $\frac{1}{10} = \frac{1}{5} - \frac{1}{12} \Leftrightarrow \cdots \frac{1}{10} = \frac{7}{60}$ (f)

↑ ↑
x_1 y_1

Der Punkt P_1 liegt nicht auf der Kurve.

b) $P_2\left(0, -\frac{1}{12}\right)$ wird in $y = \frac{x}{5} - \frac{1}{12}$ eingesetzt: $-\frac{1}{12} = \frac{0}{5} - \frac{1}{12} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} = -\frac{1}{12}$ (w)

↑ ↑
x_2 y_2

Der Punkt P_2 liegt auf der Kurve.

Beispiel:

Von einer Geraden sind zwei Punkte bekannt: $P_1(1, 1)$ und $P_2(7, -5)$.

a) Die Gerade ist zu zeichnen.

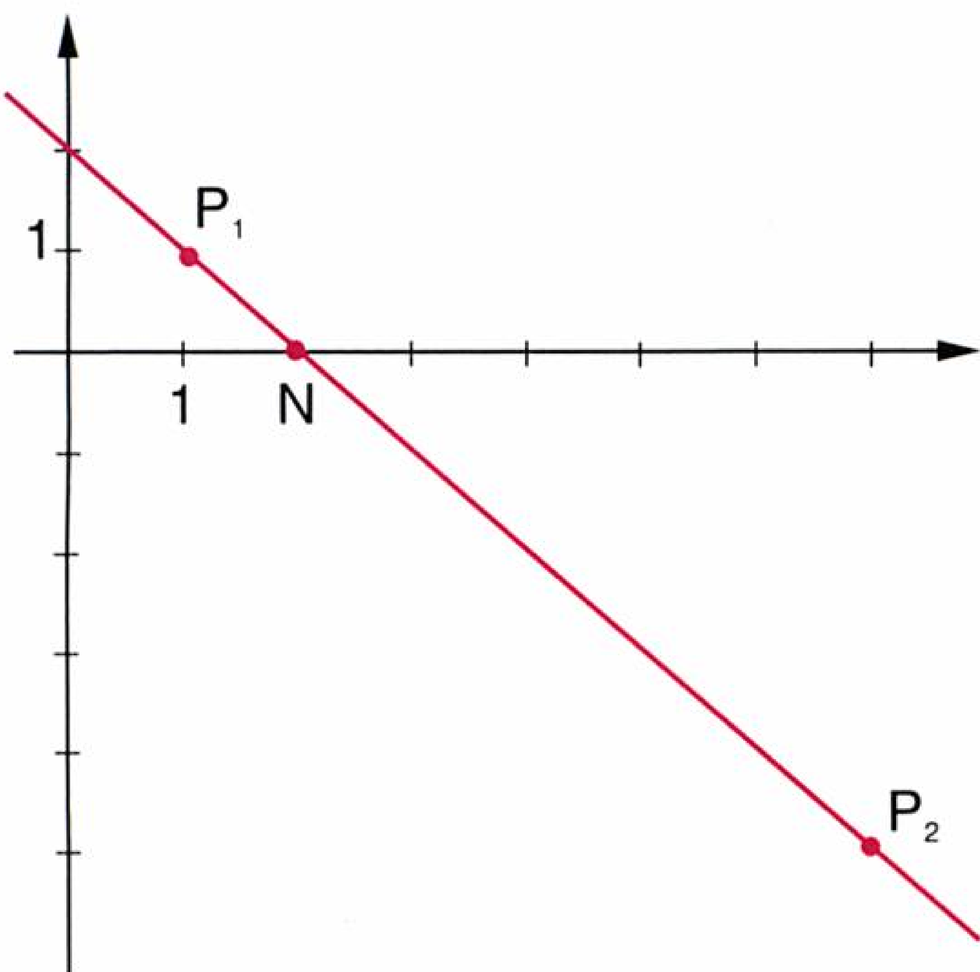
b) Funktionsgleichung?

c) Der Schnittpunkt der Geraden mit der x-Achse (= Nullstelle N) ist zu berechnen.

Lösung:

a)

x	y
1	1
7	−5



b) Die Funktionsgleichung hat die Form $y = kx + d$, wobei die Werte für k und d zu ermitteln sind.

Zunächst berechnen wir k:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ P_1(1,\ 1),\ P_2(7,\ -5)$$

(1, 1): x_1, y_1; (7, −5): x_2, y_2

$$k = \frac{-5-1}{7-1} = \frac{-6}{6} = -1 \quad \mathbf{k = -1}$$

Nun gilt es d zu bestimmen!

Wir überlegen: Wenn ein Punkt auf der Kurve der Funktion liegt, dann erfüllen seine Koordinaten die Kurvengleichung. Der Punkt P_1 liegt auf der Kurve.

$P_1(1, 1)$ und $k = -1$ wird in $y = k\,x + d$ eingesetzt:

(1, 1): x_1, y_1

$$1 = -1 \cdot 1 + d \Leftrightarrow d = 2$$

Die Geradengleichung lautet mithin: $\mathbf{y = -x + 2}$

c) An der Stelle, wo die Gerade die x-Achse schneidet, ist der zugehörige Funktionswert y gleich Null!

$y = 0$ wird in $y = -x + 2$ eingesetzt: $0 = -x + 2 \Leftrightarrow \mathbf{x = 2;\ N(2, 0)}$

Definition:

Ein Wert x heißt **Nullstelle** der Funktion f, wenn $f(x) = 0$ gilt. Der Wert x bezeichnet dann die x-Koordinate des Schnittpunkts $N(x, 0)$ des Funktionsgraphen mit der x-Achse.

Es ist also die zu f gehörige Gleichung $y = f(x) = 0$ zu lösen.

4. Beispiele für lineare Funktionen in der Praxis

(1) Lineare Zeit-Weg-Funktion

$s = v \cdot t$

s ..... Weg
v ..... Geschwindigkeit
t ..... Zeit

Bei konstanter Geschwindigkeit ist der Weg eine lineare Funktion der Zeit.

(2) Lineare Verzinsung

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{36000}$$

Z ..... Zinsen
K ..... Kapital
p ..... Prozentsatz
t ..... Anzahl der Tage

(3) Lineare Tarife

$$R = kx + G$$

R ..... Rechnungsbetrag
k ..... Preis der Leistungseinheit
x ..... Anzahl der Leistungseinheiten
G .... Grundpreis

Viele Gebühren (Gas, Wasser, Strom, Telefon usw.) setzen sich aus einem Grundpreis — der von der Anzahl der bezogenen Leistungseinheiten unabhängig ist — und dem Preis der tatsächlichen verbrauchten Leistungseinheiten zusammen.

Beispiel:

Zwei Beförderungsbetriebe A und B haben folgende Konditionen:
A: Grundpreis von 100,— Euro, Preis pro km Beförderung: 45,— Euro; B: kein Grundpreis, Preis pro km Beförderung: 60,— Euro. Die Graphen der Rechnungsbeträge R_A und R_B sind als Funktionen der zurückgekegten Kilometer zu konstruieren.
Bei welcher Beförderungsstrecke sind die Transportkosten von A und B gleich hoch?

Lösung:

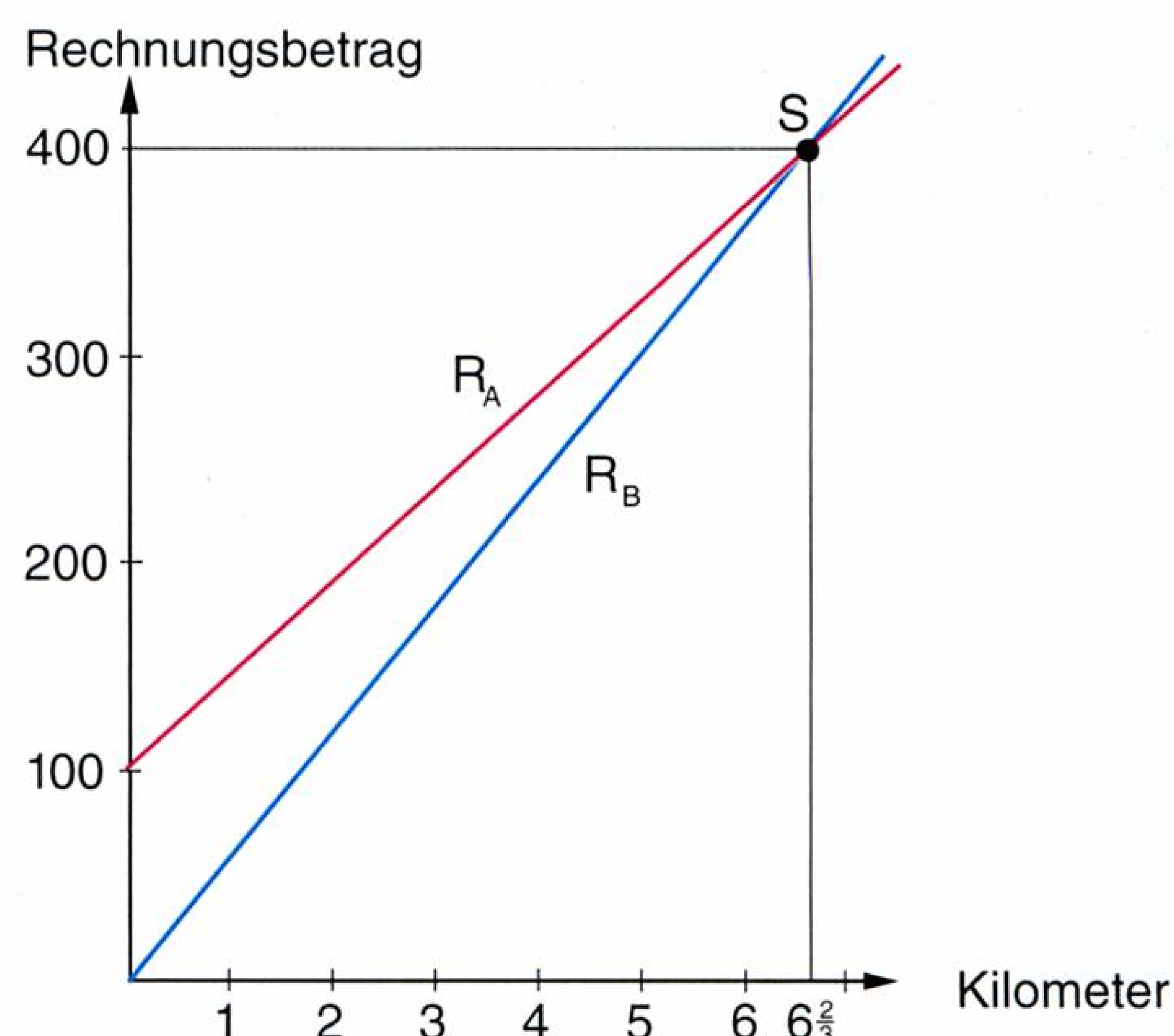
Für A gilt: $R_A = 45x + 100$

Für B gilt: $R_B = 60x$

Unter der Wahl eines geeigneten Maßstabes (1 km ≙ 0,5 cm, 100 Euro ≙ 1 cm) zeichnen wir die Rechnungsbeträge — vgl. nebenstehende Figur.

Die Transportkosten von A und B sind im Schnittpunkt S der Geraden gleich groß.

Durch Messung im Koordinatensystem ergibt sich: **Bei $6\frac{2}{3}$ km haben A und B die gleichen Transportkosten.**



(4) Lineare Kosten

$$K = kx + F$$

K ..... Gesamtkosten
k ..... Kosten/Produktionseinheit
x ..... Anzahl der Produktionseinheiten
F ..... Fixkosten

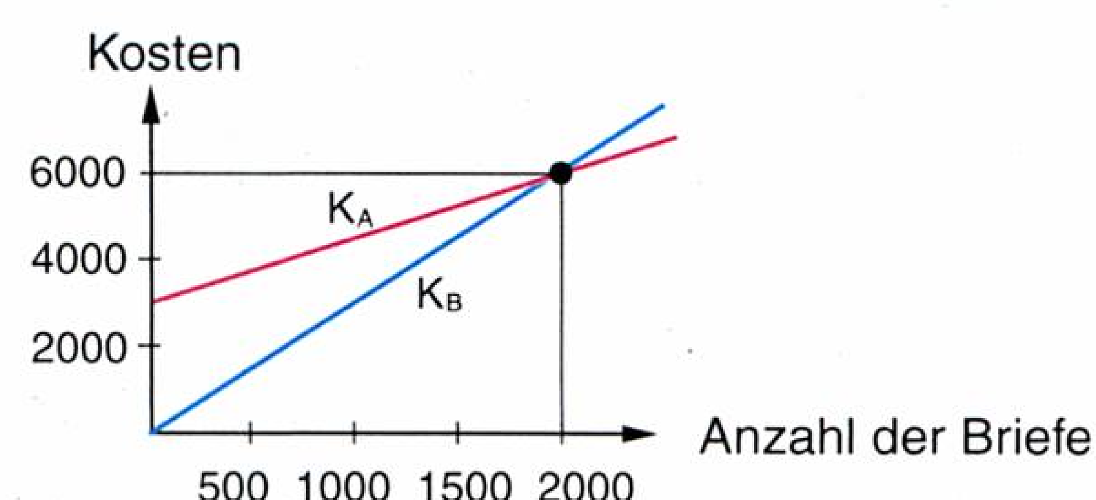
Die Kosten eines Betriebes setzen sich im allgemeinen aus den **Fixkosten** (Miete, Verwaltungskosten, Abgaben) und den **variablen Kosten** zusammen. Die Fixkosten sind also unabhängig von der Produktionszahl und dem Beschäftigungsgrad. Die variablen Kosten werden durch die Anzahl der Produktionseinheiten bestimmt.

Beispiel:

In einem Betrieb belaufen sich die Kosten für einen Brief auf 1,50 Euro (Porto, Papier, Schreibgerät usw.), das Brutto-Monatsgehalt der Schreibkraft einschließlich der damit für den Arbeitgeber verbundenen Abgaben (Sozialversicherung usw.) auf 3000,— Euro.
Bei welcher monatlichen Briefanzahl sind die Kosten eines Schreibbüros, das 3,— Euro pro Brief verlangt, den bisherigen Kosten gleich?

Lösung:

Für den monatlichen Briefversand lautet die Kostenfunktion
— bei Anstellung der Schreibkraft: $K_A = 1{,}5x + 3000$
— bei Konsultieren des Schreibbüros: $K_B = 3x$
Aus der nebenstehenden Figur können wir ablesen, dass die Kosten bei 2000 Stück/Monat gleich groß sind.



(5) Lineare Abschreibung

$$B_x = A - \frac{A}{n}x$$

B_x ..... Buchwert nach x Jahren
A ..... Anschaffungspreis
n ..... Nutzungsdauer
x ..... Anzahl der Jahre

Die abnutzbaren Anlagegüter sind einer ständigen Wertminderung ausgesetzt. Die jährlichen Wertminderungen werden durch Abschreibungsbeträge berücksichtigt. Bei der linearen Abschreibung werden die Anschaffungskosten gleichmäßig auf die betriebliche Nutzungsdauer verteilt.

Da der Buchwert der Anlage während des Jahres unverändert bleibt, handelt es sich — genau genommen — um eine sogenannte **Treppenfunktion**.

Definition:
Eine abschnittsweise konstante Funktion wird **Treppenfunktion** genannt.

Beispiel:
Der Anschaffungswert einer Maschine beträgt 80000,— Euro, ihre Nutzungsdauer ist 10 Jahre.
a) Nach wie vielen Jahren beträgt der Restwert[1] 36000,— Euro?
b) Welcher Gewinn wird erzielt, wenn die Maschine nach 4 Jahren um 54000,— Euro verkauft wird?

Lösung:

a) $36000 = 80000 - \frac{80000}{10}x \Leftrightarrow 8000x = 44000 \Leftrightarrow x = 5{,}5$

Nach 5,5 Jahren beträgt der Restwert 36000,— Euro.

b) Zunächst wird ermittelt, mit welchem Wert die Maschine nach 4 Jahren zu Buche steht:

$B_x = 80000 - \frac{80000}{10} \cdot 4 = 48000 \qquad 54000 - 48000 = 6000$

Es wird ein Gewinn von 6000,— Euro erzielt.

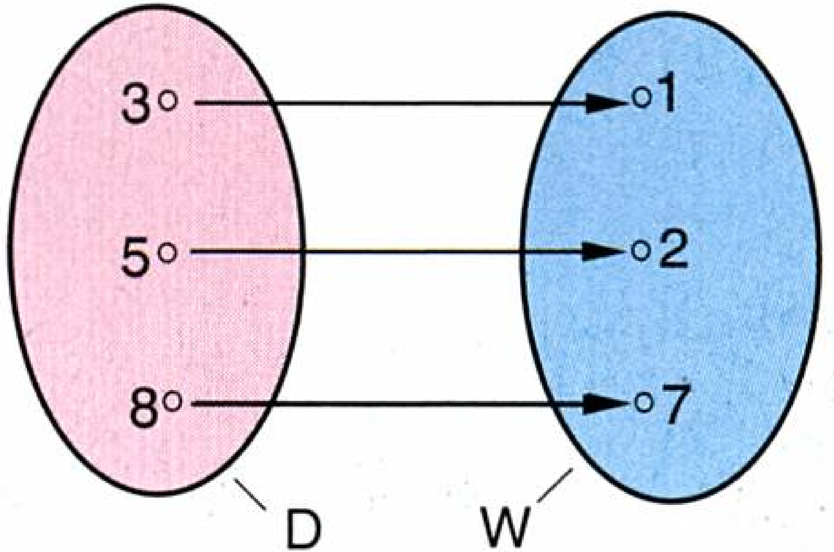
5. Umkehrfunktionen

	29	Finkenstein H					
	31	Gödersdorf					
	34	Warmbad Villach 6					
	37	**Villach** Westbf 6	o				von
		Villach Westbf					Knittelfeld
	38	**Villach** Hbf 6, 65	o				
0		**Klagenfurt** Hbf 6, 62, 66			⋮	**16 20**	16 25
8		Krumpendorf 6			⋮	**16 27**	16 33
14		Pörtschach am Wörthersee 6			⋮	**16 34**	16 41
22		Velden am Wörthersee 6			⋮	**16 42**	16 50
38		↓ **Villach** Hbf 6, 65	o		⋮	**16 53**	17 09
		Villach Hbf		16 30	⋮	**17 08**	
	47	Gummern		16 38	⋮	**Austria-Express**	
	52	Weißenstein-Kellerberg		16 42	⋮		
	58	Paternion-Feistritz		16 48	⋮		
	61	Markt Paternion Hu		16 51	⋮		
	63	Ferndorf Hu		16 53	⋮		
	67	Rothenthurn Hu		16 58	⋮		
	75	**Spittal-Millstättersee** 22 a	o	17 05	⋮	**17 32**	

Im nebenstehenden Fahrplan der ÖBB werden bestimmten Zeiten bestimmte Orte zugeordnet. Bei dieser Zuordnung handelt es sich (wenn wir die Zeiten als Definitionsmenge und die Orte als Wertemenge auffassen) um eine Funktion.

Gibt man nun umgekehrt die Orte vor und ordnet man jedem Ort den entsprechenden Zeitpunkt zu, so entsteht eine „Umkehrung" der vorgegebenen Funktion. (Definitions- und Wertemenge tauschen dabei ihren Platz.)

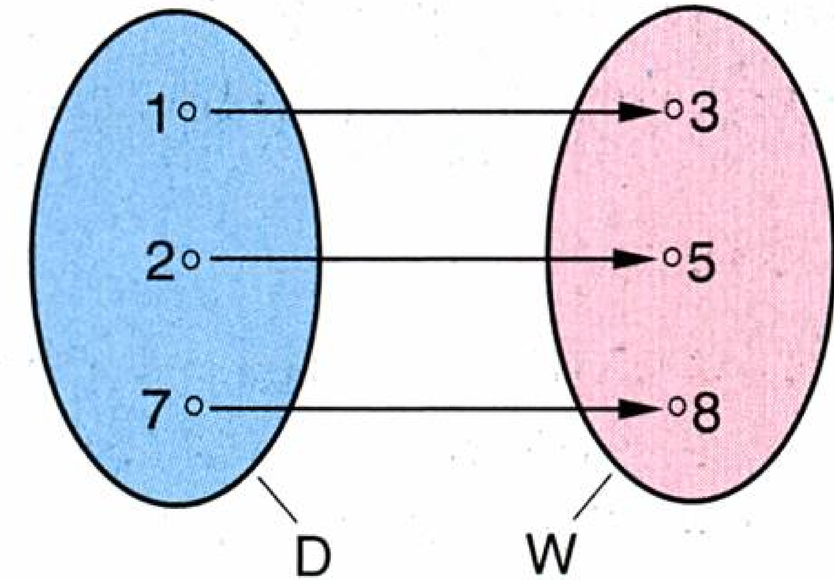
Diese „Umkehrung" wollen wir uns anhand der speziellen Funktion f von D nach W — vgl. Außenspalte — genau ansehen:



Durch Umkehrung der Zuordnungspfeile entsteht eine neue Funktion — die sogenannte **Umkehrfunktion**, die mit f^{-1} (gesprochen: f hoch −1)[2] bezeichnet wird.

Folgende Fragen stellen sich in diesem Zusammenhang:

— Gibt es zu jeder Funktion eine **Umkehrfunktion**?
— Wie erhält man die Gleichung der Umkehrfunktion f^{-1}, wenn f durch die Funktionsgleichung gegeben ist? (Schließlich gibt es ja bei einer Gleichung keine Zuordnungspfeile, die man einfach umdrehen kann...)



Wir wollen aber diese Fragen nicht theoretisch abhandeln. Anhand von Beispielen lassen sich abstrakte Probleme viel leichter bewältigen.

[1] Unter dem Restwert versteht man den nach einer bestimmten Abschreibungsdauer verbleibenden Buchwert eines Anlagegegenstandes.

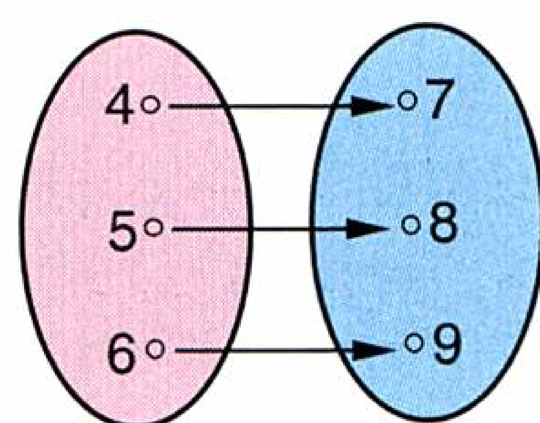
[2] −1 bezeichnet hier die Umkehrfunktion und darf nicht mit einem Exponenten verwechselt werden.

Beispiel:

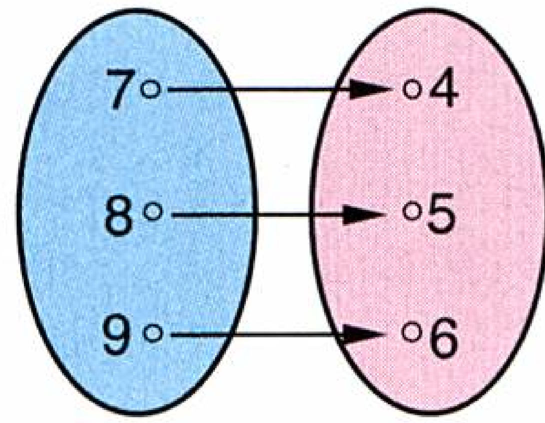
Gegeben ist die Funktion **a)** $f_1: \{(4,7),(5,8),(6,9)\}$ **b)** $f_2: \{(-2,6),(-3,2),(4,2)\}$. Es ist festzustellen, ob die Umkehrung dieser Funktion wieder eine Funktion ist!

Lösung:

a)

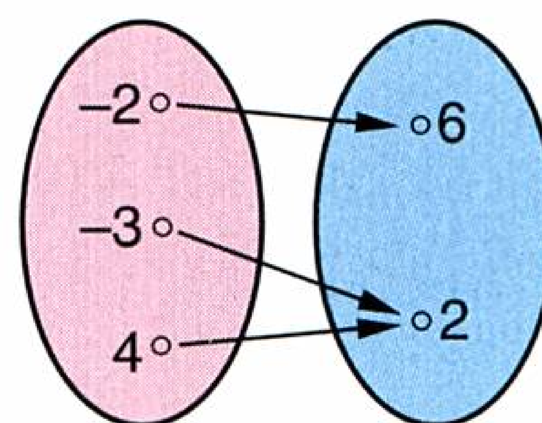


Umkehrung:

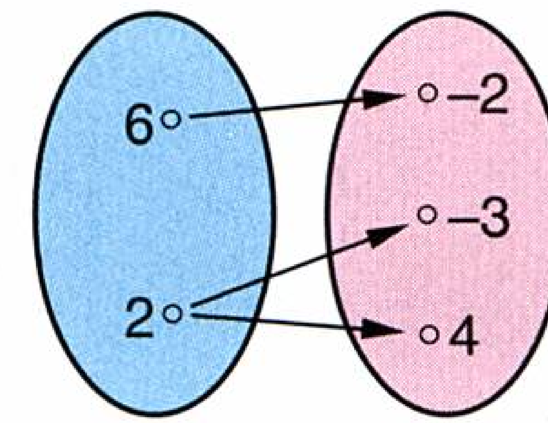


Die Umkehrung ist eine Funktion!

b)



Umkehrung:



Die Umkehrung ist keine Funktion!

Beispiel:

Gegeben ist die Funktion f durch ihre Funktionsgleichung $y = 7x + 2$. Es ist festzustellen, ob die Umkehrung dieser Funktion wieder eine Funktion ist!

Lösung:

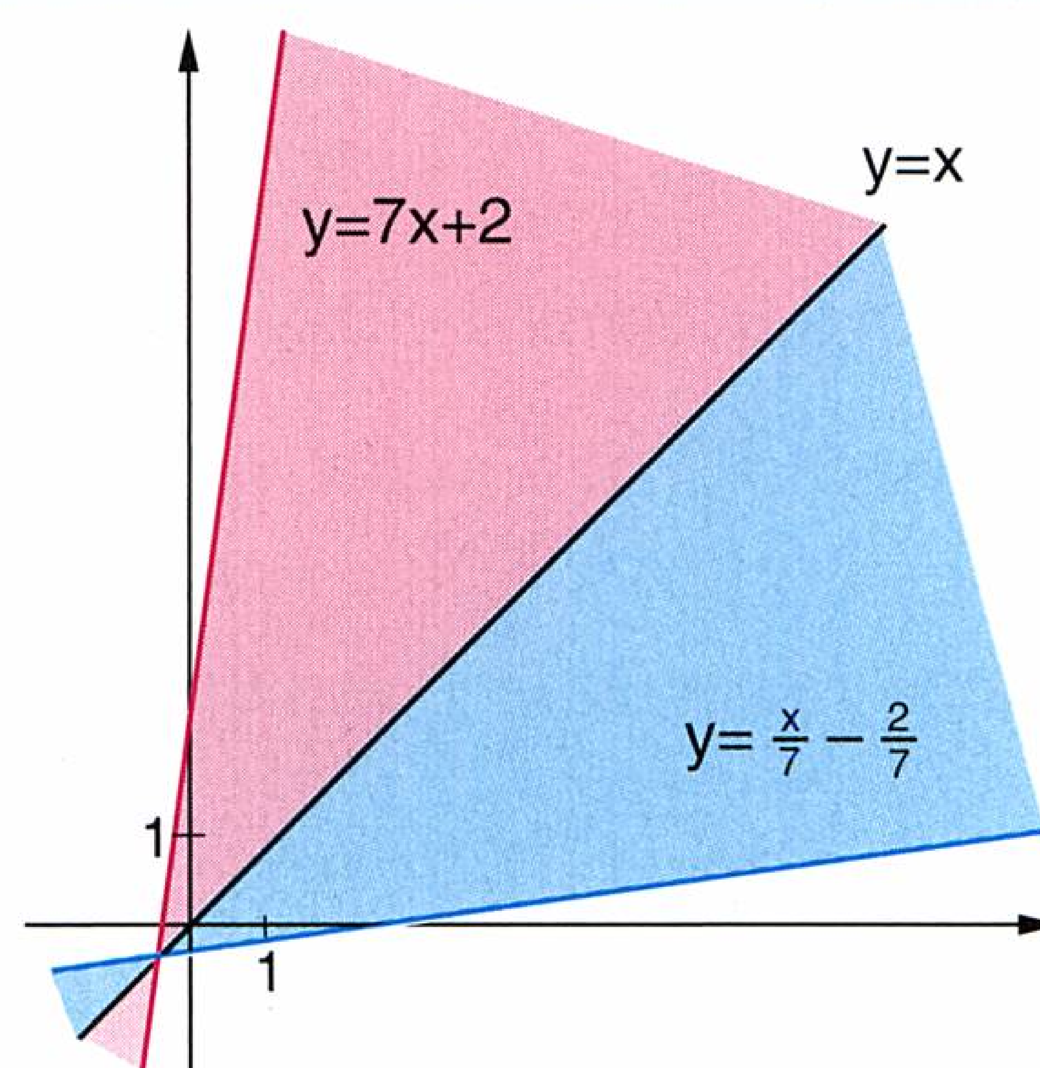
Bei der Umkehrung einer Funktion tauschen die Elemente der Definitionsmenge und Wertemenge ihre Rollen. Rein formal bedeutet das: **Die Variablen x und y sind zu tauschen.** In der neuen Gleichung ist (sofern das möglich ist) y explizit auszudrücken.

$y = 7x + 2 \Rightarrow$ **Umkehrung:** $x = 7y + 2$

$7y = x - 2$ | Auflösung nach y

$y = \frac{x}{7} - \frac{2}{7}$

Die Umkehrung von f ist eine Funktion!



6. Vertiefende Behandlung nichtlinearer Funktionen

Beispiele für nichtlineare Funktionen: $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, ...

Beispiel:

Der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = x^2 - 4x$ ist in einem kartesischen Koordinatensystem im Intervall $]-1, 5]$ darzustellen!

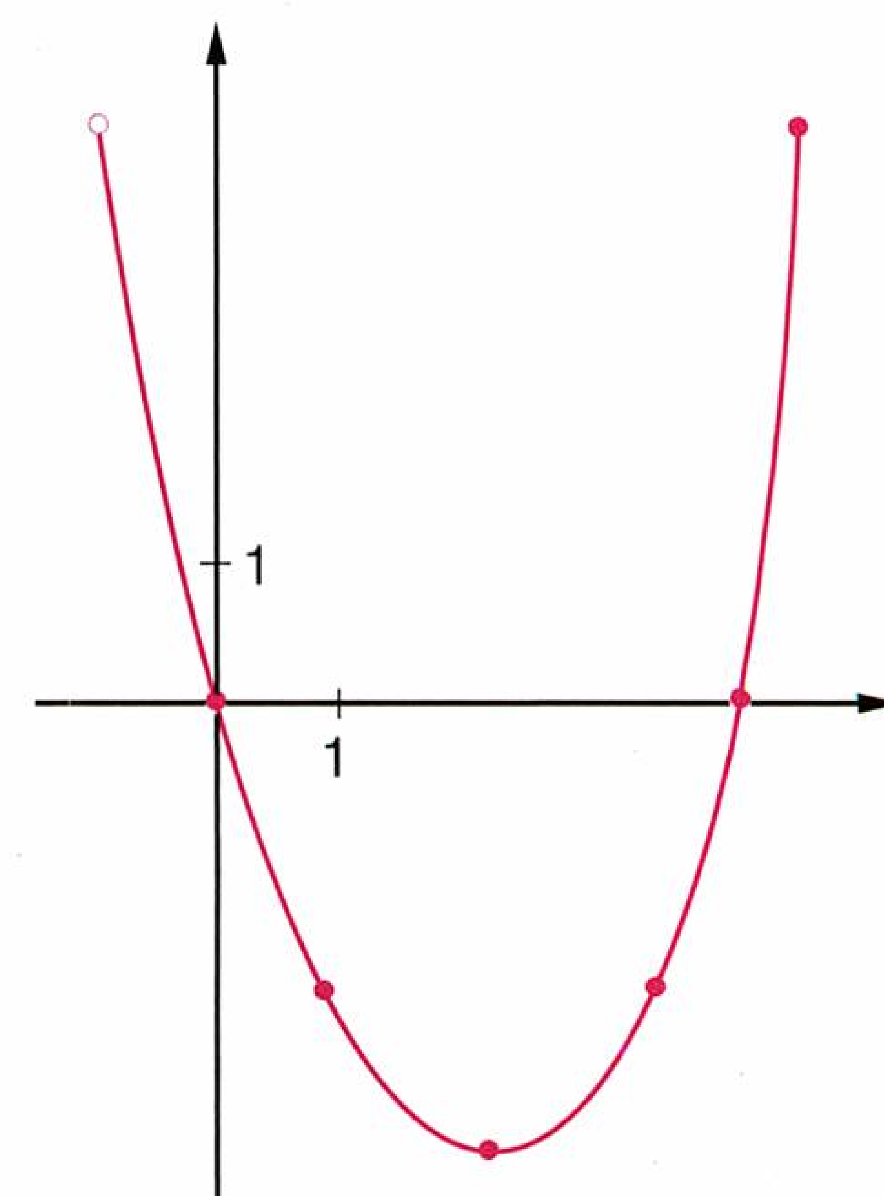
Lösung:

Wertetabelle:

x	y
–1	5
0	0
1	–3
2	–4
3	–3
4	0
5	5

● gehört zum Graphen
○ gehört **nicht** zum Graphen

Jene x-Werte, an denen der jeweils zugehörige Funktionswert berechnet wird, nennt man **Stützstellen**. Hier sind das neben den beiden Intervallgrenzen $x = -1$ und $x = 5$ die dazwischen liegenden Werte $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ und $x = 4$.



Können wir die Nullstellen der Funktion mit der Funktionsgleichung $y = x^2 - 4x$ berechnen?

Es ist nun die Gleichung $x^2 - 4x = 0$ zu lösen:

$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee x - 4 = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 4)$

Letzteres wird durch Ablesen aus der Zeichnung und Kontrolle in der Wertetabelle bestätigt. Die zugehörigen Punkte sind: **$N_1(0, 0)$**, **$N_2(4, 0)$**

Wir wiederholen die folgende

Definition:

Ein Wert x heißt **Nullstelle** der Funktion f, wenn $f(x) = 0$ gilt. Der Wert x bezeichnet dann die x-Koordinate des Schnittpunkts $N(x, 0)$ des Funktionsgraphen mit der x-Achse.

Beispiel:

Der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = 2x^2 - 12x + 10$ ist in einem kartesischen Koordinatensystem im Intervall [0, 6[darzustellen! Die Koordinaten der Nullstellen sind zu ermitteln.

Lösung:

Wertetabelle:

x	y
0	10
1	0
2	−6
3	−8
4	−6
5	0
6	10

● gehört zum Graphen
○ gehört **nicht** zum Graphen

Aus der Zeichnung können wir die Nullstellen ablesen:
$x_1 = 1$, $x_2 = 5$.
Die zugehörigen Punkte sind: **$N_1(1, 0)$**, **$N_2(5, 0)$**.

Um die Nullstellen der Funktion $x \mapsto 2x^2 - 12x + 10$ rechnerisch zu ermitteln, muss man der Funktion den Funktionswert Null zuordnen: $2x^2 - 12x + 10 = 0$. Mit den uns derzeit zur Verfügung stehenden Mitteln können wir aus dieser sogenannten **„quadratischen" Gleichung** x noch nicht berechnen. Wir werden jedoch später einen Weg kennen lernen, wie man quadratische Gleichungen löst.

Beispiel:

Für die Funktionsgleichung $y = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$ sind

a) in einem kartesischen Koordinatensystem der Graph der Funktion f im Intervall [−2, 6] darzustellen

b) die Nullstellen der Funktion zu berechnen und durch Ablesen aus dem Graphen zu überprüfen.

Lösung:

Sollen aus Zeichnungen z. B. Koordinatenwerte abgelesen werden, so kann es vorteilhaft sein, Millimeterpapier zu verwenden.

a)

x	y
−2	4
−1	0,9
0	0
1	0,6
2	2
3	3,4
4	4
5	3,1
6	0

b) Nach der Definition haben wir $f(x) = 0$ zu setzen und zu lösen:

$$-\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 = 0 \quad | \cdot 8$$
$$-x^3 + 6x^2 = 0$$
$$x^2(-x+6) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} (1)\ x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ (2)\ -x+6 = 0 \Leftrightarrow x = 6 \end{cases}$$

Wir erhalten also die Nullstellen $x_1 = x_2 = 0$ und $x_3 = 6$. Man sagt übrigens, die Nullstelle $x_1 = x_2$ zählt zweifach, da die Gleichung $x^2 = 0$ die Doppellösung Null besitzt. Das Ablesen der Nullstellen aus dem Graphen und die Kontrolle mit der Wertetabelle bestätigen das Ergebnis der Rechnung.

Wir befinden uns auf einer Straße, die dem Verlauf der obigen Kurve entspricht. Auf dem Weg von P nach N_3 fahren wir mit unserem PKW zunächst in einer Linkskurve. Jeder Autofahrer weiß, dass er der Straßenkrümmung Rechnung tragen muss: Im Bereich des Punktes N_1 beginnen wir das nach links eingeschlagene Lenkrad langsam nach rechts zu drehen, weil die Krümmung abnimmt. Etwas später befinden wir uns in einer Rechtskurve. Interessant ist nun, dass im Punkt W die Straße weder eine Links- noch eine Rechtskurve macht und daher das Auto vollkommen gerade fährt. Die Straße hat in W keine Krümmung. Den Punkt W nennt man **Wendepunkt.** Die Krümmung geht von einer Linkskurve in eine Rechtskurve über, d. h. die Straße geht ein kurzes Stück geradeaus.

Eine Kurve c und eine Gerade g können bekanntlich folgende Lagebeziehungen erfüllen:

(1) g meidet c, d. h. g ist **Passante** bezüglich c,

(2) g schneidet c, d. h. g ist **Sekante** bezüglich c,

(3) g berührt c, d. h. g ist **Tangente** von c.

Betrachten wir die obige Kurve unter einem anderen Aspekt. Stellen wir uns nun dabei ein gebirgiges Gelände vor. Von Punkt P kommend erreichen wir im Punkt E_1 die Talsohle, also den tiefstgelegenen Punkt der Umgebung. Wenn wir unsere Wanderung fortsetzen, so gelangen wir nach einiger Zeit zum Gipfel E_2, dem höchstgelegenen Punkt der Umgebung. Der höchst- bzw. tiefstgelegene Punkt der Umgebung wird **(lokaler) Extrempunkt** genannt.

Die Tangenten in E_1 und E_2 an den Graphen sind parallel zur x-Achse, wobei die x-Achse mit einer der beiden Tangenten identisch ist. Damit haben wir aber eine zusätzliche Eigenschaft von Extrempunkten erkannt: Extrempunkte besitzen waagrechte (zur x-Achse parallele) Tangenten.

Wir können für dieses Beispiel sogar die Gleichungen der Tangenten in den Extrempunkten angeben: $y = 0$ für E_1, $y = 4$ für E_2.

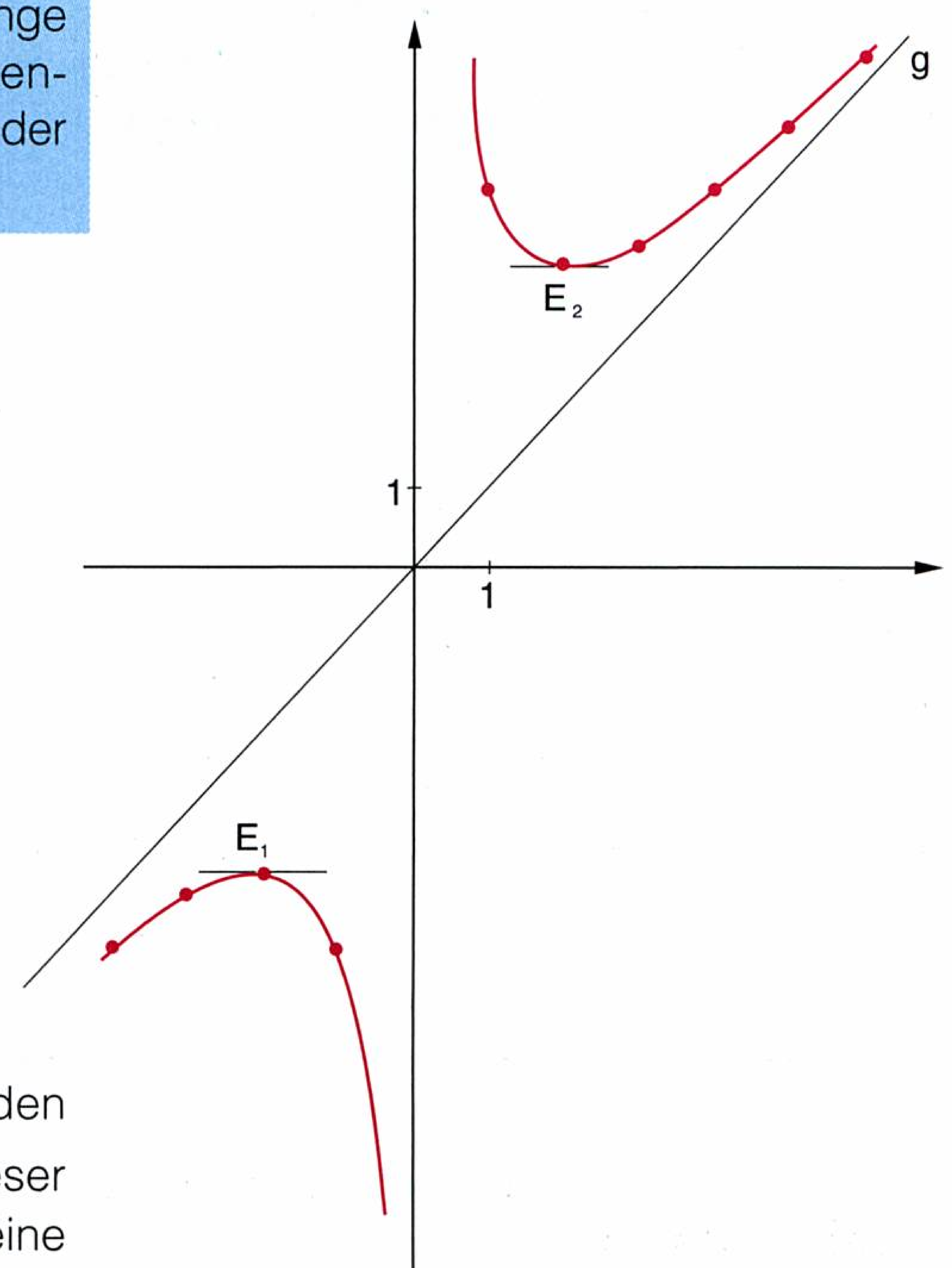
Beispiel:
Für die Funktionsgleichung $y = \frac{x^2+4}{x}$ sind über der Grundmenge $G = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant 6\}$ **a)** in einem kartesischen Koordinatensystem der Graph der Funktion f zu zeichnen **b)** die Nullstellen der Funktion zu berechnen.

Lösung:

a) Wir wählen aus der Definitionsmenge D einige „Stützstellen" aus, legen eine Wertetabelle an und beachten: $D = G \setminus \{0\}$

Wertetabelle:

x	y
−4	−5
−3	−4,3
−2	−4
−1	−5
1	5
2	4
3	4,3
4	5
5	5,8
6	6,7



b) Wir setzen $f(x) = 0$, also $\frac{x^2+4}{x} = 0$. Mit $x \neq 0$ folgt für den Zähler des Bruches: $x^2 + 4 = 0$. Die Lösungsmenge dieser Gleichung in $\mathbb{R}$ ist die leere Menge. Deshalb existieren keine reellen Nullstellen.

Wir betrachten das vorige Beispiel etwas näher und erkennen:

(1) Die Tangenten in den Punkten $E_1(-2, -4)$ und $E_2(2, 4)$ des Graphen sind parallel zur x-Achse. Dies ist ein Kennzeichen dafür, dass E_1 und E_2 Extrempunkte sind.

(2) Bei einer weiteren Unterteilung der Wertetabelle können wir den Kurvenverlauf noch genauer studieren. Zu diesem Zweck formen wir um:

$$y = \frac{x^2+4}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{4}{x} = x + \frac{4}{x} \Rightarrow y = x + \frac{4}{x}$$

Setzen wir nun für x aus der erweitert gedachten Grundmenge — z. B.: $G = \{x \in \mathbb{R} \mid -256 \leqslant x \leqslant 256\}$ — Werte ein, so erkennen wir:

x	y
− 256	− 256,02
…	…
− 64	− 64,06
…	…
64	64,06
…	…
256	256,02

x- und y-Wert unterscheiden sich voneinander um einen relativ geringen Wert, wenn x „anwächst“. Für x = 4096 ergibt sich ein y-Wert von y = 4096,00098. Dies bedeutet aber, dass sich der Graph der Funktion f der Geraden g mit der Gleichung y = x annähert.

Der Graph dieser Funktion schmiegt sich immer mehr an die Gerade g an. Sie wird als **Asymptote** bezeichnet.

Definition:
Eine Gerade, der sich eine Kurve nähert, ohne diese zu berühren, bezeichnet man als **Asymptote**.

(3) Für Werte aus dem Definitionsintervall] 0, 1] bzw. [−1, 0 [erkennt man, dass sich der Graph der Funktion f der y-Achse annähert.

Beispiel:

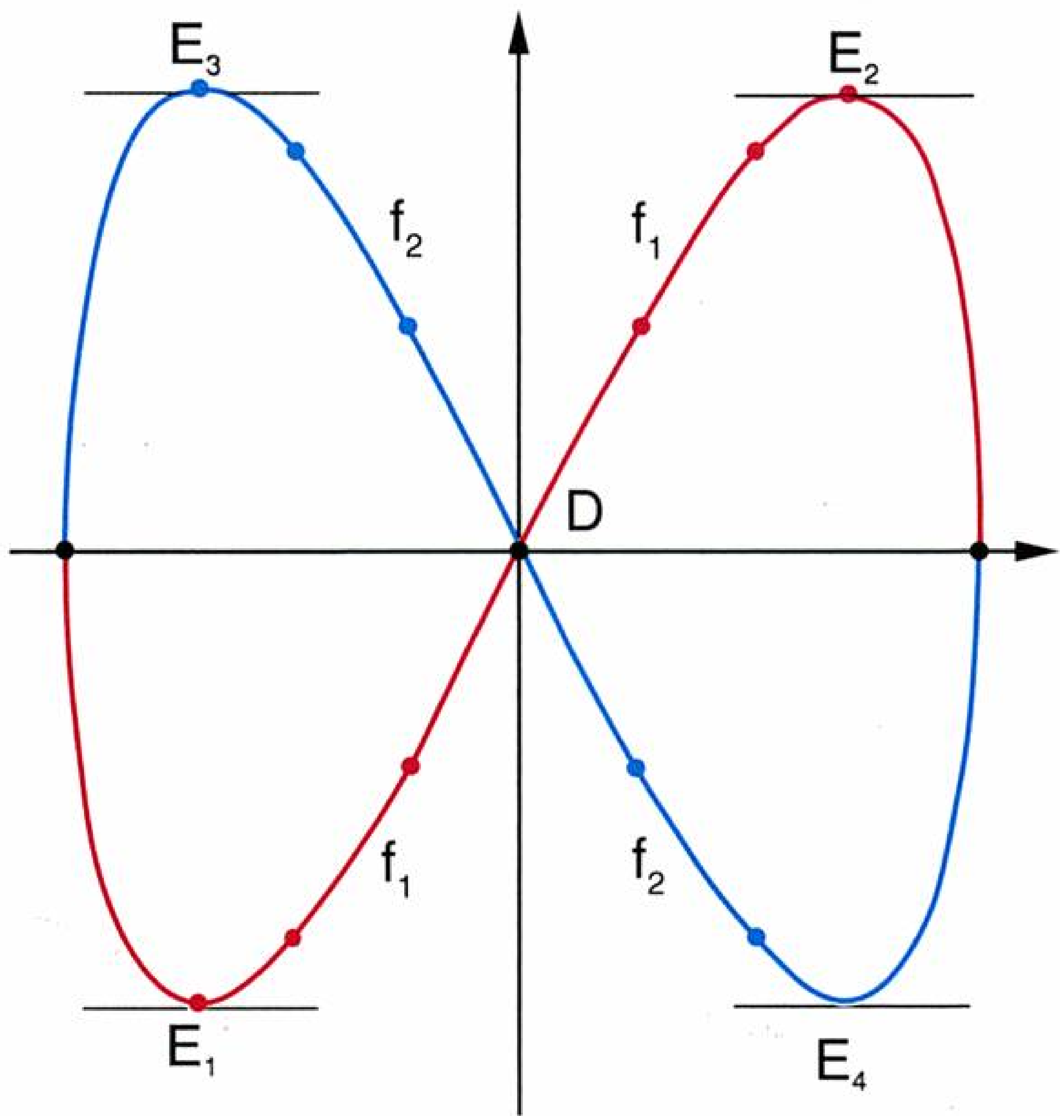
Die Gleichung $4y^2 = 16x^2 - x^4$ ist äquivalent mit dem Gleichungspaar $y_1 = +\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} \vee y_2 = -\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2}$.

Dem Paar ist je eine Funktion f_1 bzw. f_2 zugeordnet. Die Graphen der Funktionen f_1 bzw. f_2 sind in einem kartesischen Koordinatensystem für $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant 4\}$ darzustellen, wobei speziell die Stützstellen für $x = -2\sqrt{2}$ und $x = +2\sqrt{2}$ zu verwenden sind.

Lösung:

Wertetabellen:

f_1		f_2	
x_1	y_1	x_2	y_2
0	0	0	0
±1	±1,9	±1	∓1,9
±2	±3,5	±2	∓3,5
$\pm 2\sqrt{2}$	±4	$\pm 2\sqrt{2}$	∓4
±4	0	±4	0



Im nebenstehenden Beispiel finden sich Nullstellen in den Punkten mit den Koordinaten (−4, 0), (0,0), (4,0).

Da in den Punkten $E_1(-2\sqrt{2}, -4)$, $E_2(2\sqrt{2}, 4)$, $E_3(-2\sqrt{2}, 4)$, $E_4(2\sqrt{2}, -4)$ die Tangenten an die Graphen parallel zur x-Achse sind, handelt es sich um **Extrempunkte**.

Betrachtet man $f = f_1 \cup f_2$, so besitzt f im Koordinatenursprung einen sogenannten **Doppelpunkt D**.

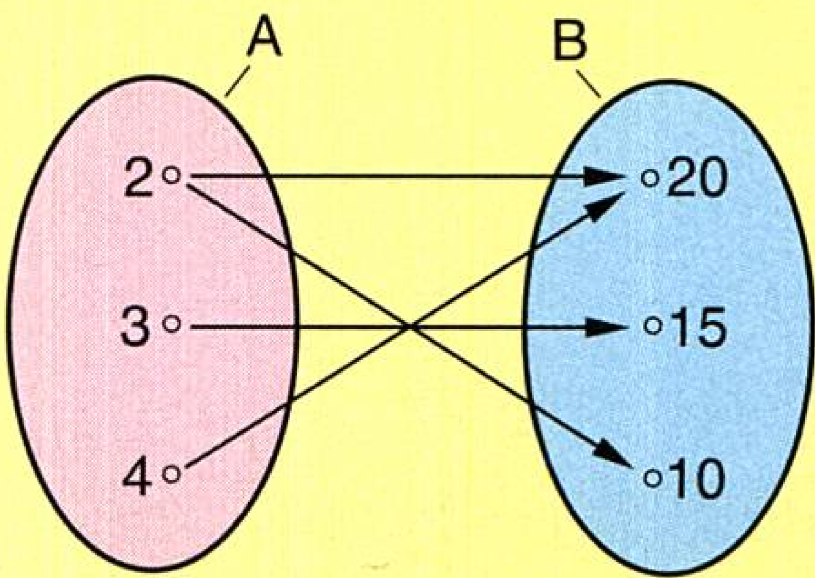
D könnte hier auch als **zweifacher Wendepunkt** angesprochen werden.

Das Aufsuchen spezieller Eigenschaften von Kurven bezeichnet man als **Kurvendiskussion**.

AUFGABEN

828. Man zeichne ein Pfeildiagramm zu der Relation mit der Vorschrift „x gehört zur Klasse der y" zwischen den Mengen A = {Hering, Pferd, Wal, Hummer, Forelle} und B = {Säugetiere, Krebse, Fische}.

829. Zwischen den Mengen A = {2, 3, 4} und B = {20, 15, 10} ist eine Relation R durch das nebenstehende Pfeildiagramm gegeben. Wie lautet eine zugehörige Relationsvorschrift?



830. a) {(4, 5), (5, 5), (3, – 2)} ist **(1)** durch ein Pfeildiagramm **(2)** durch eine Wertetabelle **(3)** im kartesischen Koordinatensystem darzustellen.

b) Es ist anzugeben, ob es sich um eine Funktion handelt. (Begründung!)

831. Die in der nachstehenden Tabelle gegebenen Durchschnittstemperaturen sind als Funktionen der Zeit in **einem** Koordinatensystem grafisch darzustellen.

Stadt in den USA	Jän. Feb.	März April	Mai Juni	Juli Aug.	Sept. Okt.	Nov. Dez.
Denver	0	6	23	24	14	2
Las Vegas	8	16	26	32	23	12
Miami	20	23	27	28	27	21

Bemerkung: Temperaturangaben in °C.



(Las Vegas)

Die Aufgaben **832.** bis **835.** sind mittels linearer Interpolation zu lösen!

832. Die Marktforschung für eine Ware ergab, dass der Monatsumsatz bei einem Verkaufspreis von 10,— Euro 36000 Einheiten, bei 12,— Euro 30000 Einheiten betrug. Wie groß ist der Absatz bei einem Stückpreis von 10,50 Euro?

833. Bei den Preisen p (in Euro) wurden nebenstehende Absatzmengen x (in Stück) erzielt:

p:	101,9	109,4	121,6	132,8
x:	3300	3201	2896	2056

Welche Absatzmengen könnten bei einem Preis von **a)** 106,9 **b)** 126,4 erzielt werden?

834. Die Kostenrechnung eines Unternehmens zeigt den nebenstehenden Zusammenhang zwischen der Absatzmenge x, dem Erlös E und dem Gewinn G:

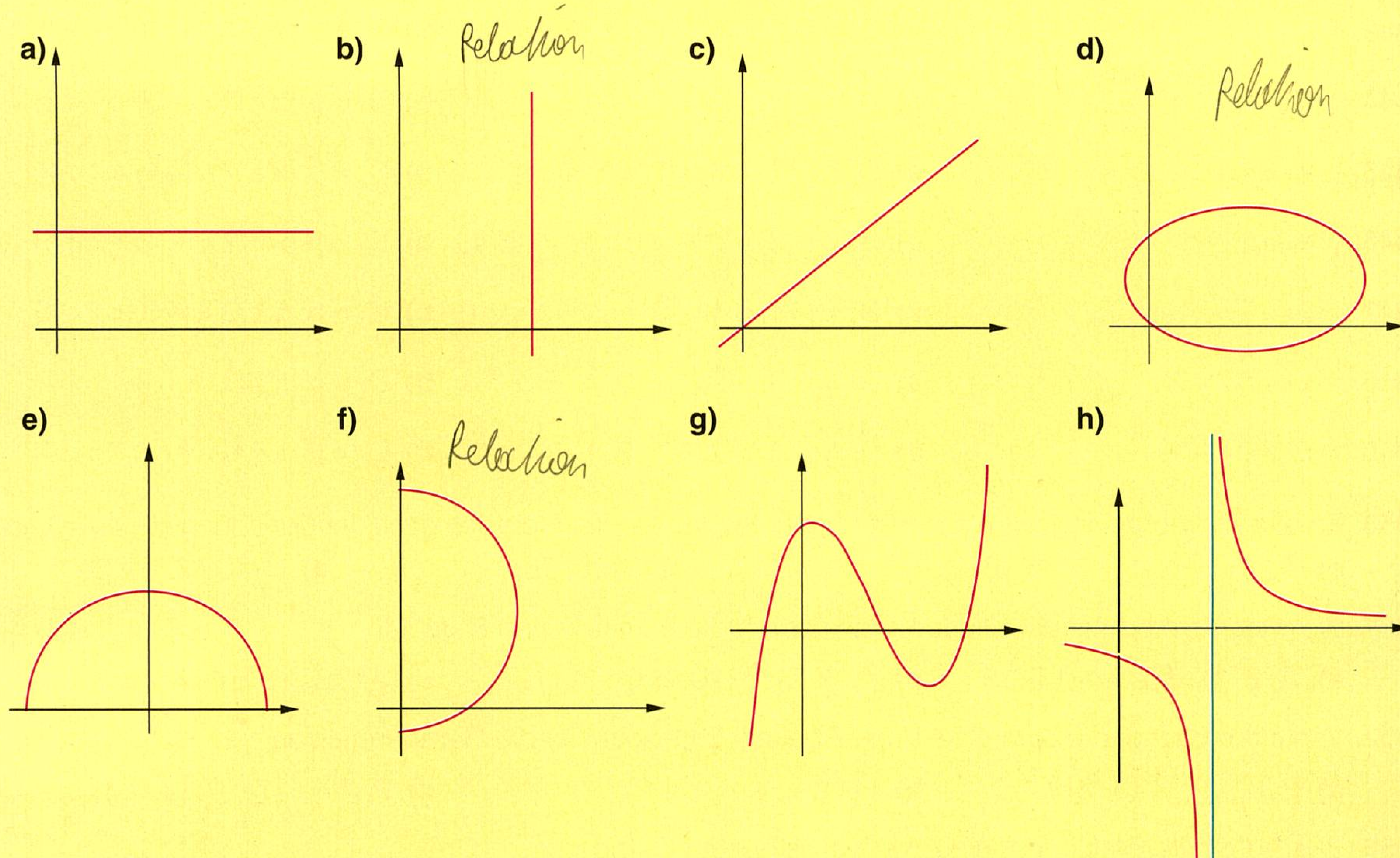
x:	100	120	140
E:	19840,56	23874,62	31000,92
G:	6238,52	9000,40	10972,20

Welcher **(1)** Erlös **(2)** Gewinn kann bei einer Absatzmenge von **a)** 115 Einheiten **b)** 123 Einheiten erzielt werden?

835. Gegeben ist die nebenstehende Wertetabelle der empirischen Funktion f. Es ist der Näherungswert von **a)** f (8,5) **b)** f (14,12) linear zu interpolieren.

x	f (x)
8,31	10312,94
9,35	9006,07
11,38	3050,10
15,82	–3234,15
18,78	–1809,34

836. Bei welchen der folgenden rot eingezeichneten Graphen handelt es sich um die Darstellung einer Funktion?



837. Der Graph der Funktion mit der Gleichung **a)** $y = \frac{1}{9}x^3$ **b)** $y = \frac{1}{x}$ **c)** $y = \frac{1}{x^2}$ **d)** $y = \frac{x}{x+3}$ ist für $D = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$ zu zeichnen.

838. Die Funktion mit der Gleichung **a)** $y = \frac{x}{2} - 2$ **b)** $y = \frac{x+3}{3}$ **c)** $y = \frac{x^3}{9} + 3$ **d)** $y = \frac{x^2}{2} - x$ ist im Intervall $[-1, 3]$ grafisch darzustellen!

839. Der Graph der Funktion $f: x \mapsto kx$ ist für **a)** $k = 4$ **b)** $k = -3$ **c)** $k = 0{,}25$ **d)** $k = \frac{2}{9}$ zu zeichnen. Außerdem ist der Steigungswinkel α jeweils durch Messung zu ermitteln.

840. Text wie Aufgabe **839.** für **a)** $k = 5$ **b)** $k = -1{,}2$ **c)** $k = -\frac{1}{5}$ **d)** $k = 2{,}25$

841. Ein Schnellzug fährt mit der Geschwindigkeit von 30 m/s. Der Zusammenhang zwischen der Fahrzeit t und dem Fahrweg x ist anzugeben und grafisch für $t \leqslant 5$ s darzustellen! (1 s ≙ 1 cm, 30 m ≙ 1 cm)



842. Der Preis einer Warenmenge ist eine lineare Funktion der Stückzahl und umgekehrt. Man ermittle — wenn ein Stück der Ware 2,80 Euro kostet — den Zusammenhang zwischen der Stückzahl x und dem dafür zu zahlenden Preis y und stelle die dadurch festgelegte Funktion für $x \leqslant 5$ zeichnerisch dar! (2,80 Euro ≙ 1 cm, 1 Stück ≙ 1 cm)

Bei den Aufgaben **843.** bis **849.** ist der Graph der gegebenen Funktion über D_f zu zeichnen. In jenen Fällen, in denen der Graph eine Gerade ist, ist der Steigungswinkel α anzugeben.

843. $f: x \mapsto 3$ **a)** $D_f = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ **b)** $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge (-3) < x < 3\}$

844. $f: x \mapsto 5$ **a)** $D_f = \{-5, -4, -3, -2\}$ **b)** $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge (-3) < x < 3\}$

845. $f: x \mapsto x + 7$ **a)** $D_f = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$ **b)** $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge (-4) \leqslant x \leqslant 1\}$

846. $f: x \mapsto 2x - 1$ **a)** $D_f = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ **b)** $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge (-4) < x < 5\}$

847. $f: x \mapsto \frac{x}{2}$ **a)** $D_f = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$ **b)** $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge (-6) < x \leqslant 1\}$

848. $f: x \mapsto \frac{2}{3}x + 2$ **a)** $D_f = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ **b)** $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge (-3) \leqslant x \leqslant 4\}$

849. $f: x \mapsto \frac{1}{2}x - 1$ **a)** $D_f = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ **b)** $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge (-3) \leqslant x \leqslant 4\}$

850. Es ist zu berechnen, welche der gegebenen Punkte auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 4x - 5$ liegen:

a) A(1, −1) **b)** B(2, 4) **c)** C(20, 75) **d)** D(732,2, 2933)

851. Welchen Anstieg hat die Gerade g, die durch die Punkte A und B geht?

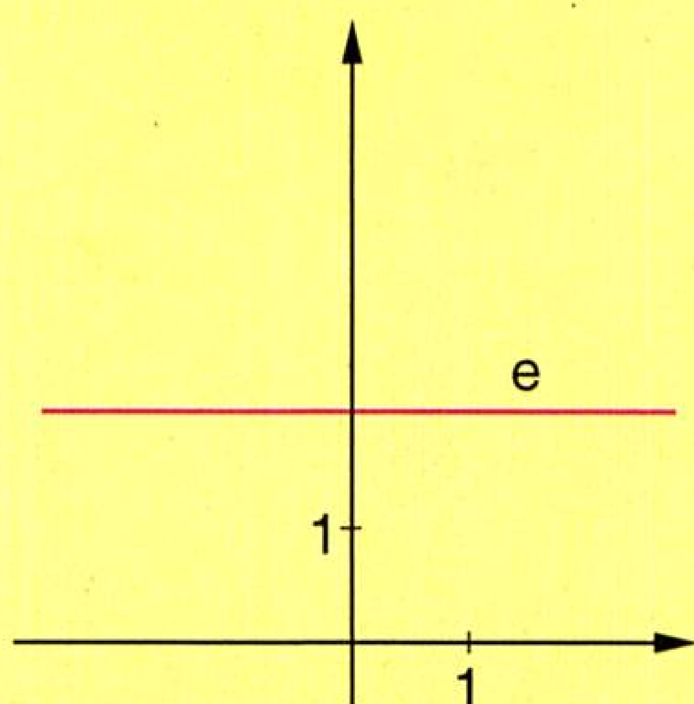
a) A(2, 1), B(−5, −13) **b)** A(0, 2), B(20, 52) **c)** A(−3, 2), B(−4, −1)

852. Von einer Geraden g sind zwei Punkte bekannt. Gesucht ist die Geradengleichung.

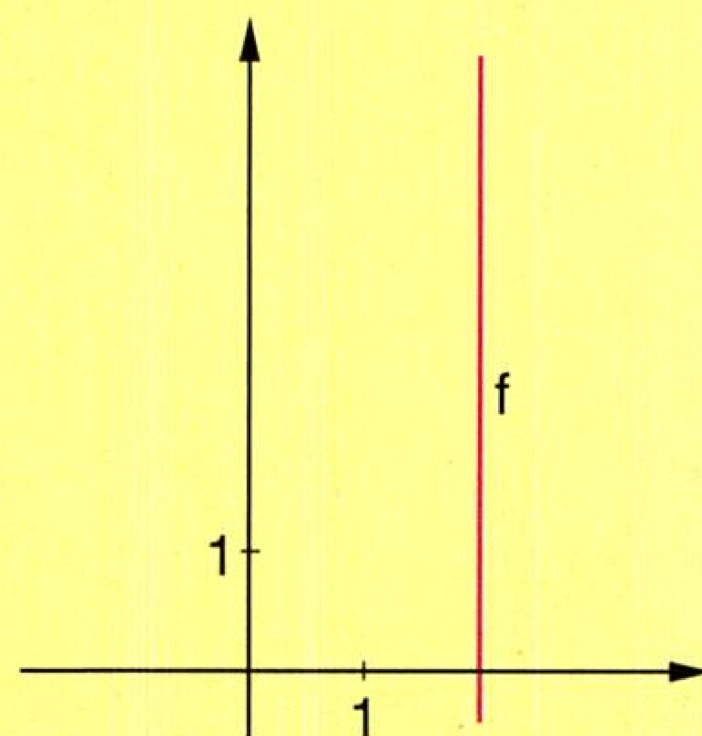
a) $P_1(2, 2)$, $P_2(3, 3)$ **b)** $P_1(1, -3)$, $P_2(2, 2)$ **c)** $P_1(-1, -7)$, $P_2(2, -4)$

853. Wie lauten die Gleichungen zu den gezeichneten Geraden e, f, g, h?
k und d sind allenfalls durch Messung zu ermitteln.

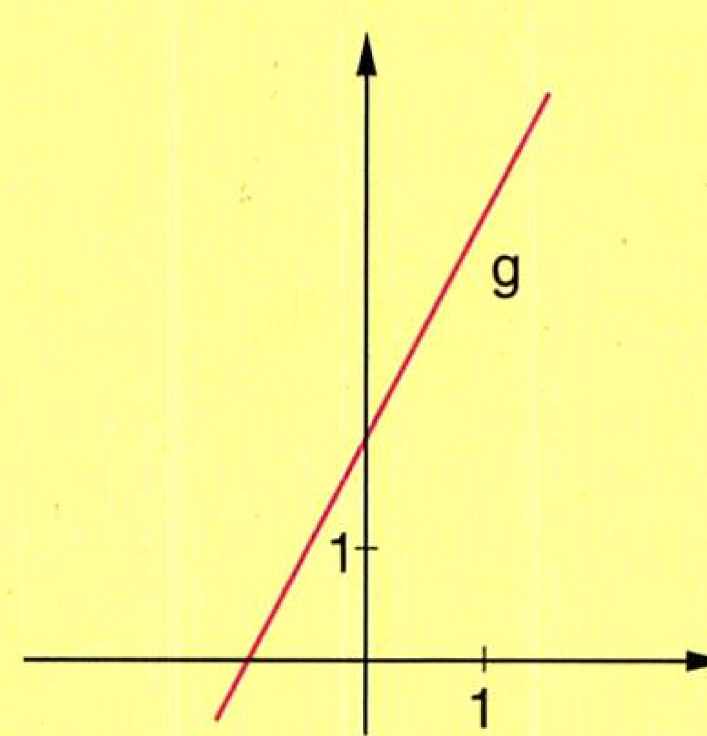
a)



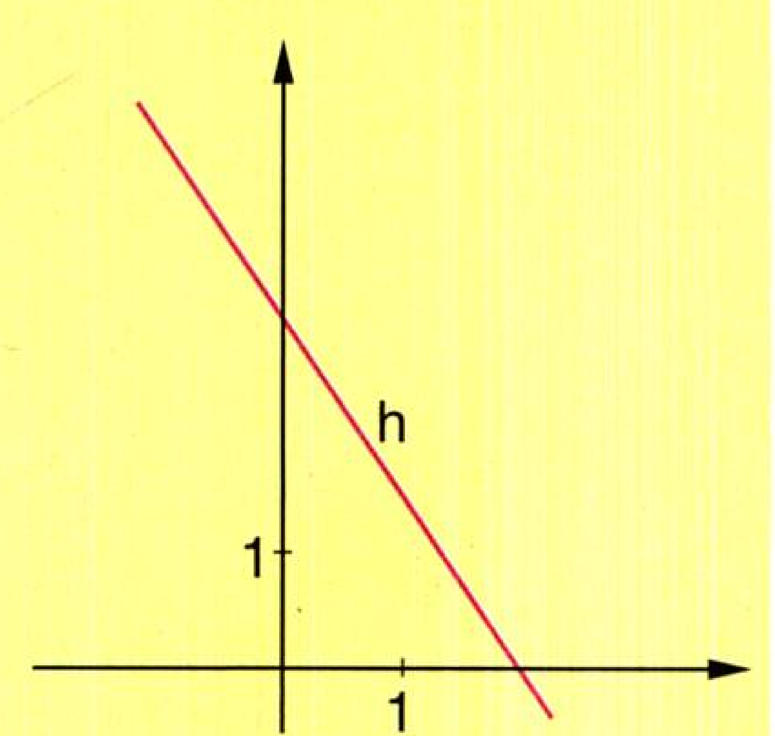
b)



c)



d)



854. Liegt der Punkt P(1, 2) auf der Geraden g(A, B)? (Rechnerische Lösung!)

a) A(9, 17), B(17, 5) **b)** A(2, 3), B(−7, −6) **c)** A(−3, −2), B(−4, −3)

855. In welchem Punkt schneidet die Gerade g(A, B) die x-Achse? (Rechnerische Lösung!)

a) A(−2, 3), B(4, 2) **b)** A(1, 2), B(−7, 2) **c)** A(2, 4), B(2, −5)

856. Liegen die drei Punkte

a) A(1, −4), B(2, −1), C(3, 2) **b)** $P_1(7, 6)$, $P_2(9, 4)$, $P_3(1, 5)$

c) P(3, 4), Q(5, −2), R(10, 3) auf einer Geraden? (Rechnerische Lösung!)

857. Es ist die Nullstelle der durch die Gerade g[A(−1, 2), B(0, 3)] festgelegten Funktion zu berechnen.

858. Welche Funktionsvorschrift legt jene Gerade fest, die durch den Punkt P(5,1) geht und parallel zur durch $f: x \mapsto 2x - 1$ gegebenen Geraden ist?

859. Welche Funktionsvorschrift legt jene Gerade fest, die durch den Punkt (–2, 2) geht und parallel zur durch $f: x \mapsto 2(x-3)$ gegebenen Garaden ist?

860. Man zeichne durch P(1, 2) die parallele Gerade zu g [P_1(3, 4), P_2(–3, –4)] und berechne ihre Funktionsgleichung.

861. Man zeichne durch P(–3, 5) die parallele Gerade zu g [P_1(1, 2), P_2(–3, 1)] und berechne ihre Funktionsgleichung.

862. Die Geraden mit nachfolgenden Gleichungen sind zu zeichnen:

a) $x+y+1=0$ **b)** $x-y-1=0$ **c)** $x+y-1=0$ **d)** $x-y+1=0$

e) $x+3y+2=0$ **f)** $x-3y-2=0$ **g)** $x+3y-2=0$ **h)** $x-3y+2=0$

Anleitung: Die Gleichungen können zunächst auf die Form y = ... gebracht werden.

863. Die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden sind durch Messung im Koordinatensystem zu bestimmen:

a) $y=6x$, $y=7x+1$ **b)** $y=\frac{9x}{10}+3$, $y=2x-4{,}1$

c) $y-x=0$, $y-2x=0$ **d)** $-3x-4=0$, $x=\frac{4}{3}(y-2)$

864. Zwei Elektrizitätswerke A, B haben folgende Konditionen:
A: Grundgebühr $G_1 = 10{,}—$ Euro, Preis k_1/kWh = 0,08 Euro
B: keine Grundgebühr, Preis k_2/kWh = 0,4 Euro

a) Man konstruiere die Graphen der Rechnungsbeträge!

b) Bei welchem Verbrauch sind die monatlichen Gesamtkosten gleich?

c) Wie hoch sind die Kosten im Fall b)?

865. Ein selbstständiger Handelsvertreter steht vor der Entscheidung, ob er seine Tätigkeit mit dem eigenen PKW oder mit einem gleichwertigen Mietwagen ausführen soll. Sein eigener PKW verursacht ihm Kosten von 0,7 Euro/km (Treibstoff, Versicherung, Kfz-Steuer, Service usw.), der Mietwagen hingegen nur 0,25 Euro/km. Bei diesem sind aber zusätzlich zum Kilometergeld noch 18,— Euro/Tag zu entrichten.

a) Bei welcher Anzahl von km sind die entstehenden Monatskosten gleich hoch?

b) Wie hoch sind die Kosten?

Bemerkung: Der Monat wird zu 30 Tagen gerechnet.

866. Ein Betrieb entschließt sich, für eine Maschine einen Leasingvertrag[1] abzuschließen. Der Vertrag enthält die Bestimmung, dass die Miete, die jeweils am Beginn jedes Jahres zu erlegen ist und im ersten Jahr 18000,— Euro ausmacht, sich jeweils nach einem Jahr um 1500,— Euro vermindert. Nach wie vielen Jahren geht das Gerät in das Eigentum des Mieters über?

867. Der Anschaffungswert einer Anlage beträgt 123700,— Euro, ihre Nutzungsdauer ist 10 Jahre.

a) Nach wie vielen Jahren beträgt der Restwert 86590,— Euro?

b) Welchem Prozentsatz entspricht die jährliche Abschreibung?

868. Eine Anlage hat einen Anschaffungswert von 187300,— Euro Nach 20 Jahren beträgt ihr Buchwert 93650,— Euro.

a) Welche Nutzungsdauer wurde angenommen?

b) Welchem Prozentsatz entspricht die jährliche Abschreibung?

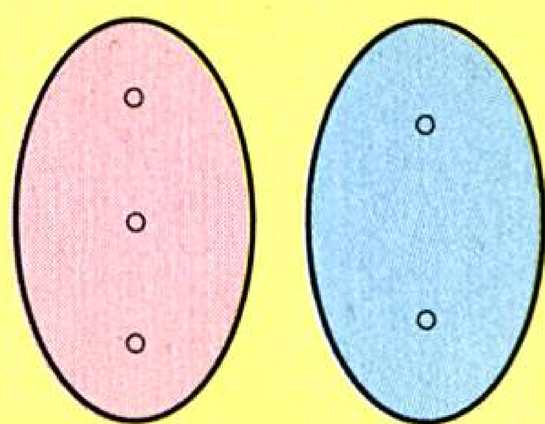
869. Eine Maschine hat einen Anschaffungswert von 2000000,— Euro. Nach 8 Jahren beträgt ihr Buchwert 1600000,— Euro.

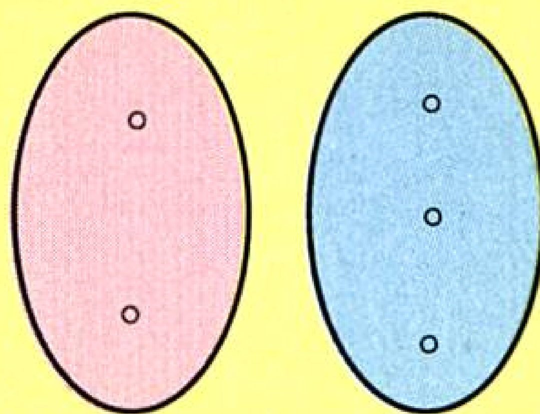
a) Man ermittle Buchwertfunktion, Nutzungsdauer, Graph!

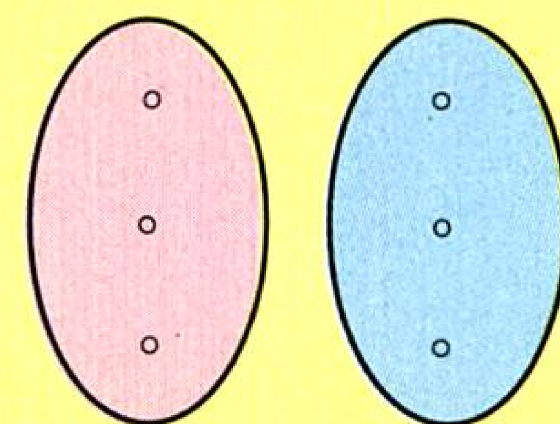
b) Welcher Gewinn wird erzielt, wenn die Maschine nach 30 Jahren um 1600000,— Euro verkauft wird?

[1] Leasing (engl. to lease = mieten, vermieten, Form der Finanzierung). Im gegenständlichen Fall ist der Vertrag ein Mietvertrag, der sämliche Kosten des Leasinggebers deckt, d. h. mit Bezahlung der letzten Rate geht die Maschine in das Eigentum des Leasingnehmers über.

870. Es sind Funktionspfeile — wenn immer das möglich ist — derart einzuzeichnen, dass die Umkehrung der Funktion wieder eine Funktion ist:

a) 

b) 

c) 

Bei den Aufgaben **871.** bis **873.** ist die Umkehrfunktion f^{-1} der gegebenen Funktion f anzugeben:

871. a) $\{(1, 2), (3, 7), (8, -2)\}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{4x}{3} + 99$ **c)** $f: x \mapsto x^2 - 16$

872. a) $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{1}{x^2}$ **c)** $f: x \mapsto \frac{1}{x^2+5}$

873. a) $f: x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{5x-3}{2x}$ **c)** $f: x \mapsto \frac{3x-4}{x+2}$

Bei den Aufgaben **874.** bis **878.** sind die Graphen der gegebenen Funktionsgleichungen in einem kartesischen Koordinatensystem über den angeführten Intervallen bzw. Definitionsmengen zu zeichnen. Außerdem wird eine möglichst genaue Wertetabelle gefordert, die auch etwaige bei den Beispielen angeführte Stützstellen zu berücksichtigen hat. Wenn vorhanden, sind Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte aus dem Graphen abzulesen und ihre Koordinaten anzugeben, wobei sich die Verwendung von Millimeterpapier zum Zeichnen als sinnvoll erweisen wird. Die Zeicheneinheit beträgt, wenn nichts anderes angegeben ist, 1 cm.

874. a) $y = 2x^2$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2{,}5 \leq x \leq 2{,}5\}$ **b)** $y = \frac{1}{2}x^2$, $[-4, 4]$

875. a) $y = 2x^2 + 6x$, $]-4, 1]$, Stützstelle: $x = -1{,}5$ **b)** $y = x^2 - 6x$, $]-1, 7[$

c) $y = \frac{x^2}{3} - 3x$, $[-3, 9]$, Stützstellen: $x = -1{,}5$, $x = 1{,}5$, $x = 4{,}5$, $x = 7{,}5$

Die Nullstellen sind auch rechnerisch zu ermitteln!

876. a) $y = x^2 + 2x - 15$, $]-6, 4]$ **b)** $y = x^2 + 8x + 12$, $[-7, -1]$

c) $y = -4x^2 + 4x + 3$, $[-0{,}6, 1{,}6[$, Stützstellen: $x = -0{,}5$, $x = 0{,}5$, $x = 1{,}5$, $E = 2$ cm

877. a) $y = x^3 - 3x^2 + 4$, $[-1, 3]$, $E = 2$ cm **b)** $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$, $]-2, 4[$, $E = 2$ cm

c) $y = \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{5}{8}$, $[-5, 3]$

878. a) $y = \frac{x^2+1}{x}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid (-5 \leq x < 0) \vee (0 < x \leq 5)\}$, Stützstellen: $x = -0{,}5$, $x = 0{,}5$

b) $y = \frac{x^2 - 5x + 9}{x - 5}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid (-5 \leq x < 5) \vee (5 < x \leq 14)\}$, $E = \frac{1}{2}$ cm

879. Die Gleichung $y^2 = 2x^2 - x^4$ ist äquivalent mit dem Gleichungspaar $y_1 = +x\sqrt{2-x^2} \vee y_2 = -x\sqrt{2-x^2}$. Dem Paar ist je eine Funktion f_1 bzw. f_2 zugeordnet. Die Graphen der Funktionen f_1 bzw. f_2 sind in einem kartesischen Koordinatensystem für $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leq x \leq +\sqrt{2}\}$ darzustellen, wobei speziell die Stützstellen für $x = \pm 1$ zu verwenden sind. $E = 5$ cm. Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte sind aus dem Graphen abzulesen und ihre Koordinaten anzugeben.

880. In a), b) und c) sind die wahren Aussagen anzukreuzen, in d) ist das Richtige einzusetzen:

○ **a)** Man nennt eine Stelle x einer Funktion f, welcher der Funktionswert Null zugeordnet ist, eine Nullstelle der Funktion f.

○ **b)** Die Tangenten in den Extrempunkten des Graphen einer Funktion f sind stets parallel zur y-Achse.

○ **c)** Ändert der Graph im Punkt W einer Funktion f sein Krümmungsverhalten, so heißt W Wendepunkt.

d) Eine Kurve, die nur aus Wendepunkten besteht, ist eine .....

881. Die wahren Aussagen sind anzukreuzen:

○ **a)** Bei einer Funktion muss von jedem Element der Definitionsmenge genau ein Pfeil weggehen. Elemente der Wertemenge können getroffen werden, sogar von mehreren Pfeilen, müssen aber nicht getroffen werden.

○ **b)** Eine Funktion ist eine (besondere) Relation.

○ **c)** Eine Relation ist eine (besondere) Funktion.

○ **d)** Eine Relation kann eine Funktion sein, muss aber nicht.

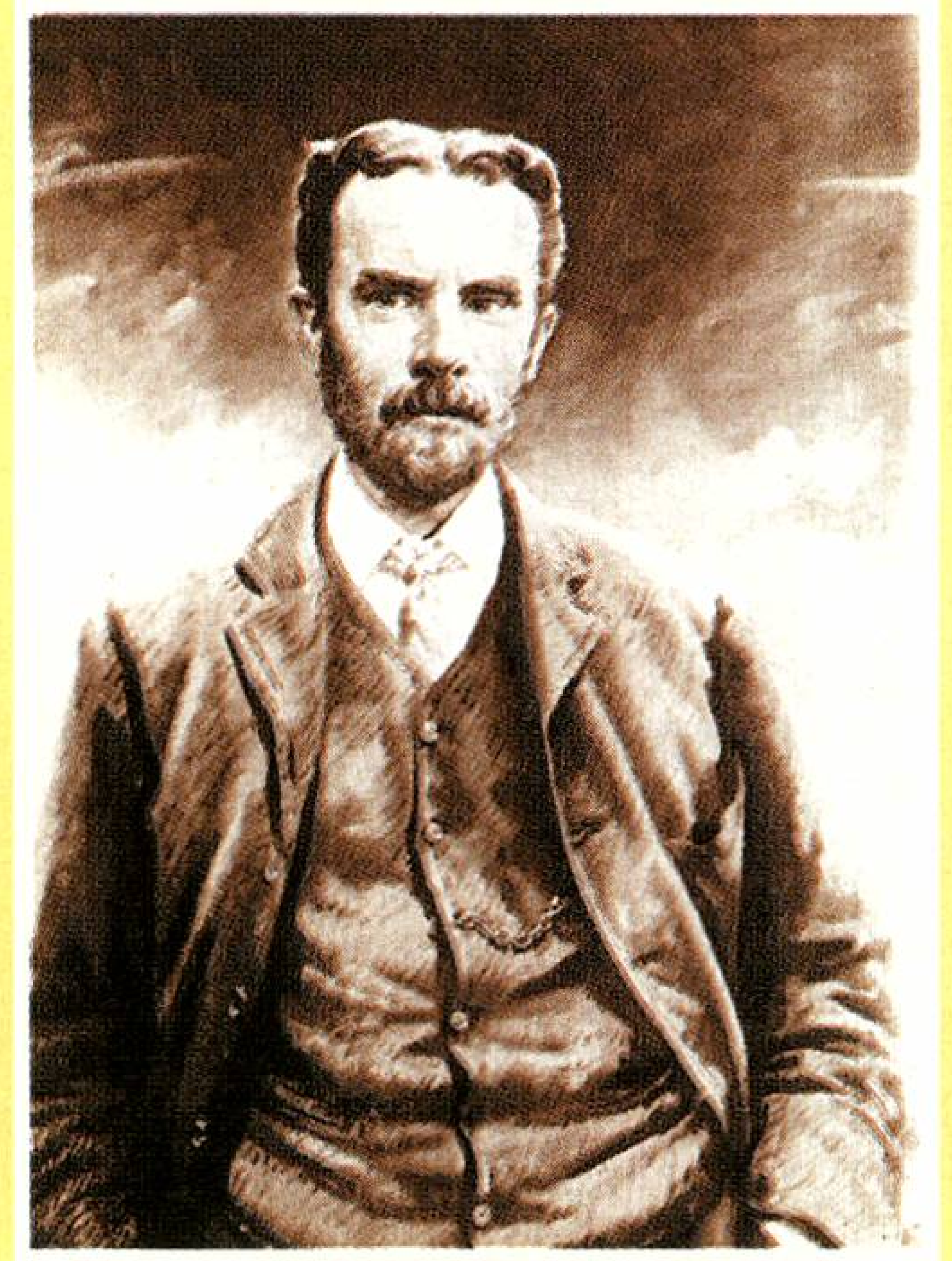
○ **e)** Bei gegebener Funktion f heißt ein Wert $x \in D_f$, dem der Funktionswert Null zugeordnet ist, eine Nullstelle der Funktion f.

○ **f)** Jede Gerade der Ebene ist Graph einer linearen Funktion.

○ **g)** Ein Punkt liegt auf einer Kurve, wenn die Koordinaten des Punktes die zu der Kurve gehörige Funktionsgleichung erfüllen, d. h. wenn die Funktionsgleichung bei Ersetzen der Variablen durch die Punktkoordinaten in eine wahre Aussage übergeht.

○ **h)** Die Umkehrung einer linearen Funktion ist immer ebenfalls eine lineare Funktion.

Vermischte Aufgaben



Der Engländer **Oliver HEAVISIDE** (1850–1925) war ein Neffe von **Charles WHEATSTONE** (1802–1875). Er hatte lediglich Grundschulausbildung, alles Weitere brachte er sich im Selbststudium bei. HEAVISIDE blieb sein Leben lang unverheiratet. Seine hauptsächlichen Leistungen bestanden in der Anwendung der Mathematik auf die Elektrotechnik. Manche seiner genialen Leistungen blieben lange unerkannt, weil niemand seine fürchterliche Handschrift lesen konnte.

882. Die HEAVISIDE–Funktion[1] $x \mapsto H(x)$ ist definiert durch

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{für } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

a) Es ist H(x) für $x \in \{-177, 3, 9, 42, 0\}$ zu ermitteln.

b) Der Graph der HEAVISIDE–Funktion ist für [–3, 3] zu zeichnen.

Bemerkung: H(x) ist ein Beispiel für eine **Treppenfunktion**.

883. Man berechne **a)** f(0) **b)** f(1) **c)** f(2) **d)** $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ der Funktion $f: x \mapsto 5x - 3$.

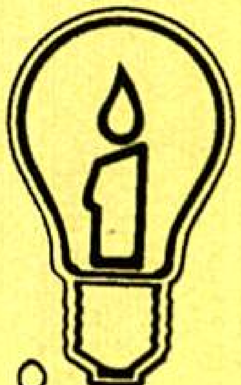
884. Es ist f(x) für $x \in \left\{1, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, -4, 0\right\}$ der Funktion $f: x \mapsto \frac{2x-5}{2}$ zu berechnen.

885. Für welche Werte des Argumentes ist f(x) = z, wenn:

a) $f(x) = \frac{x}{2} + 1$, z = 3 **b)** $f(x) = \frac{3x-8}{5}$, z = 1 **c)** $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $z = \frac{2}{5}$?

886. Die maximale Definitionsmenge der Funktion $f: x \mapsto \frac{x(x-1)}{1+\frac{1}{x}}$ ist über $\mathbb{R}$ zu bestimmen. Wie lautet der Funktionswert von f(x) für $x \in \{1, -2, 0, 5\}$?

THINK ThInk THINK THINK THINK THINK ThInk THINK ThInk THINK THINK THINK THINK THINK ThInk THINK



THINK ThInk THINK THINK THINK ThInk THINK



887. Ein Mann ging mit einem Kind spazieren. Er wurde von einem anderen Spaziergänger gefragt: „In welcher verwandtschaftlichen *Relation* stehen Sie zu dem Kind?" Der Mann antwortete: „Sein Vater ist das einzige Kind meiner Mutter". Welche Relation besteht nun wirklich?

[1] Benannt nach dem englischen Physiker **Oliver HEAVISIDE** (1850–1925). Diese Funktion spielt in der **Mechanik**, **Elektrotechnik** und **Systemtheorie** eine Rolle.

7. Problemstellungen der Technik

Maschineningenieurwesen/Mechatronik

888. Bei einem Versuch, ein Objekt mit veränderlichem Gewicht auf ebener Unterlage zu verschieben, ergibt sich nebenstehende Wertetabelle für die Relation zwischen Gewicht G und Reibungskraft F_R. Funktionsgleichung?

G N	F_R N
10	2,1
20	4,2
30	6,4
40	8,5
50	10,7

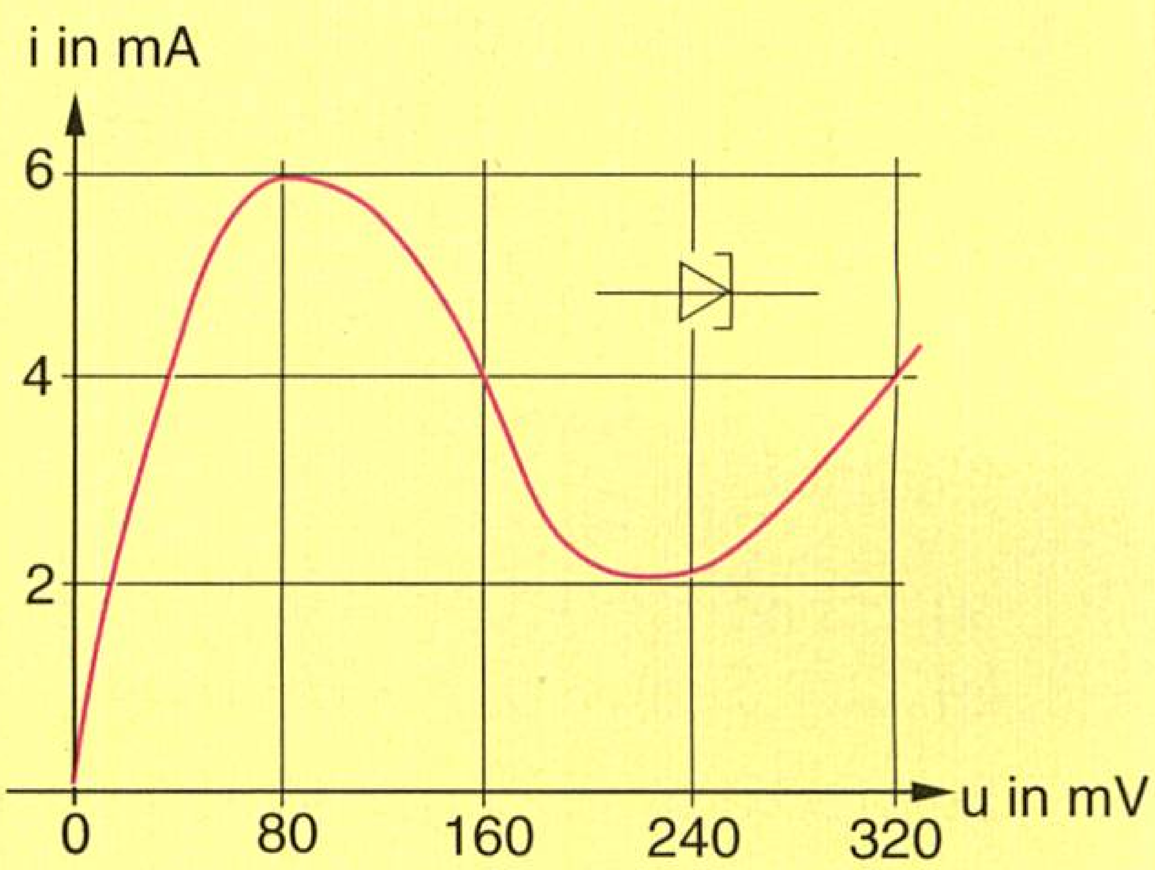
889.

Uhrzeit	h in cm
8^h00	170
8^h30	155
9^h10	137
10^h20	106
11^h00	89

Aus einem zylindrischen Behälter wird die enthaltene Flüssigkeit abgesaugt. Zu mehreren Zeitpunkten wird die Höhe h des Flüssigkeitsspiegels abgelesen, um festzustellen, ob die Pumpe gleichmäßig arbeitet. Funktionsgleichung?

Elektrotechnik/Elektronik

890. In eine elektronische Schaltung wird eine Tunneldiode mit nebenstehender Strom-Spannungskennlinie eingebaut. Es ist bekannt, dass durch die Diode 4 mA fließen. Man verwende das Diagramm, um die möglichen Spannungsabfälle festzustellen.



Bautechnik

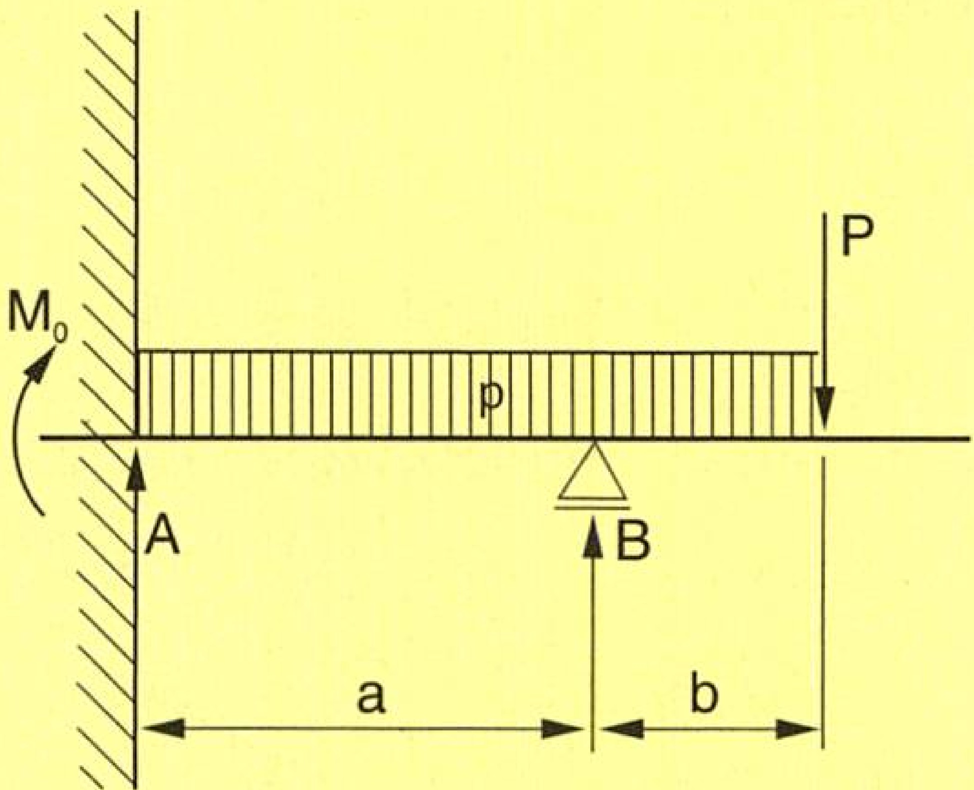
891. Ein Träger ist — vgl. nebenstehende Figur — durch die Gleichlast p und die am Ende des Tragarms angreifende Einzellast P belastet. Verlauf des Biegemoments:

$M(x) = M_0 + Ax - \frac{px^2}{2} \quad 0 \leqslant x \leqslant a$ bzw.

$M(x) = M_0 + Ax - \frac{px^2}{2} + B(x-a) \quad a < x \leqslant a+b$

mit $M_0 = \frac{2b^2 - a^2}{8} p + \frac{b}{2} P$, $A = \left(\frac{5a}{8} - \frac{3b^2}{4a}\right) p - \frac{3b}{2a} P$,

$B = \left(\frac{3a}{8} + b + \frac{3b^2}{4a}\right) p + \left(1 + \frac{3b}{2a}\right) P$



Der Verlauf der Momentenlinie ist für P = 3 t, p = 200 kg/m , a = 6 m und b = 2 m zu zeichnen!

Wirtschaftsingenieurwesen

892. Ein Busunternehmen bietet eine Exkursionsfahrt von Saalfelden nach Innsbruck (134 km) zu einem Pauschalpreis von 600,— Euro an. Das zweite Angebot lautet: 1,5 Euro/km und ein Tagsatz für den Chauffeur von 180,— Euro. Anhand eines Schaubilds ist zu beurteilen, welches Angebot günstiger ist.



893. Eine 75 Watt Glühlampe (Brutto-Listenpreis 1,20 Euro inkl. MwSt.) verbraucht in 100 Stunden Strom um 0,9 Euro. Eine 18 Watt SL–Sparlampe (Brutto-Listenpreis 30,— Euro inkl. MwSt.), die etwa die gleiche Lichtleistung hat, verbraucht während der selben Zeitdauer Strom um 0,22 Euro.

a) Es ist jene Benützungsdauer grafisch zu ermitteln, ab der eine Sparlampe günstiger ist.

b) Wie verändert sich das Schaubild, wenn man berücksichtigt, dass nach etwa 1000 Stunden eine Glühlampe ausgebrannt ist, während die Brenndauer der Sparlampe rund 5000 Stunden beträgt?

Textiltechnik

894. Der Zusammenhang zwischen Nm und Ttex ist grafisch zu veranschaulichen. Funktionsgleichung: $\text{Ttex} = \frac{1000}{\text{Nm}}$

895. Ein Unternehmer kauft eine Webmaschine um 950 000,— Euro. Die Erzeugung pro m^2 Stoff kostet ihn mit dieser Maschine 10,— Euro (Bedienungspersonal, Rohstoff und Energie).

a) Die Kostenfunktion ist in Abhängigkeit von der erzeugten Stoffmenge darzustellen.

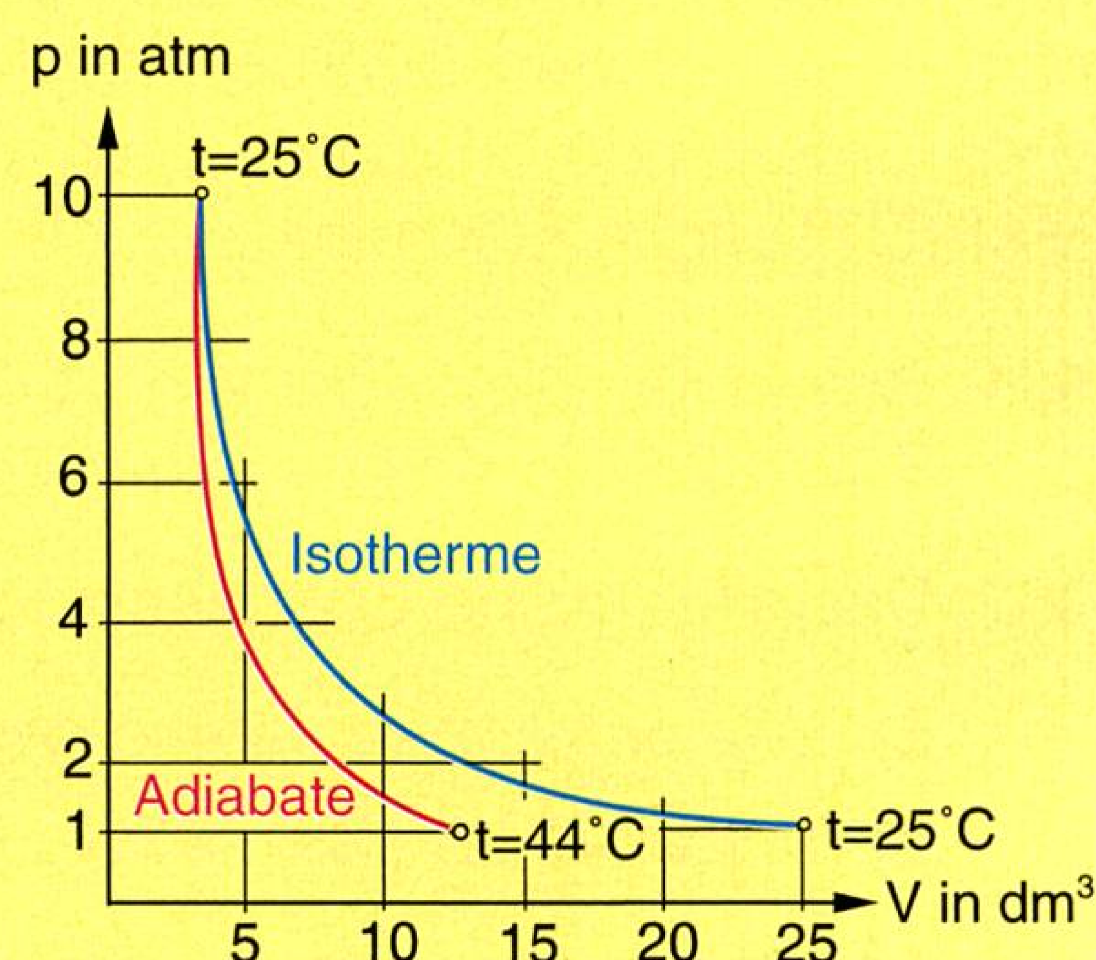
b) Der Unternehmer verkauft den erzeugten Stoff um 20,— Euro/m^2. Die Erlösfunktion ist anzugeben.

c) Wie viel m^2 Stoff muss der Unternehmer mindestens verkaufen, um einen Gewinn zu erzielen? (Grafische und rechnerische Lösung!)

896. Für die Reißfestigkeit eines Garns muss dem Garn in der Spinnerei eine Drehung gegeben werden. Die Anzahl der Drehungen hängt mit der Garnnummer wie folgt zusammen: $T/m = \alpha\sqrt{Nm}$, wobei T/m die Anzahl der Drehungen pro m und α ein vorgegebener Drehungskoeffizient ist. Der Zusammenhang ist für $\alpha = 80°$ grafisch darzustellen.

Chemieingenieurwesen

897. Gegeben ist das Schaubild für isotherme[1] und adiabatische[2] Expansion von 1 mol N_2 von 10 atm auf 1 atm bei 25° C.



a) Das Molvolumen V ist bei p = 2 atm und p = 4 atm entlang der Adiabate und der Isotherme abzulesen.

b) Die Expansion verlaufe extrem schnell. Welche Kurve kennzeichnet diesen Prozess?

c) Die Expansion verlaufe extrem langsam. Welche Kurve kennzeichnet diesen Prozess?

898. Die Löslichkeit von Luft in Wasser bei Normaldruck wird in nachstehender Tabelle angegeben. Der Absorptionskoeffizient α ist das Verhältnis des Normalvolumens der Luft bei Normalbedingungen und des Volumens des Wassers bei verschiedenen Temperaturen:

T in °C	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\alpha \cdot 10^3$	29,2	22,9	18,7	16,1	14,2	13,0	12,2	11,6	11,3	11,1	11,1

a) Es ist zur obigen Tabelle ein Schaubild anzufertigen, wobei die Temperatur auf der x-Achse und α auf der y-Achse abzutragen ist.

b) Ist die Funktion $f(x) = 9{,}2 + \frac{300}{x+15}$ ein brauchbarer Ersatz für $\alpha \cdot 10^3$? Man ermittle dazu den auftretenden Fehler bei allen Temperaturen. Liegt sein Betrag nicht über 10% von $\alpha \cdot 10^3$, so kann man von einer guten Annäherung sprechen!

899. Das BOYLE-MARIOTTEsche Gasgesetz gibt die Abhängigkeit von Druck p und Volumen V eines idealen Gases bei einer konstanten Temperatur in einem abgeschlossenen Raum an: $p \cdot V =$ konstant. Diese Gleichung kann man als Funktionsgleichung für p interpretieren. Man zeichne den Graphen für $V \in [0{,}5,\ 3]$, ausgehend von p = 1 atm und V = 2 l. Druck des Gases bei einem Volumen von 0,8 l?

---

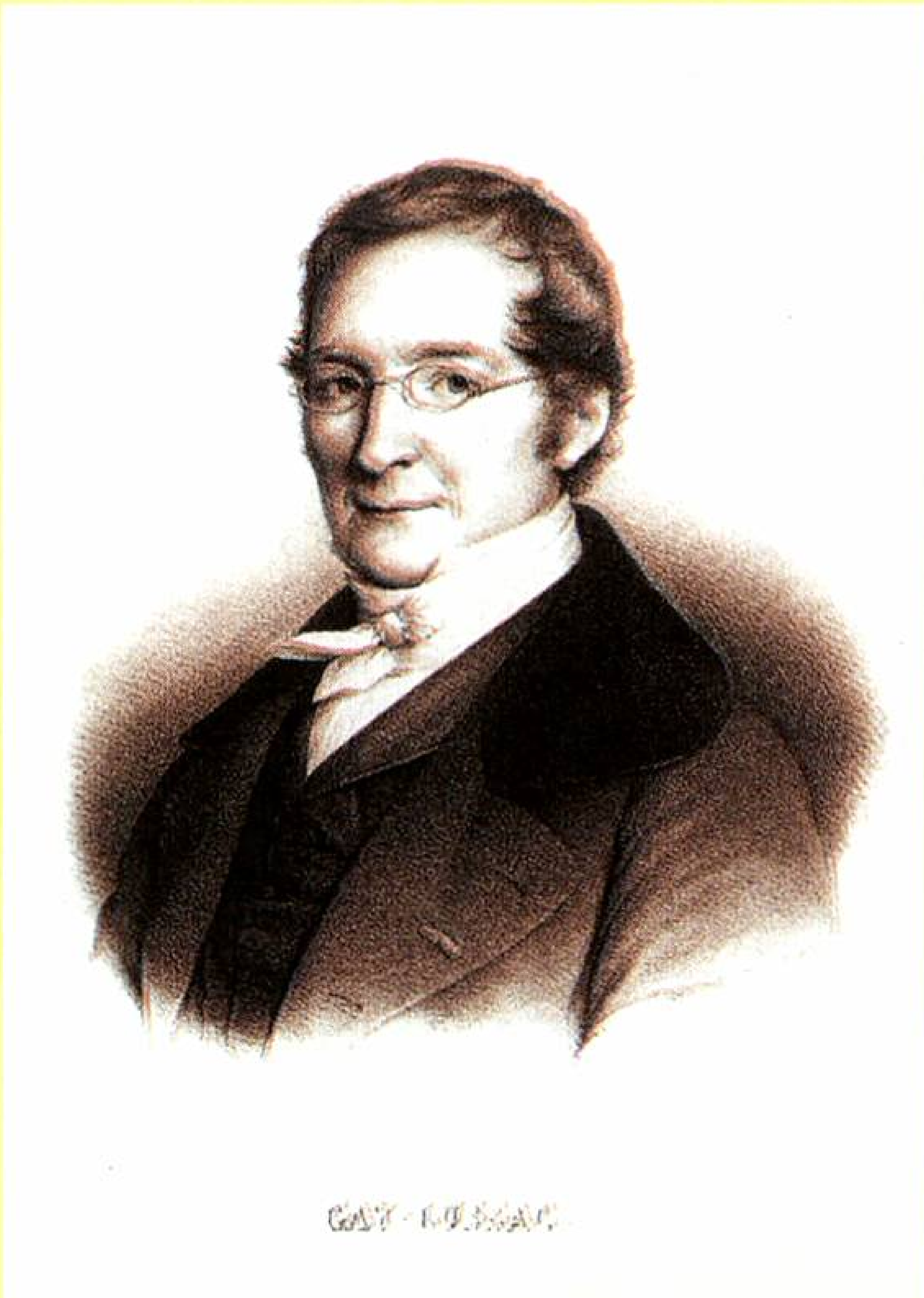
[1]) isotherm (griech.-neulat.): gleiche Temperatur habend.

[2]) adiabatisch (griech.): ohne Wärmeaufnahme oder -abgabe erfolgend.

900. Das GAY-LUSSACsche Gasgesetz, das der französische Physiker und Chemiker **Joseph Louis GAY-LUSSAC** (1778–1850) im Jahre 1802 aufgestellt hat, beschreibt den Zusammenhang von Volumen und Temperatur eines (idealen) Gases bei gleich bleibendem Druck:

$V_t = V_0\left(1+\frac{t}{273}\right)$ V_0 ..... Volumen bei 0° C V_t ..... Volumen bei t° C

Für den Ausgangswert $V_0 = 5$ l soll die Funktion V_t im Bereich – 273° C bis 100° C gezeichnet werden (50° C ≙ 2 cm, 1 l ≙ 2 cm). Wie groß ist das Volumen bei – 100° C? Bei welchem Temperaturwert ist das Volumen halb so groß wie bei 50° C?


Joseph Louis GAY-LUSSAC
(1778–1850)

Die „École Polytechnique" wurde nach der französischen Revolution gegründet. Sie trug dazu bei, dass Frankreich in den exakten Naturwissenschaften am Beginn des 19. Jahrhunderts die führende Stelle einnahm. An dieser Schule studierte auch **Joseph GAY-LUSSAC** (1778–1850). Als ausgezeichneter Experimentator entdeckte er wichtige Gesetze und Erscheinungen der Chemie. Noch heute werden wir durch das „GAY-LUSSACsche Gesetz" (Zusammenhang zwischen Druck und Temperatur eines Gases) an ihn erinnert. Am 9. Mai 1850 starb Joseph GAY-LUSSAC an den Folgen einer Explosion, die sich bei einem Experiment ereignete.

Der französische Physiker **Edmund MARIOTTE** (1620–1684) stellte unabhängig von **Robert BOYLE** (1627–1691) das Gesetz über die Beziehung von Druck und Volumen bei Gasen auf, das sogenannte BOYLE-MARIOTTEsche Gasgesetz.

901. Wie lautet die allgemeine Gleichung aus Aufgabe **900.**, wenn statt t in °C die absolute Temperatur $T = t + 273$ in K verwendet wird? Der Anstieg der Geraden ist zu ermitteln.

902. Das allgemeine Gasgesetz lautet: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ n ..... Molzahl, R ..... allgemeine Gaskonstante

a) Wie erhält man daraus das **(1)** GAY-LUSSACsche **(2)** BOYLE-MARIOTTEsche Gasgesetz?

b) Für welches „Normalvolumen" ist die Gasgleichung ausgelegt?

Anleitung: Man setze die „Normalbedingungen" in die Gleichung ein: $p = 101325$ Pa, $n = 1$ mol, $T = 273{,}15$ K, $R = 8{,}3143$ J / (mol · K).

903. Radioaktives Jod 131 zerfällt in 8 Tagen auf die Hälfte seiner anfänglichen Substanzmenge, in 16 Tagen auf ein Viertel usw. Eine Funktion $m(t) = K \cdot (0{,}5)^{bt}$ soll die Substanzmenge in Abhängigkeit von der Zeit (in Tagen) darstellen.

a) Wie lauten die Parameter K und b für die Ausgangssubstanzmenge $m(0) = 200$ g?

b) Wie groß ist die verbliebene Substanzmenge nach 10 Tagen?

c) Aus dem Graph der Funktion ist abzulesen, wann die Substanzmenge $\frac{1}{10}$ der Ausgangsmenge ausmacht. (Zeichnung für t = 20 s bis t = 30 s)

904. Ein Ingenieur möchte die relative Atommasse von Germanium schätzen. Er kennt einerseits die relativen Atommassen von Aluminium und Zinn und andererseits die entsprechenden Ordnungszahlen (vgl. nebenstehenden Auszug aus dem Periodensystem).

13 Al 26,97
32 Ge ?
50 Sn 118,70

a) Das Atomgewicht von Germanium ist grafisch linear zu interpolieren.

b) Das gesuchte Atomgewicht ist mittels Schlussrechnung zu ermitteln:

Sn – Al ..... 118,70 – 26,97 ..... 50 – 13
Ge – Al ..... x ..... 32 – 13

x = ?

Anleitung: Lineare Interpolation!

c) Im Periodensystem ist bei Germanium ein Atomgewicht von 72,60 zu finden. Warum stimmt dieses nicht mit dem mittels Interpolation ermittelten Wert überein?

Vermischte Aufgaben

905. Man ermittle die Masse eines 1 m Flachstahls von 95 mm Breite und 7,8 mm Dicke aus der nachstehenden Tabelle:

MASSE VON 1 METER FLACHSTAHL IN KILOGRAMM									
Dicke in mm	Breite in mm								
	80	85	90	95	100	110	120	130	140
1	0,628	0,667	0,707	0,746	0,785	0,864	0,942	1,021	1,099
2	1,256	1,335	1,413	1,492	1,570	1,727	1,884	2,041	2,198
3	1,884	2,002	2,120	2,237	2,355	2,591	2,826	3,062	3,297
4	2,512	2,669	2,826	2,983	3,140	3,454	3,768	4,082	4,396
5	3,140	3,336	3,532	3,729	3,925	4,317	4,710	5,103	5,495
6	3,768	4,003	4,239	4,474	4,710	5,181	5,652	6,123	6,594
7	4,396	4,671	4,946	5,220	5,495	6,044	6,594	7,144	7,603
8	5,024	5,338	5,652	5,966	6,280	6,908	7,536	8,164	8,792
9	5,652	6,005	6,358	6,712	7,065	7,771	8,478	9,185	9,891
10	6,280	6,672	7,065	7,457	7,850	8,635	9,420	10,21	10,99

906. Es ist der Dampfdruck p für eine Temperatur von t = 123° C aus der Sattdampftabelle zu errechnen.

Temperatur in °C *t*	Druck in bar *p*	Spez. Volumen des Wassers in dm^3/kg *v*	Spez. Volumen des Dampfes in m^3/kg *v''*	Dichte des Dampfes in kg/m^3 *ρ*
100	1,0132	1,0438	1,673	0,5978
105	1,2080	1,0479	1,419	0,7047
110	1,4326	1,0520	1,210	0,8267
115	1,6905	1,0563	1,036	0,9652
120	1,9853	1,0608	0,8913	1,122
125	2,3208	1,0654	0,7700	1,299
130	2,7011	1,0702	0,6679	1,497
135	3,131	1,0751	0,5817	1,719
140	3,614	1,0802	0,5084	1,967
145	4,155	1,0855	0,4459	2,243

907. In einer Versuchsreihe werden die Beschleunigungen gemessen, die verschiedene Massen m durch eine konstante Kraft erhalten. Die Relation zwischen a und m ist grafisch zu veranschaulichen.

m in kg	a in m/s^2
1	4,9
2	2,5
3	1,6
4	1,2
5	1,0

908. Die Geschwindigkeiten v einer Flüssigkeit, die durch ein Rohr mit veränderlichem Querschnitt A fließt, werden gemessen. Die Relation zwischen v und A ist zeichnerisch darzustellen.

A in cm^2	v in m/s
20	4,0
15	5,3
10	7,9
5	15,9

909. Bei Belastung einer Federwaage durch verschiedene Kräfte ergibt sich für die zugehörigen Verlängerungen Δl nebenstehende Wertetabelle. Die zugehörige Funktionsgleichung ist mit Hilfe eines Schaubildes zu ermitteln.

F in N	Δl in cm
2	9,5
4	19,5
6	30,0
8	40,0
10	50,5

910. Text wie Aufgabe 909., jedoch soll F eine Funktion von Δl sein — vgl. nebenstehende Wertetabelle!

F in N	Δ l in cm
4	1
7	2
10	3

911. Ein geschlossenes Gefäß ist mit Luft gefüllt. Wird es erhitzt, so ändert sich mit der Temperatur t der Luftdruck p. Es ergibt sich die rechts angeführte Wertetabelle. Die Funktionsgleichung für p in Abhängigkeit von t ist grafisch zu bestimmen.

t in °C	p in bar
20	1,075
40	1,145
60	1,220
80	1,290
100	1,370

912. Bei einem elektrischen Tauchsieder kann der Widerstand ausgewechselt werden. Es wird erprobt, wie lange es dauert, bis eine bestimmte Wassermenge um eine bestimmte Temperaturdifferenz erwärmt wird. Zu den Widerständen R ergeben sich die Zeiten t. Welche Beziehung zwischen R und t kann aus der Beobachtung entnommen werden?

R in Ω	t in s
100	46
150	70
200	90
250	115
300	142

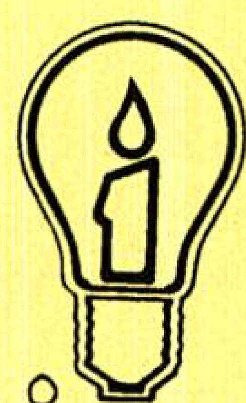
913. Mittels einer kleinen Stahlkugel und eines dünnen Fadens wird ein mathematisches Pendel simuliert und der Zusammenhang zwischen Pendellänge l und Schwingungsdauer t (vgl. Tabelle) ermittelt. Graph?

l in cm	t in s
20	0,95
40	1,27
60	1,55
80	1,80
100	2,01
120	2,20

914. Bei einem sich langsam abkühlenden Schmelzofen wird die Temperatur zu jeder vollen Stunde kontrolliert. Auf Grund der Wertetabelle soll die Relation zwischen Zeit und Temperatur grafisch untersucht werden. Es ist daher abzuschätzen, zu welchem Zeitpunkt 800° C unterschritten werden.

Uhrzeit	t in °C
13	1400
14	1200
15	1060
16	960
17	880
18	820

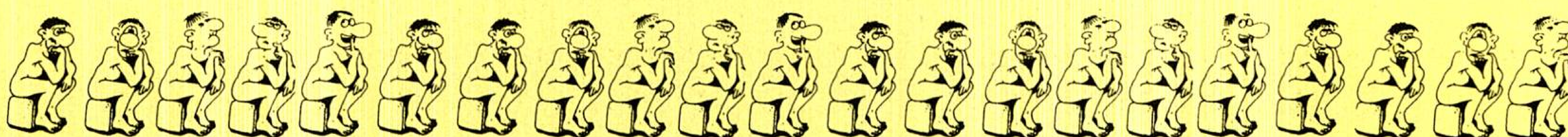
THINK THINK THINK ThInk THINK THINK THINK ThInk THINK THINK THINK ThInk
ThInk THINK THINK THINK THINK



THINK ThInk THINK THINK THINK ThInk THINK

915. Wenn die Funktion einer Funktion wieder die ursprüngliche Funktion ergibt, dann kann das nur f (x) = ... sein. — Ja, welche Funktion ist das? Gibt es mehrere solche Funktionen?





LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

1. Lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen

Beispiel:

Brigitta und Toni besuchen ein CD-Geschäft und erhalten folgende Rechnungen:
Brigitta: eine DVD und zwei CDs — 70 Euro
Toni: zwei DVDs und eine CD — 80 Euro.
Wie viel kostet eine DVD, wie viel eine CD?

Lösung:

Ware	Preis
DVD	x
CD	y

$\Rightarrow$ (1) $x + 2y = 70$
(2) $2x + y = 80$

Gleichung (1) wird durch eine Reihe von Zahlen in eine wahre Aussage übergeführt, z. B. für $x = 10$, $y = 30$; $x = 20$, $y = 25$ usw.

Auch für die zweite Gleichung gilt: Es gibt unendlich viele geordnete Paare (x, y), die die Gleichung erfüllen. Wir suchen nun aber jenes Zahlenpaar (a, b), für das die Gleichung (1) und (2) erfüllt wird. (a, b) heißt **Lösung** des Gleichungssystems.

Wie kann man nun das Zahlenpaar (a, b) ermitteln, das das obige Gleichungssystem erfüllt?

Zu jeder linearen Gleichung in zwei Variablen gehört eine Gerade, auf unser Beispiel bezogen:

(1) $x + 2y = 70 \Leftrightarrow y = -\frac{x}{2} + 35$

(2) $2x + y = 80 \Leftrightarrow y = -2x + 80$

Der Schnittpunkt S hat folgende Bedeutung: Seine Koordinaten bilden jenes Zahlenpaar, das **beide** Gleichungen erfüllt.

Wenn ein Punkt auf einer Geraden liegt müssen seine Koordinaten die (Funktions-)Gleichung erfüllen.

S liegt sowohl auf der Geraden mit der Gleichung (1) als auch auf der Geraden mit der Gleichung (2). Daher müssen die Koordinaten von S sowohl die Gleichung (1) als auch die Gleichung (2) erfüllen.

Durch Messung im Koordinatensystem ergibt sich als Lösung unserer Aufgabe: **x = 30, y = 20**.

Eine DVD kostet 30 Euro, eine CD 20 Euro.

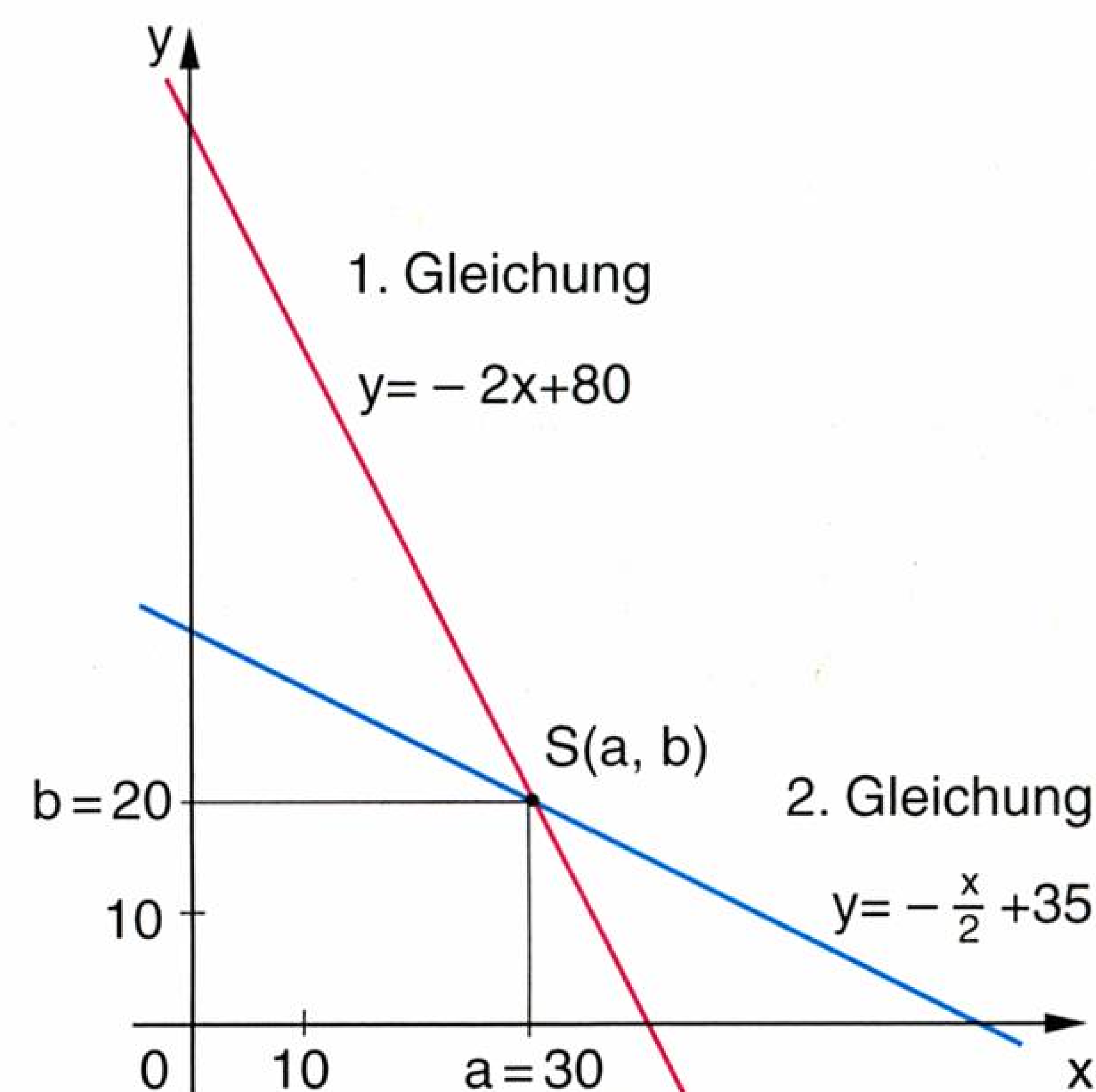
(1) $x + 2y = 70$
(2) $2x + y = 80$

ist ein Beispiel für ein lineares Gleichungssystem in zwei Variablen.

Definition:

Wenn zwei lineare Gleichungen in zwei Variablen gleichzeitig erfüllt werden sollen, spricht man von einem **linearen Gleichungssystem in zwei Variablen**.

Grafisches Lösungsverfahren



S liegt auf **beiden** Geraden, d. h. x = a und y = b erfüllt das Gleichungssystem, (a, b) ist also Lösung des Systems.

Kann man das Gleichungssystem des obigen Beispiels auch rechnerisch lösen?
Wir wollen nun eine rechnerische Methode, das sogenannte **Eliminationsverfahren**, besprechen.

Rechnerische Lösungsverfahren

Eliminationsverfahren

Es werden solche Linearkombinationen aus beiden Gleichungen gebildet, dass jeweils eine Variable verschwindet, also „eliminiert" wird. Unter einer **Linearkombination** versteht man, dass man ein Vielfaches der einen Gleichung zu einem Vielfachen der anderen Gleichung addiert oder von diesem subtrahiert. Statt den Vielfachen dürfen auch Bruchteile genommen werden.

Beispiel:
Das nachstehende Gleichungssystem ist mit Hilfe des Eliminationsverfahrens zu lösen:

(1) $3x + 2y = 5$
(2) $4x - 5y = -1$

Lösung:

(1) $3x + 2y = 5 \quad | \cdot 4$
(2) $4x - 5y = -1 \quad | \cdot (-3)$

(1)′ $12x + 8y = 20$
(2)′ $-12x + 15y = 3$ } +

(3) $0 + 23y = 23$
$y = 1$

Wir multiplizieren Gleichung **(1)** mit der Zahl 4 und Gleichung **(2)** mit der Zahl – 3.

Sinn: x erhält entgegengesetzte Zahlen als Koeffizienten und die anschließende Addition von **(1)′** und **(2)′** liefert eine Gleichung, in der x nicht mehr vorkommt (eliminiert ist).

Wir ermitteln x, indem wir z. B. in Gleichung **(1)** einsetzen:
$3x + 2 \cdot 1 = 5 \Leftrightarrow \mathbf{x = 1}$

Die Probe muss stets im **gegebenen System** durchgeführt werden:
(1) $3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$ (w) (2) $4 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = -1$ (w)

Verwirrend? Wem das obige Beispiel kompliziert erscheint möge das eingangs (grafisch) behandelte Gleichungssystem (1) $x + 2y = 70$ (2) $2x + y = 80$ nun rechnerisch mit dem Eliminationsverfahren lösen.

Denn das nächste Beispiel ist deshalb etwas schwieriger zu verstehen, weil mehrere Schritte gleichzeitig (!) durchgeführt werden.

Beispiel:

(1) $-5x + 2y = 9$
(2) $-7x - 3y = 12$ ist mit Hilfe des Eliminationsverfahrens zu lösen.

Lösung:

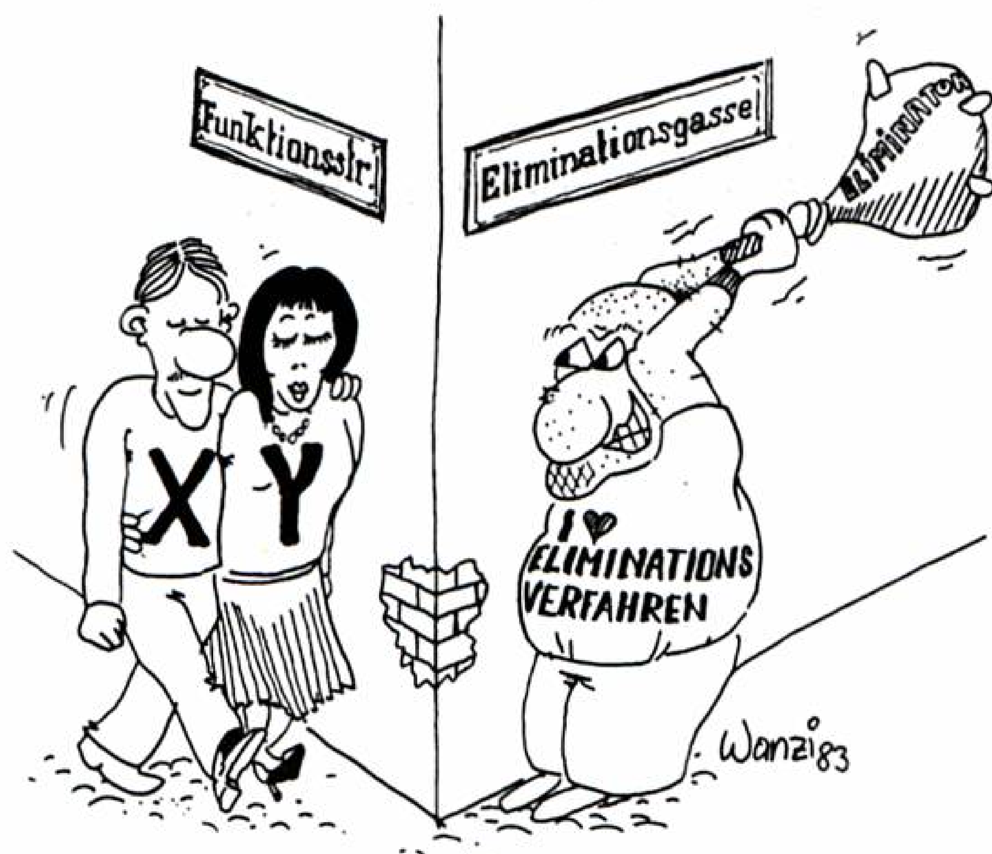
(1) $-5x + 2y = 9 \quad | \cdot 3$
(2) $-7x - 3y = 12 \quad | \cdot 2$
(3) $-29x = 51$
$x = -\frac{51}{29}$

Folgende Schritte werden gleichzeitig durchgeführt: Gleichung **(1)** wird mit 3 multipiziert und zu Gleichung **(2)** — die mit 2 multipliziert wird — addiert. Dadurch erhalten wir Gleichung **(3)**.

Wir ermitteln y, indem wir z. B. in Gleichung **(1)** einsetzen:
$-5\left(-\frac{51}{29}\right) + 2y = 9 \Leftrightarrow 2y = 9 - \frac{255}{29} = \frac{6}{29} \Leftrightarrow \mathbf{y = \frac{3}{29}}$

Probe:
(1) $-5\left(-\frac{51}{29}\right) + 2 \cdot \frac{3}{29} = 9$ (w) Taschenrechner! (2) $-7\left(-\frac{51}{29}\right) - 3 \cdot \frac{3}{29} = 12$ (w)

Das Gleichungssystem ist somit für das geordnete Paar $\left(-\frac{51}{29}, \frac{3}{29}\right)$ erfüllt.



Wir haben konkrete Gleichungssysteme gelöst, ohne uns über Grundmenge oder Lösungsmenge zu kümmern. Kann man z. B. den bei linearen Gleichungen in einer Variablen eingeführten Begriff der „Grundmenge“ sinngemäß auf Gleichungssysteme übertragen?

Wir überlegen: Die bisherigen Beispiele haben gezeigt, dass die Lösung aus einem geordneten Paar (x, y) besteht. Das bedeutet: Die **Lösungsmenge** (= Menge aller Lösungen) ist eine Menge, die aus geordneten Zahlenpaaren besteht. Daher muss auch die **Grundmenge** aus einer Menge geordneter Paare bestehen.

Wie kann man aber eine Zahlenmenge (als Grundmenge) angeben, die aus geordneten Paaren besteht?

Denken wir an die Produktmenge ...

Bei Gleichungssystemen in zwei Variablen ist die Grundmenge eine Menge von geordneten Zahlenpaaren. Im Allgemeinen wird eine Produktmenge ($\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ usw.) angegeben. Die bei linearen Gleichungen eingeführten Begriffe werden sinngemäß übertragen. Im Folgenden ist die Grundmenge im Allgemeinen die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Beispiel:

Das nachstehende Gleichungssystem ist in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu lösen:

(1) $15x - y = 27$
(2) $4x + 3y = 17$

Lösung:

(1) $15x - y = 27 \quad | \cdot 3$
(2) $4x + 3y = 17$
(3) $49x = 98$

$x = 2$

Selbstverständlich wird man im vorliegenden Fall die Koeffizienten von **y** „auf entgegengesetzte Zahlen bringen", denn die Koeffizienten von y sind kleinere Zahlen als die Koeffizienten von x — und man erspart sich Rechenarbeit.

$15 \cdot 2 - y = 27 \Leftrightarrow y = 3$

Probe:

(1) $15 \cdot 2 - 3 = 27$ (w) (2) $4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 17$ (w)

Somit gilt für die Lösungsmenge: $L = \{(2, 3)\}$

Neben dem Eliminationsverfahren gibt es noch weitere Lösungsverfahren. Einige dieser Methoden sollen kurz anhand von Beispielen erklärt werden.

Beispiel:

Das Gleichungssystem (1) $5x + 3y = 8$
(2) $x + 2y = 3$ ist in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu lösen!

Lösung:

Wir verwenden das sogenannte **Einsetzungsverfahren** (vgl. Außenspalte): Aus Gleichung (2) erhält man (2)′ $x = \boxed{3 - 2y}$.

Nun wird Gleichung (2)′ in Gleichung (1) eingesetzt:

$5\,\boxed{(3 - 2y)} + 3y = 8$
$15 - 10y + 3y = 8$
$7y = 7$
$y = 1$ Um die Variable x zu ermitteln, wird in Gleichung (2)′ $y = 1$ eingesetzt: $x = 3 - 2 \Leftrightarrow x = 1$

Probe:

(1) $5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 8$ (w) (2) $1 + 2 \cdot 1 = 3$ (w) $L = \{(1, 1)\}$

Einsetzungsverfahren

Aus einer der beiden Gleichungen wird durch Äquivalenzumformungen eine der Variablen in Abhängigkeit von der anderen ausgerechnet und das Ergebnis in die andere Gleichung eingesetzt. Wir erhalten sodann eine Gleichung in einer Variablen, die wir mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln lösen können.

Das Einsetzungsverfahren wird auch **Substitutionsverfahren** genannt.

Beispiel:

Das Gleichungssystem (1) $9x - y = 15$
(2) $3x + 2y = 12$ ist in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu lösen!

Lösung:

Wir verwenden das sogenannte **Gleichsetzungsverfahren** (vgl. Außenspalte): Zunächst wird die Variable y in Gleichung **(1)** und Gleichung **(2)** ausgerechnet.

(1)′ $y = 9x - 15$

(2)′ $y = \frac{12-3x}{2}$

Nun wird **(1)′** und **(2)′** gleichgesetzt:

$$9x - 15 = \frac{12-3x}{2}$$
$$18x - 30 = 12 - 3x$$
$$21x = 42$$
$$x = 2$$

Berechnung von $y: y = 9x - 15 = 9 \cdot 2 - 15 = 3 \Leftrightarrow y = 3$

Probe:

(1) $9 \cdot 2 - 3 = 15$ (w) (2) $3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$ (w) $L = \{(2, 3)\}$

Gleichsetzungsverfahren

In den beiden Gleichungen wird ein und dieselbe Variable ausgerechnet. Die entsprechenden Terme werden gleichgesetzt.

Alle drei besprochenen Lösungsverfahren haben eines gemeinsam: Sie laufen darauf hinaus, als erstes eine der Variablen zu „beseitigen", zu eliminieren. Betrachten wir z. B. das Gleichungssystem $4x + 2y = 17$
$5x - 3y = -6$.

Eigentlich kommt es gar nicht auf die Variablen x und y an, sondern auf die Zahlen 4, 2, 17 und 5, – 3, – 6. Die sogenannte **„CRAMERsche Regel"** ist eine Methode, mit der man durch eine bestimmte Multiplikation und Division dieser Zahlen die Variablen x und y direkt (also ohne Elimination einer Variablen!) berechnen kann.



Gabriel CRAMER (1704–1752) war Professor der Mathematik und Philosophie an der Akademie zu Genf. Aufbauend auf Untersuchungen von Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646 - 1716) hatte er die nach ihm benannte Regel entwickelt, ein System linearer Gleichungen mittels Determinanten zu lösen. 1750 erschien CRAMERs Hauptwerk, das seine sämtlichen Erkenntnisse enthält.

CRAMERsche Regel

Die Lösungen x und y des Gleichungssystems

(1) $ax + by = c$
(2) $dx + ey = f$

lauten:

$$x = \frac{D_x}{D}[1] = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{ce - bf}{ae - bd}[2]$$

$$y = \frac{D_y}{D}[1] = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{af - cd}{ae - bd}[2]$$

Beispiel:

(1) $x + 2y = 17$
(2) $5x - y = -3$ ist mittels CRAMERscher Regel in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu lösen!

Lösung:

Schauen wir uns zunächst den Text in der Außenspalte an. Schon nach wenigen Zeilen stoßen wir auf das quadratische Schema $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$. Es handelt sich hierbei um eine **Determinante.** So eine Determinante bedeutet grob gesagt nichts anderes als die Produktdifferenz „übers Kreuz", auf unser Beispiel bezogen:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 5 \cdot 2 = -11$$

Die Determinante wird aus den Koeffizienten von x und y der Gleichungen **(1)** und **(2)** gebildet. Ähnliches gilt für die Determinanten D_x und D_y. Allerdings werden bei D_x die Koeffizienten der „**x-Spalte**" (und bei D_y die Koeffizienten der „**y-Spalte**") durch die Konstanten auf der rechten Seite der Gleichung ersetzt:

$$D_x = \begin{vmatrix} 17 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 17(-1) - 2(-3) = -11$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 17 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 1(-3) - 17 \cdot 5 = -88$$

Mit den Gleichungen $x = \frac{D_x}{D}$ und $y = \frac{D_y}{D}$ lassen sich schließlich die Variablen x und y berechnen: $x = \frac{-11}{-11} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

$y = \frac{-88}{-11} = 8 \Leftrightarrow y = 8$

Probe! $L = \{(1,\ 8)\}$

[1]) Für $D \neq 0$.

[2]) Diese Behauptung lässt sich leicht überprüfen, indem man das Gleichungssystem einfach nach einer der weiter oben besprochenen Methoden löst!

Welche der 4 Methoden für das Lösen linearer Gleichungssysteme ist die günstigste? Leider lässt sich diese Frage nicht so einfach beantworten. Alle 4 Verfahren führen zum Ziel. Welchem der Vorzug zu geben ist, kann man schwer sagen. Denn es gibt nun einmal kein allgemein gültiges „Rezept“, bei welchem Gleichungssystem diese oder jene Lösungsmethode am günstigsten anzuwenden ist. Erst mit sehr viel Routine im Lösen von Gleichungssystemen bekommt man ein „Gefühl“, wie man am besten vorzugehen hat.
Bei allen bisherigen Beispielen konnte eine Zahlenmenge ermittelt werden, die das Gleichungssystem erfüllt. Kann auch der Fall eintreten, dass **keine** Lösung gefunden werden kann, d. h. $L = \{\ \}$? Oder kann die Lösungsmenge auch mit der Grundmenge identisch sein?
Wir überlegen uns diese Fragen anhand dreier Gleichungssysteme, die wir in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ grafisch behandeln wollen:

Fall 1

$\left.\begin{array}{l}(1)\ -x+y=1\\(2)\ -x-y=2\end{array}\right\}$ Funktionsgleichungen

Grafische Lösung:

(1) $y = x+1$
(2) $y = -x-2$

$D \neq 0$

Die beiden Geraden haben einen gemeinsamen Schnittpunkt: Das System ist eindeutig lösbar. Die Lösungsmenge besteht aus **genau einem** Punkt.

Fall 2

$\left.\begin{array}{l}(1)\ -\ \ x+\ y=1\\(2)\ -2x+2y=2\end{array}\right\}$ Funktionsgleichungen

Grafische Lösung:

(1) $y = x+1$
(2) $y = x+1$

$D = 0$

Die beiden Geraden sind identisch: Sie haben unendlich viele gemeinsame Punkte. Das System ist — wie man sagt — „**linear abhängig**“, d. h. die eine Gleichung folgt aus der anderen.

Fall 3

$\left.\begin{array}{l}(1)\ -x+y=1\\(2)\ -x+y=2\end{array}\right\}$ Funktionsgleichungen

Grafische Lösung:

(1) $y = x+1$
(2) $y = x+2$

$D = 0$

Die beiden Geraden verlaufen parallel: Das System ist unlösbar. Die Lösungsmenge ist leer. Die beiden Gleichungen widersprechen einander.

Man versuche selbstständig die obigen Gleichungssysteme rechnerisch zu lösen. Im Fall 2 und im Fall 3 ist die Determinante $D = 0$. Dennoch lässt sich entscheiden, ob das System linear abhängig oder widersprüchlich ist!

Für Fall 2: $D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad D_y = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

Für Fall 3: $D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad D_y = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

Linear abhängig: $D = D_x = D_y = 0$ (Fall 2)
Widersprüchlich: $D = 0,\ D_x \neq 0 \vee D_y \neq 0$ (Fall 3)

Bei $D = 0$ kann durch Berechnung der Determinanten D_x und D_y eine Entscheidung getroffen werden, ob das Gleichungssystem linear abhängig oder widersprüchlich ist.

Zusammenfassung:

	Fall 1	Fall 2	Fall 3
Lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen	Linear unabhängig und widerspruchsfrei, z. B.: (1) $-x+y=1$ (2) $-x-y=2$	Linear abhängig, z. B: (1) $-x+y=1$ (2) $-2x+2y=2$	Widersprüchlich, z. B.: (1) $-x+y=1$ (2) $-x+y=2$
Anzahl der Lösungen	genau eine: $(-1{,}5,\ -0{,}5)$	unendlich viele, z. B.: (0, 1), (1, 2), (3, 4), ...	Null
Lösungsmenge	$L = \{(-1{,}5,\ -0{,}5)\}$	$L = \{(x,\ y) \mid -x+y=1\}$	$L = \{\ \}$
Grafische Veranschaulichung	Zwei einander schneidende Gerade $\Rightarrow$ ein Schnittpunkt S.	Zwei identische Gerade $\Rightarrow$ unendlich viele gemeinsame Punkte.	Zwei parallele Gerade $\Rightarrow$ kein gemeinsamer Punkt.

2. Lineare Gleichungssysteme in drei Variablen

Definition:
Wenn drei lineare Gleichungen in drei Variablen gleichzeitig erfüllt werden sollen, spricht man von einem **linearen Gleichungssystem in drei Variablen**.

Man überlege, wie man — in Analogie zu obiger Definition — ein Gleichungssystem in 4 Variablen definieren könnte.

$$\left.\begin{array}{lrcl}(1) & 2x + 6y + z &=& 9\\ (2) & 3x - 2y + 2z &=& 3\\ (3) & -x + 3y - z &=& 1\end{array}\right\}$$

ist ein Beispiel für ein **lineares Gleichungssystem in drei Variablen.**

Sollen die Gleichungen **(1)**, **(2)** und **(3)** gleichzeitig gelten? Was wird man unter einer **Lösung** eines derartigen Gleichungssystems verstehen? Woraus wird die **Lösungsmenge** bestehen?

Das obige Gleichungssystem in drei Variablen wird für $x = 1$, $y = 1$ und $z = 1$ erfüllt. Die Lösungsmenge besteht somit aus dem „geordneten Tripel"[1] (1,1,1), sofern eine Grundmenge gegeben ist, die dieses Tripel als Element enthält. Dies ist z. B. für $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{R}$ usw. der Fall.

Es bleibt die Frage: Wie löst man ein Gleichungssystem in drei Variablen?

Das Eliminationsverfahren lässt sich auch hier anwenden.

Beispiel:

$$\begin{array}{lrcl}(1) & 2x + 6y + z &=& 9\\ (2) & 3x - 2y + 2z &=& 3\\ (3) & -x + 3y - z &=& 1\end{array}$$

ist mit Hilfe des Eliminationsverfahrens in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ zu lösen!

Lösung:

$$\begin{array}{lrcl}(1) & 2x + 6y + z &=& 9 \quad |\cdot(-2)\\ (2) & 3x - 2y + 2z &=& 3\\ (3) & -x + 3y - z &=& 1\end{array}$$

Gleichung **(1)** wird mit (– 2) multipliziert und zu Gleichung **(2)** addiert (ergibt Gleichung **(4)**). Weiters werden die Gleichungen **(1)** und **(3)** addiert (ergibt Gleichung **(5)**).

$$\begin{array}{lrcl}(4) & -x - 14y &=& -15\\ (5) & x + 9y &=& 10\\ \hline (6) & -5y &=& -5\\ & y &=& 1\end{array}$$

Gleichung **(4)** und Gleichung **(5)** werden addiert (ergibt Gleichung **(6)**).

Wir ermitteln x und z, indem wir der Reihe nach in Gleichung **(4)** und Gleichung **(1)** einsetzen:

(4) $-x-14\cdot 1=-15 \Leftrightarrow \mathbf{x = 1}$ **(1)** $2\cdot 1+6\cdot 1+z=9 \Leftrightarrow \mathbf{z=1}$

Probe:

(1) $2\cdot1+6\cdot1+1=9$ (w) **(2)** $3\cdot1-2\cdot1+2\cdot1=3$ (w) **(3)** $-1+3\cdot1-1=1$ (w) Somit gilt: $\mathbf{L=\{(1,\ 1,\ 1)\}}$

Beispiel:

$$\begin{array}{lrcl}(1) & 4x - 3y + z &=& 14\\ (2) & 5x - 4y - 2z &=& 10\\ (3) & 11x - 9y - 7z &=& 16\end{array}$$

ist in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ zu lösen!

Lösung:

$$\begin{array}{lrcl}(1) & 4x - 3y + z &=& 14 \quad |\cdot 2 \quad |\cdot 7\\ (2) & 5x - 4y - 2z &=& 10\\ (3) & 11x - 9y - 7z &=& 16\end{array}$$

Gleichung **(1)** wird mit 2 multipliziert und zu Gleichung **(2)** addiert (ergibt Gleichung **(4)**). Weiters wird das 7-fache von Gleichung **(1)** zu Gleichung **(3)** addiert (ergibt Gleichung **(5)**).

$$\begin{array}{lrcl}(4) & 13x - 10y &=& 38\\ (5) & 39x - 30y &=& 114\end{array}$$

Da das 3-fache der Gleichung **(4)** identisch mit der Gleichung **(5)** ist, erkennen wir: Es handelt sich um linear abhängige Gleichungen!

Das Gleichungssystem ist somit „unterbestimmt" und hat unendlich viele Lösungen. In der Lösungsmenge werden nur die linear unabhängigen Gleichungen angeführt.

Es gilt: $\mathbf{L=\{(x,\ y,\ z)\,|\,(4x-3y+z=14)\wedge(13x-10y=38)\}}$[2]

[1]) Ein **geordnetes Tripel** (a, b, c) ist eine Zusammenstellung von drei Elementen in einer bestimmten Reihenfolge — analog den geordneten Paaren.

[2]) Da keine Verwechslungen zu befürchten sind, lässt sich die Lösungsmenge auch wie folgt angeben: $L = \{(x, y, z)\,|\, 4x - 3y + z = 14 \wedge 13x - 10y = 38\}$.

Beispiel:

(1) $5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 8$
(2) $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 9$
(3) $-3x_1 + 5x_2 - 13x_3 = -10$ ist in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ zu lösen!

Statt der Variablen x, y, z usw. verwendet man in der Mathematik vielfach die Variablen x_1, x_2, x_3 usw.

Lösung:

(1) $5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 8 \mid \cdot(-2)$ } + (mit (2))
(2) $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 9 \mid \cdot 5$; $\mid \cdot 3$ } + (mit (3))
(3) $-3x_1 + 5x_2 - 13x_3 = -10$; $\mid \cdot 2$

(4) $-x_2 + 14x_3 = 29$ } +
(5) $x_2 - 14x_3 = 7$

(6) $0x_3 = 36$

Gleichung **(1)** wird mit (−2) multipliziert und zum 5-fachen von Gleichung **(2)** addiert (ergibt Gleichung **(4)**). Weiters wird das 3-fache von Gleichung **(2)** zum 2-fachen von Gleichung **(3)** addiert (ergibt Gleichung **(5)**).

Aus der Unlösbarkeit von Gleichung **(6)** folgt die Unlösbarkeit des Gleichungssystems: $\mathbf{L} = \{\,\}$.

Beispiel:

(1) $7x + 3y - 5z = -12$
(2) $-x - 2y + 4z = 5$
(3) $-4x + y - 3z = 1$ ist mittels CRAMERscher Regel in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ lösen!

Lösung:

In Analogie zu Gleichungssystemen in zwei Variablen gilt:
$x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$, $z = \frac{D_z}{D}$. Die Bedeutung der Symbole hat sich nicht geändert. Wie aber berechnet man eine dreizeilige Determinante? In der Außenspalte ist eine entsprechende Definition angegeben.

Auf unser Beispiel bezogen:

$$D = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 \\ -1 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 7 & 3 & -5 & 7 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & -1 & -2 \\ -4 & 1 & -3 & -4 & 1 \end{array}\right. = 7(-2)(-3) +$$
$$+ 3\cdot 4(-4) + (-5)(-1)\cdot 1 - (-5)(-2)(-4) - 7\cdot 4\cdot 1 -$$
$$- 3(-1)(-3) = 42 - 48 + 5 + 40 - 28 - 9 = \mathbf{2}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -12 & 3 & -5 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} -12 & 3 & -5 & -12 & 3 \\ 5 & -2 & 4 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right. =$$
$$= (-12)(-2)(-3) + 3\cdot 4\cdot 1 + (-5)\cdot 5\cdot 1 - (-5)(-2)\cdot 1 -$$
$$- (-12)\cdot 4\cdot 1 - 3\cdot 5(-3) = -72 + 12 - 25 - 10 + 48 + 45 = \mathbf{-2}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 7 & -12 & -5 \\ -1 & 5 & 4 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 7 & -12 & -5 & 7 & -12 \\ -1 & 5 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -3 & -4 & 1 \end{array}\right. = 7\cdot 5\cdot(-3) +$$
$$+ (-12)\cdot 4(-4) + (-5)(-1)\cdot 1 - (-5)\cdot 5(-4) - 7\cdot 4\cdot 1 -$$
$$- (-12)(-1)(-3) = -105 + 192 + 5 - 100 - 28 + 36 = \mathbf{0}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -12 \\ -1 & -2 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 7 & 3 & -12 & 7 & 3 \\ -1 & -2 & 5 & -1 & -2 \\ -4 & 1 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right. = 7(-2)\cdot 1 +$$
$$+ 3\cdot 5(-4) + (-12)(-1)\cdot 1 - (-12)(-2)(-4) - 7\cdot 5\cdot 1 -$$
$$- 3(-1)\cdot 1 = -14 - 60 + 12 + 96 - 35 + 3 = \mathbf{2}$$

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{2} = -1$ $\mathbf{x = -1}$ $y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{2} = 0$ $\mathbf{y = 0}$ $z = \frac{D_z}{D} = \frac{2}{2} = 1$ $\mathbf{z = 1}$

Probe! $L = \{(-1, 0, 1)\}$

Die CRAMERsche Regel ist nicht nur auf Gleichungssysteme in zwei Variablen beschränkt.

Dreizeilige Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 +$$
$$+ c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

Die obige Zusammenstellung kann man sich durch folgende Schreibweise leichter merken:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right.$$

Ist bei einem Gleichungssystem die Determinante D = 0, dann besitzt das Gleichungssystem keine oder keine eindeutige Lösung.

AUFGABEN

Die folgenden Gleichungssysteme sind rechnerisch in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu lösen:

916. a) $5x + 3y = 25$, $x + 3y = 17$ **b)** $3x - 2y = 0$, $5x - 4y = -2$ **c)** $4x - 3y = 2$, $3x + 2y = 27$

917. a) $12x + 13y = 38$, $4x - 3y = -2$ **b)** $25x - 10y = 20$, $2x + 13y = 43$ **c)** $5x + 6y = 63$, $15x + 7y = 101$

918. a) $3x + 5y = 30$, $8x + 5y = 55$ **b)** $13x - 15y = -19$, $3x - 5y = -9$ **c)** $17x - 5y = 7$, $5x - 6y = -7$

919. a) $13x + 2y = 30$, $5x + 4y = 18$ **b)** $138x + 19y = 295$, $153x - 27y = 279$ **c)** $314x + 79y = 1258$, $23x + 101y = 473$

Die folgenden Gleichungssysteme sind grafisch in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu lösen:

920. a) $6x - 5y - 1 = 0$, $2x + y = 3$ **b)** $4x + 3y = 11$, $2x - y = 3$ **c)** $6x = 1 + 5y$, $10y - 12x = -2$

921. a) $5y - 3x = 2$, $6x + 4y = 9$ **b)** $3y + 3 = 0$, $2x - 5 = 0$ **c)** $y = 4$, $6 - 5y = 0$

922. a) $5x + 10y - 3 = 0$, $2x + 4y = 12$ **b)** $10x - 3y = -3$, $4y - 1 - 5x = 0$ **c)** $4x + 8y = 5$, $9x + 18y = 2$

Die folgenden Gleichungssysteme sind mit Hilfe des Eliminationsverfahrens in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu lösen:

923. a) $3 - (2x - 3y) = 8y - (3x + 2y - 5)$, $5 - (3x + 5y) = 7y - (8x - 3y + 15)$
b) $5 - (3x + 2y) = 5x - 8y - 1$, $9 - (8x + 13y) = 24x + 3y - 87$

924. a) $5(3x + 2y) - 4(12x + 13y) = -192$, $3(2x - 2y) + 8(9x + 3y) = 210$
b) $2(3x + y) + 3(4x + y) = 28$, $3(2x + y) - 2(4x + y) = 0$

925. a) $(3x + 1)(3y - 1) - (9x + 1)y = -2$, $(5x + 2)(5y - 2) - (25y + 2)x = -8$
b) $(3x + 1)(2 - 3y) + (3x + 2)3y = 14$, $(2x + 3)(3y - 3) - (6y + 7)x = -4$

926. a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 19$, $\frac{x}{4} - \frac{y}{6} = -7$ **b)** $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 12$, $\frac{x}{5} + \frac{y}{7} = 7$ **c)** $\frac{5x}{3} - \frac{4y}{3} = -10$, $\frac{4x}{3} - \frac{5y}{3} = -20$

927. a) $\frac{4x}{15} - \frac{2y}{9} = 1$, $\frac{3x}{5} - \frac{y}{2} = -2$ **b)** $\frac{3x + 2y}{5} = \frac{12}{5}$, $\frac{2x + 7y}{3} = \frac{25}{3}$ **c)** $\frac{3x - y}{5} = x - \frac{3x + y + 3}{7}$, $\frac{x - 3}{6} = \frac{x}{5} - \frac{y}{15}$

928. a) $\frac{x + 2}{3} - \frac{3y - 5}{4} = \frac{y + 3}{6}$, $\frac{2y + 3}{3} - \frac{2x + 5}{7} = \frac{3x - 2}{5} - \frac{6}{7}$
b) $\frac{3x + 5}{2} + \frac{7y + 3}{4} = \frac{25x + 7y - 6}{4}$, $\frac{5x + 1}{6} + \frac{4y + 1}{3} = \frac{3x + 2y}{7} + 3$

929. a) $\frac{13x + 2}{27} + \frac{12y + 6}{11} = 5y - 4x - 1$, $\frac{24x + 2}{2} - \frac{15y + 2}{3} = \frac{15y - (x + 1)}{3}$
b) $\frac{5x + 2}{3} - \frac{y + 1}{2} = \frac{2x + 3y - 3}{6}$, $\frac{10x - 2}{15} + \frac{4y - 1}{2} = 2x + y + \frac{1}{30}$

930.[1] **a)** $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 2$, $\frac{6}{x} + \frac{12}{y} = 5$ **b)** $\frac{25}{x} + \frac{77}{y} = 16$, $\frac{5}{x} + \frac{28}{y} = 5$ **c)** $\frac{39}{x} - \frac{34}{y} = 1$, $\frac{65}{x} + \frac{153}{y} = 14$

[1]) Man führe für $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ neue Variable ein!

931. a) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{y+1} = \frac{5}{7}$
$\frac{5}{x+1} - \frac{7}{y+1} = \frac{2}{3}$

b) $\frac{7}{3x+2} + \frac{3}{2y+1} = \frac{12}{5}$
$\frac{5}{3x+2} + \frac{9}{2y+1} = 4$

932. a) $\frac{10}{4x+2y+5} + \frac{20}{6x+3y+5} = \frac{7}{12}$
$\frac{20}{4x+2y+5} + \frac{30}{6x+3y+5} = 1$

b) $\frac{17}{9x+2y+5} + \frac{1}{3x-2y+8} = \frac{21}{20}$
$\frac{13}{9x+2y+5} + \frac{5}{3x-2y+8} = \frac{33}{20}$

Die Aufgaben **933.** bis **936.** sind mit Hilfe des Einsetzungsverfahrens in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu lösen:

933. a) $ax + by = 2ab$
$x + y = a + b$

b) $x + y = a + b$
$x - 2y = b$

c) $5x - 3y = 19b$
$x - y = 3b$

934. a) $7a - x - y = 0$
$3y - 4x = 0$

b) $2x + 3y = 2a + 3b$
$5x - 13y = 5a - 13b$

c) $3bx + 2ay = 5ab$
$5x + 3y = 5a + 3b$

935. a) $2x + 3y = 5a - b$
$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = a$

b) $ax - by = a^2 + b^2$
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$

c) $\frac{2x}{ab} + \frac{3y}{a+b} = 5$
$\frac{5x}{b} - 3y = 2a - 3b$

936. a) $\frac{2x}{ab} + \frac{y}{b} = 2(2+a)$
$\frac{x}{b} + \frac{3y}{ab} = 2(a+3)$

b) $\frac{x+y}{a} - \frac{x-y}{b} = \frac{b^2 - a^2}{ab}$
$\frac{x+y}{b} + \frac{x-y}{a} = 2$

c) $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{y+b} = \frac{a+b}{ab}$
$\frac{a}{x-a} - \frac{b}{y+b} = \frac{a^2 - b^2}{ab}$

937. Die Summe aus einer Zahl und dem Doppelten einer anderen Zahl ist 27. Die Summe aus dem Doppelten der ersten Zahl und dem Dreifachen der zweiten Zahl beträgt 49. Wie lauten die Zahlen?

Anleitung: Man bezeichne eine Zahl mit x und die andere mit y.

938. Die Summe aus dem Doppelten einer Zahl und dem Dreifachen einer anderen Zahl ist 396. Die Summe aus dem Fünftel der ersten und der Hälfte der zweiten Zahl beträgt 56. Wie lauten die Zahlen?

939. Die Summe aus dem 4-fachen einer Zahl und der Hälfte einer anderen Zahl ist 14. Die Summe aus dem Drittel der ersten Zahl und dem 5-fachen der zweiten Zahl beträgt 21. Wie lauten die Zahlen?

940. Die Differenz aus dem 5-fachen einer Zahl und dem Doppelten einer anderen Zahl ist 100. Die Differenz aus dem Viertel der ersten und dem Fünfundzwanzigstel der zweiten Zahl beträgt 11. Welche Zahlen erfüllen diese Bedingungen?

941. Die Zehnerziffer einer dreistelligen Zahl ist 5. Vertauscht man die Hunderter- und die Einerziffer und addiert diese Zahl zur gegebenen, erhält man als Summe 908. Subtrahiert man die Zahl mit vertauschten Ziffern von der ursprünglichen Zahl, erhält man als Differenz 594. Wie lautet die ursprüngliche Zahl?

Anleitung:

	Hunderter	Zehner	Einer	Darstellung der Zahlen
gegebene Zahl	x	5	y	100x + 50 + y
Zahl mit vertauschten Ziffern	y	5	x	100y + 50 + x

942. Die Einerziffer einer dreistelligen Zahl ist 9. Vertauscht man die Hunderter- und die Zehnerziffer und addiert diese Zahl zur gegebenen, erhält man als Summe 1008. Subtrahiert man die ursprüngliche Zahl von der Zahl mit vertauschten Ziffern, erhält man als Differenz 270. Wie lautet die ursprüngliche Zahl?

943. Eine dreistellige Zahl hat die Ziffernsumme 9. Die Zehnerziffer ist um 2 kleiner als die Hunderterziffer. Werden Zehner- und Einerziffer vertauscht, erhält man eine um 18 kleinere Zahl. Wie lautet die ursprüngliche Zahl?

Anleitung:

	Hunderter	Zehner	Einer	Darstellung der Zahlen
gegebene Zahl	x	$x-2$	y	$100x + 10(x-2) + y$
Zahl mit vertauschten Ziffern	x	y	$x-2$	$100y + 10y + x - 2$

ARCHIMEDES von Syrakus (etwa 287—212 v. Chr.) war eines der größten Genies der Menschheit. Als Sohn des Hofastronomen stand er zeitlebens dem Königshaus von Syrakus sehr nahe. Um das kleine Reich in Sizilien gegen die römische Übermacht zu verteidigen, hatte er eine Reihe von großartigen mechanischen Maschinen erfunden, etwa den Flaschenzug. Durch seine Entdeckung der Hebelgesetze waren neue Katapultgeräte möglich. Die Legende, er hätte mit Hilfe von Spiegeln fremde Schiffe in Brand gesteckt, ist nicht nachweisbar, zeigt aber, wie hoch man das Genie ARCHIMEDES' immer geschätzt hat. Als er von König HIERON II. den Auftrag erhalten hatte, einen goldenen Kranz auf die Beimengung unedler Metalle hin zu untersuchen, fand er im Bade sitzend das Grundgesetz der Hydrostatik. Aus Freude über diese Entdeckung soll er „*Heureka*" (ich hab's) rufend nackt durch die Stadt Syrakus gelaufen sein. Sein größtes Interesse galt seinen mathematischen Untersuchungen, die, auf EUKLID aufbauend, wichtige neue Erkenntnisse brachten.

ARCHIMEDES hat als erster Volumen und Oberfläche einer Kugel berechnet. Er hat die Fläche gewisser Parabelsegmente berechnet und Schwerpunkte bestimmt. Für die Zahl π (das Verhältnis vom Umfang eines Kreises zu dessen Durchmesser) hat er die Näherung $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ gefunden. Die Methoden von ARCHIMEDES sind immer exakt. Den gleichen Grad an Exaktheit hat man später erst um 1700 wieder erreicht. Früher waren die Werke von ARCHIMEDES zwar teilweise bekannt und hoch verehrt, aber selten ganz verstanden.

ARCHIMEDES wurde von einem römischen Soldaten getötet, als er, wie damals üblich, im Sand Figuren zeichnete („*Zerstör' mir meine Kreise nicht!*"). Auf seinem Grabstein ließ man die Entdeckung, die er selbst für seine wichtigste gehalten hat, eingravieren: Das Volumen einer Kugel beträgt $\frac{2}{3}$ des Volumens des ihr umschriebenen Zylinders.

944. Eine dreiziffrige Zahl hat die Ziffernsumme 8. Der Wert der Hunderterstelle ist 5-mal so groß wie jener der Zehnerstelle. Vertauscht man die Einerstelle mit der Hunderterstelle, so ist die neue Zahl um 41 kleiner als die Hälfte der alten Zahl. Wie heißt die ursprügliche Zahl?

945. Welcher Bruch gibt den Wert $\frac{1}{4}$, wenn man Zähler und Nenner um 1 vermehrt, und den Wert $\frac{1}{3}$, wenn man Zähler und Nenner um 2 vermehrt?
Anleitung: Zähler und Nenner des Bruches sind als die Variablen zu betrachten.

946. Ein gastronomischer Betrieb kauft 300 Liter Weißwein sowie 400 Liter Rotwein und zahlt dafür 2 080,— Euro. Einen Monat später kauft er nochmals 300 Liter Weißwein und 500 Liter Rotwein und zahlt 2 390,— Euro. Wie viel kosten 1 Liter Weißwein und 1 Liter Rotwein?

947. Jemand tankt ein Gemisch aus Super- und Normalbenzin. Beim Kauf von 20 Liter Super- und 16 Liter Normalbenzin bezahlt er 49,60 Euro, beim Kauf von 15 Liter Super- und 14 Liter Normalbenzin 39,70 Euro. Wie hoch ist der Preis für 1 Liter Super- und 1 Liter Normalbenzin?

948. Die aus Gold und Silber gefertigte Krone des Königs HIERON von Syrakus wog 20 Pfund, unter Wasser getaucht 18,75 Pfund. Wie viel Gold und Silber enthält die Krone, wenn Gold im Wasser scheinbar $\frac{1}{19}$ und Silber $\frac{1}{10}$ von seinem Gewicht verliert?
Bemerkung: Diese Erscheinung wird Auftrieb genannt.

949. Ein Kleinunternehmen hat sein Betriebsgebäude für 200 000,— Euro und sein Warenlager auf 50 000,— Euro versichert und zahlt 1950,— Euro Prämie. Steigt der Wert des Gebäudes auf 300 000,— Euro, der des Lagers auf 128 000,— Euro so ist um 1346,— Euro mehr Prämie zu zahlen. Zu welchem ‰ -Satz wurde das Haus bzw. das Lager versichert?
Anleitung: Man bezeichne die ‰ -Sätze mit x bzw. y. Die Prämien errechnen sich wie folgt: Wert des Hauses$\cdot\frac{x}{1000}$ usw.

950. Die Produktionsauflage einer Maschinenfabrik lag im zweiten Halbjahr um 20 Maschinen höher als die Erzeugung im ersten Halbjahr. Sie wurde jedoch um ein Siebentel überschritten. Die so erreichte Produktion lag um $33\frac{1}{3}$% über der des ersten Halbjahres. Wie viel Stück betrug die Produktion des ersten Halbjahres und die Produktionsvorgabe des zweiten?
Anleitung: Die Produktion im ersten Halbjahr und die Produktionsvorgabe des zweiten Halbjahres sind als Variable anzusehen.

951. In zwei Fabriken (F_1, F_2) werden jeweils zwei Produkte (P_1, P_2) erzeugt. Die wöchentlichen Stückzahlen sind:

	P_1	P_2
F_1	100	25
F_2	60	80

Wie viele Arbeitsstunden sind für ein Stück jedes Produkts erforderlich, wenn wöchentlich 400 Arbeitsstunden in der Fabrik F_1 und 500 Arbeitsstunden in der Fabrik F_2 aufgewendet werden?

952. Zwei Produkte (P_1, P_2) werden in den Qualitätsklassen A und B erzeugt. Die wöchentlichen Stückzahlen sind:

	A	B
P_1	120	160
P_2	100	70

Wie vielen Kontrollen wird ein Stück der Qualitätsklasse A bzw. der Qualitätsklasse B unterzogen, wenn für das Produkt P_1 wöchentlich insgesamt 680 Kontrollen und für P_2 wöchentlich 440 Kontrollen durchgeführt werden?

953. Mischt man 200 l einer Spiritussorte mit 500 l einer anderen Sorte, erhält man Spiritus mit 72% Alkoholgehalt. Die Mischung von 500 l der ersten mit 200 l der zweiten Sorte hat 51 % Alkoholgehalt. Welche Konzentration weisen die beiden zum Mischen verwendeten Sorten auf?

Anleitung:

	Spritus in l	Alkoholgehalt in %	Menge des reinen Alkohols in l
1. Mischung	200	x	$200 \cdot \frac{x}{100}$
	500	y	$500 \cdot \frac{y}{100}$
	700	72	$700 \cdot \frac{72}{100}$
2. Mischung	500	x	$500 \cdot \frac{x}{100}$
	200	y	$200 \cdot \frac{y}{100}$
	700	51	$700 \cdot \frac{51}{100}$

954. Mischt man 3 kg einer Salzlösung mit 4 kg einer zweiten Salzlösung, erhält man 19%-ige Sole. Die Mischung von 4 kg der ersten mit 3 kg der zweiten Lösung hat 18% Salzgehalt. Wie viel Prozent Salzgehalt haben die beiden zum Mischen verwendeten Salzlösungen?

955. Ein Betrieb legt zwei gleich große Kapitalien an, wovon das erste jährlich zu 4 %, das andere zu 5 % verzinst wird. Nach einigen Jahren beträgt das erste Vermögen bei einfacher Verzinsung 144000,— Euro, das andere 155000,— Euro. Es ist zu berechnen **a)** wie hoch der angelegte Betrag war **b)** vor wie vielen Jahren die Kapitalien angelegt wurden!

Anleitung: Man wähle den angelegten Betrag und die Anlagedauer als Variable.

956. Zwei Arbeitskräfte eines Mittelbetriebes werden gekündigt, dem Rest der Belegschaft wird eine 10%-ige Lohnerhöhung gewährt. Der gesamte Tageslohn sinkt durch diese Maßnahme um 64,80 Euro. Wenn unter den gleichen Umständen der Lohnerhöhung nur eine Arbeitskraft gekündigt worden wäre, wären die täglichen Lohnkosten um 54,— Euro gestiegen. Wie viele Arbeitskräfte waren anfangs beschäftigt und wie hoch war ihr Tagesverdienst?

957. Ein Staubecken mit dem Volumen V verfügt über zwei Abflüsse. Lässt man aus dem vollen Staubecken 4 Tage lang Wasser durch den ersten Abfluss entweichen, so muss anschließend noch einen Tag lang der zweite Abfluss geöffnet werden, um das Staubecken vollständig zu entleeren. Bei der gleichzeitigen Öffnung beider Abflüsse kann das Staubecken in zwei Tagen entleert werden. Wie lange müsste Wasser durch jeden Abfluss allein abfließen, um das Becken zu entleeren?

Anleitung: Man bezeichne die von einem Abfluss allein benötigte Zeit mit x bzw. y.

	Täglicher Abfluss	Betriebsdauer in Tagen	Abfluss während der Betriebsdauer
A_1	$\frac{V}{x}$	4 bzw. 2	$\frac{4V}{x}$ bzw. $\frac{2V}{x}$
A_2	$\frac{V}{y}$	1 bzw. 2	$\frac{V}{y}$ bzw. $\frac{2V}{y}$

958. Zwei Personen A und B sollen zusammen eine bestimmte Arbeit ausführen. Wenn beide daran arbeiten, so sind sie in 2,4 Tagen fertig. Wenn A nur einen Tag und B nur zwei Tage arbeitet, dann werden $\frac{2}{3}$ der Arbeit fertig. Wie viele Tage braucht jeder allein für die Arbeit?

959. Ein Wasserbecken wird durch zwei Röhren gespeist. Ist die erste 45 Minuten geöffnet und die zweite 1 Stunde, so ist das Becken gefüllt. Ein anderes Mal wird die erste Röhre 1 Stunde geöffnet und die zweite 40 Minuten. Wie lange dauert es jeweils, das Wasserbecken mit einer Zuleitung alleine zu füllen?

Die folgenden Gleichungssysteme sind in $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu lösen:

960. a)
$$\begin{aligned} 3x - 2y - 3z &= 16 \\ x + y + z &= 7 \\ 4x - 3y + 2z &= 13 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 5x + 3y - 2z &= 5 \\ 9x - 7y + 8z &= 19 \\ 5x + 6y + 6z &= 35 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 4 \\ 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

961. **a)** $\begin{aligned} x-2y+3z&=10\\ 7x-5y+6z&=25\\ 3x-3y+4z&=15 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} 2x+7y-9z&=16\\ 11x+8y-10z&=45\\ 12x+3y-2z&=44 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} 7x+3y-2z&=45\\ 5x+7y-5z&=35\\ 8x+8y-3z&=70 \end{aligned}$

962. **a)** $\begin{aligned} 3x+7y-3z&=38\\ 9x+8y-2z&=77\\ 12x+7y+z&=29 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} 12x+3y-5z&=-2\\ 8x-4y+2z&=8\\ 7x+2y-z&=7 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} 12x+9y-7z&=28\\ 5x+4y-4z&=20\\ 7x+5y-3z&=18 \end{aligned}$

963. **a)** $\begin{aligned} 9x_1+7x_2-3x_3&=49\\ 8x_1-5x_2+4x_3&=12\\ 6x_1-3x_2+5x_3&=16 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} 9x+10y-z&=44\\ 8x+8y-3z&=28\\ 10x+9y-2z&=39 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} 4x_1+3x_2+5x_3&=25\\ 2x_1-5x_2+6x_3&=10\\ x_1+2x_2-4x_3&=-7 \end{aligned}$

964. **a)** $\begin{aligned} 5x-9y+4z&=0\\ 4x+y-7z&=-2\\ 2x+2y-3z&=1 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x-y&=-1\\ x+z&=6\\ y+z&=7 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} 5x-2y&=3\\ 3x+7z&=17\\ 8y-9z&=10 \end{aligned}$

965.[1] **a)** $\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=2\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}&=1\\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}&=0 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{6}{z}&=3\\ \frac{3}{x}-\frac{2}{y}+\frac{5}{z}&=\frac{7}{2}\\ \frac{5}{x}-\frac{3}{y}-\frac{4}{z}&=6 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{4}{y}-\frac{3}{z}&=2\\ \frac{3}{x}-\frac{14}{y}-\frac{18}{z}&=4\\ \frac{2}{x}-\frac{16}{y}-\frac{9}{z}&=7 \end{aligned}$

966. **a)** $\begin{aligned} \frac{2}{x}-\frac{7}{y}&=0\\ \frac{10}{x}+\frac{9}{z}&=8\\ \frac{4}{y}-\frac{3}{z}&=-\frac{3}{7} \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} \frac{xy}{4y-6x}&=-5\\ \frac{xz}{10x-5z}&=4\\ \frac{yz}{3y-2z}&=24 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} \frac{xy}{5x+2y}&=1\\ \frac{xz}{5x+z}&=2\\ \frac{yz}{5y+z}&=\frac{20}{7} \end{aligned}$

967. Man berechne den Wert nachstehender Determinanten:

a) $\begin{vmatrix} -5 & 4 & 7\\ -1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0\\ 1 & 4 & 5\\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} a-b & b & a+b\\ a & 0 & -a\\ a+b & -b & a-b \end{vmatrix}$

968. Wie groß ist x?

a) $\begin{vmatrix} x & -1 & 2\\ 0 & 8 & 4\\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=24$ **b)** $\begin{vmatrix} 5 & 4 & -3\\ 3 & x & 0\\ 2 & -7 & -5 \end{vmatrix}=15$ **c)** $\begin{vmatrix} 3{,}1 & -3{,}8 & -2{,}7\\ 4{,}5 & 4{,}7 & x\\ 7{,}2 & -8{,}3 & 0 \end{vmatrix}=1{,}8$

969. Eine dreistellige Zahl hat die Ziffernsumme 12. Vertauscht man die Einer- und Zehnerziffer dieser Zahl, erhält man eine um 63 kleinere Zahl. Vertauscht man in letzterer die Einer- und Hunderterziffer, ist die auf diese Weise gebildete Zahl um 39 kleiner als das 5-fache der ursprünglichen Zahl. Wie lautet die ursprüngliche Zahl?

Anleitung: Man wähle die Ziffern der ursprünglichen Zahl als Variable.

970. Jemand besitzt drei Sparbücher, deren Summe 157000,— Euro ausmacht. Im ersten ist um 1000,— Euro weniger als die Hälfte des Guthabens des zweiten Buches angelegt. Die 4-fache Einlage des dritten Sparbuches ist um 16000,— Euro kleiner als die 3-fache des zweiten Buches. Die Einlagen der drei Sparbücher sind zu berechnen.

---

[1]) Man führe für $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ und $\frac{1}{z}$ neue Variable ein!

971. In einer Fabrik werden Produkte mit einem Verkaufspreis von 20,— Euro, 30,— Euro und 50,— Euro erzeugt. Das Doppelte des Verkaufserlöses des ersten Produktes ist um 500,— Euro größer als der Erlös des dritten Produktes. Der 1,5-fache Verkaufserlös des ersten Produktes ist genau so groß wie der doppelte Verkaufserlös des zweiten Produktes. Es ist zu berechnen, wie viel Stück je Produkt verkauft wurden, wenn die gesamten Verkaufserlöse 7000,— Euro betragen!

972. Ein Unternehmen nimmt drei Möglichkeiten der Anlagenabschreibung in Anspruch: die Abschreibung für Gebäude, für Maschinen und Büroausstattung. In Summe belaufen sich diese auf 300000,— Euro. Die Abschreibung für Maschinen ist um 160000,— Euro und die Abschreibung für Büroausstattung um 20000,— Euro größer als die Abschreibung für Gebäude. Alle drei Positionen sind zu berechnen!

973. Der Fremdenverkehrsverein, in dem die Gemeinden A, B und C vertreten sind, veranstaltet ein Preisausschreiben, dessen Kosten im Verhältnis der Einwohnerzahlen der Gemeinden verteilt werden. Neben dem eigentlichen Aufwand von 100000,— Euro sind die Auszahlungen der Gewinne in der Höhe von 2000000,— Euro zu berücksichtigen. Die Gemeinde C investiert um 100000,— Euro mehr als die Gemeinde B und um 350000,— Euro mehr als die Gemeinde A.

a) Die Kostenverteilung ist zu berechnen.

b) Wie groß sind die Einwohnerzahlen der drei Gemeinden, wenn jede Gemeinde 100,— Euro pro Einwohner investiert?

974. In drei Fabriken (F_1, F_2, F_3) werden drei Erzeugnisse (E_1, E_2, E_3) hergestellt. Die wöchentlichen Stückzahlen sind:

	E_1	E_2	E_3
F_1	240	350	420
F_2	200	220	190
F_3	340	270	250

Wie viel kg Rohstoff sind für 1 Stück von jedem Erzeugnis erforderlich, wenn wöchentlich 3640 kg Rohstoff in der Fabrik F_1, 2410 kg in F_2 und 3670 kg in F_3 eingesetzt werden?

975. Von einem Motorenwerk werden drei Motorbestandteile (M_1, M_2, M_3) erzeugt, die zur Fabrikation weiter verwendet oder als Ersatzteile verkauft werden. Über die wöchentlich verkauften bzw. weiter verwendeten Motorbestandteile gibt die folgende Tabelle Auskunft:

	Zur Fabrikation benötigt		als Ersatzteile verkauft
	je Stück M_1	je Stück M_2	
M_1	0	0	50
M_2	1	0	60
M_3	3	2	70

Es ist zu berechnen, wie viele Stück von M_1, M_2 und M_3 wöchentlich produziert werden.

976. Eine Arbeit soll von den Arbeitern A, B und C fertiggestellt werden. A und B brauchen zusammen 36 Tage, A und C 45 Tage und B und C 60 Tage zur Fertigstellung.

a) Wie lange braucht jeder Arbeiter allein?

b) Wie lange brauchen sie zusammen?

Vermischte Aufgaben

977. Gegeben ist die Gleichung $3x - 2y = 4$. Es ist eine zweite Gleichung derart aufzustellen, dass das aus diesen beiden Gleichungen bestehende Gleichungssystem als Lösungsmenge **a)** die leere Menge **b)** eine Menge mit genau einem Element **c)** eine Menge mit unendlich vielen Elementen hat.

978. a) (1) $ax + by = c$ ist mittels Einsetzungsverfahren in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu lösen!
(2) $dx + ey = f$

b) Zähler und Nenner der Brüche (1) $\frac{ce - bf}{ae - bd}$ (2) $\frac{af - cd}{ae - bd}$ sind in Determinantenform anzugeben.

c) Die CRAMERsche Regel ist für Gleichungssysteme in zwei Variablen zu beweisen.

d) Die CRAMERsche Regel ist für Gleichungssysteme in drei Variablen zu beweisen.

979. Es sind alle Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ zu finden, die die Gleichung $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1$ erfüllen!

Anleitung: x und y können sowohl gerade als auch ungerade sein, d. h. es sind 4 prinzipielle Fälle zu unterscheiden.





980. *„Wie viele Stufen sind wohl bei dieser langen, nach unten führenden Rolltreppe zu sehen, wenn sie stillsteht?", fragt Frau Kalkulus ihren Mann. „Das werden wir gleich haben", ruft dieser, schwingt sich auf die fahrende Treppe und läuft hinunter. Nach fünfzig Schritten ist er unten angelangt. Daraufhin macht er kehrt und steigt die gleiche Treppe wieder hinauf, fünfmal so schnell wie beim Hinunterlaufen, d. h. er nimmt jetzt fünf Stufen in der gleichen Zeit, in der er vorher eine genommen hatte. Er muß 125 einzelne Stufen steigen, bis er wieder oben angekommen ist. „So", sagt er atemlos zu seiner Frau, „jetzt wird es dir nicht mehr schwerfallen, deine Frage selbst zu beantworten."*[1)]



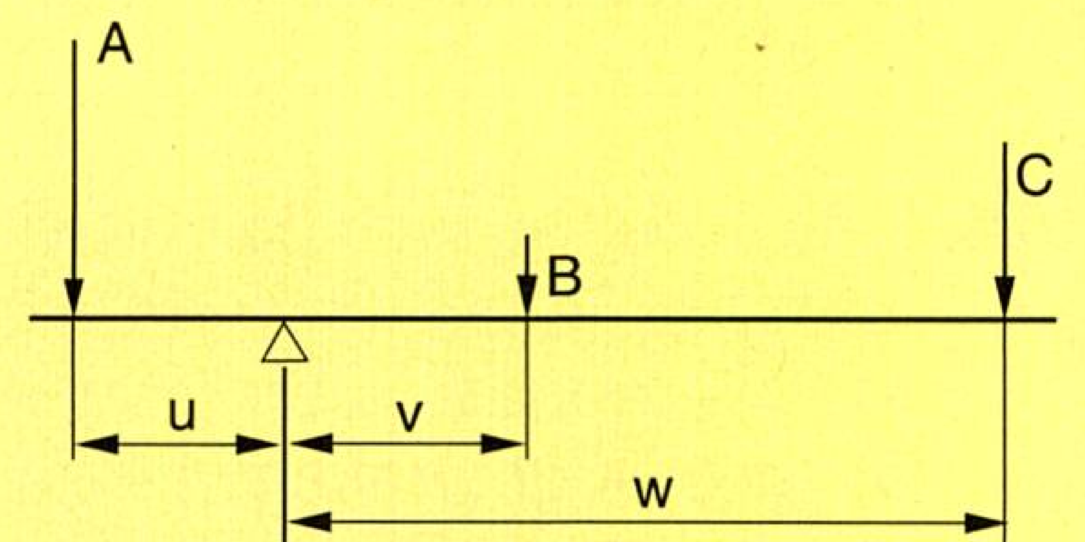
3. Problemstellungen der Technik

Maschineningenieurwesen/Mechatronik

981. Zwei ineinander greifende Zahnräder haben das Übersetzungsverhältnis 1 : 4. Wenn jedes Rad um 7 Zähne mehr hätte, wäre das Übersetzungsverhältnis 2 : 7. Wie viele Zähne hat jedes Rad?

982. An den Enden eines 1,5 m langen und im Gleichgewicht befindlichen Hebels wirken die Kräfte $F_1 = 315$ N und $F_2 = 1260$ N. Wie groß sind die Längen der Kraftarme?

983. An einem im Gleichgewicht befindlichen Hebel ist auf der linken Seite in der Entfernung u eine 6000 N schwere Last A befestigt. Am anderen Ende ist die Last C = 1650 N befestigt und in der Entfernung v (w > v) die Last B = 450 N. Der Hebel ist 1,17 m lang, die Kraftarme u und w verhalten sich wie 0,3 : 1. Länge der Kraftarme u, v und w?



Elektrotechnik/Elektronik

984. Wird in einem Stromkreis der Widerstand um 160 Ω vergrößert, so sinkt die Stromstärke um 0,5 A. Wird der Widerstand um 288 Ω verringert, steigt die Stromstärke um 3 A, ohne dass sich die Spannung verändert. Wie groß ist diese Spannung?

985. Wie groß sind die beiden parallel liegenden Widerstände R_1 und R_2, wenn R_1 um 60% größer ist als R_2 und der Leitwert der Parallelschaltung G = 0,5 S beträgt?
Anleitung: $G = \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, $[G] = 1\,S = 1\,\Omega^{-1}$, S ..... Siemens.

986. Zwei Widerstände R_1 und R_2 sind parallel geschaltet. Die Gesamtstromstärke bei U=230 V beträgt 1,68 A, wobei I_1 um 10% größer als I_2 ist. Wie groß sind die Widerstände?

1) Aus der Zeitschrift TREND, Ausgabe 2/1972.

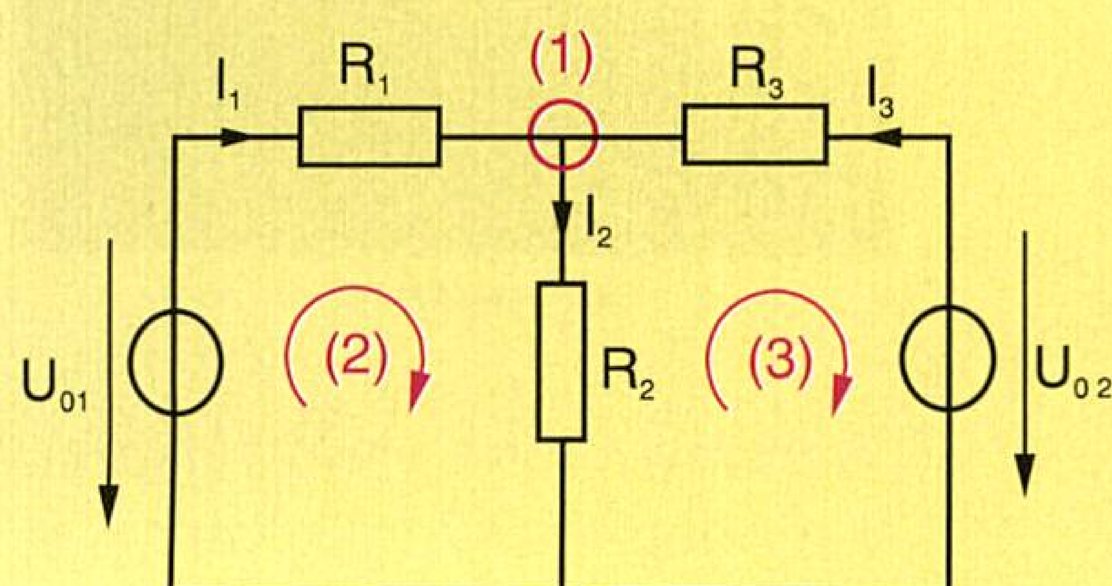
Bei den in den Aufgaben **987.** bis **991.** gegebenen Schaltungen sind die Ströme $I_0, I_1, I_2, \ldots, I_5$ die zu berechnenden Variablen. Die Gleichungen lassen sich aus den Schaltplänen mit Hilfe der Gesetze von OHM und KIRCHHOFF aufstellen. Den einzuschlagenden Lösungsweg kann man der Anleitung zu Aufgabe **987.** entnehmen.

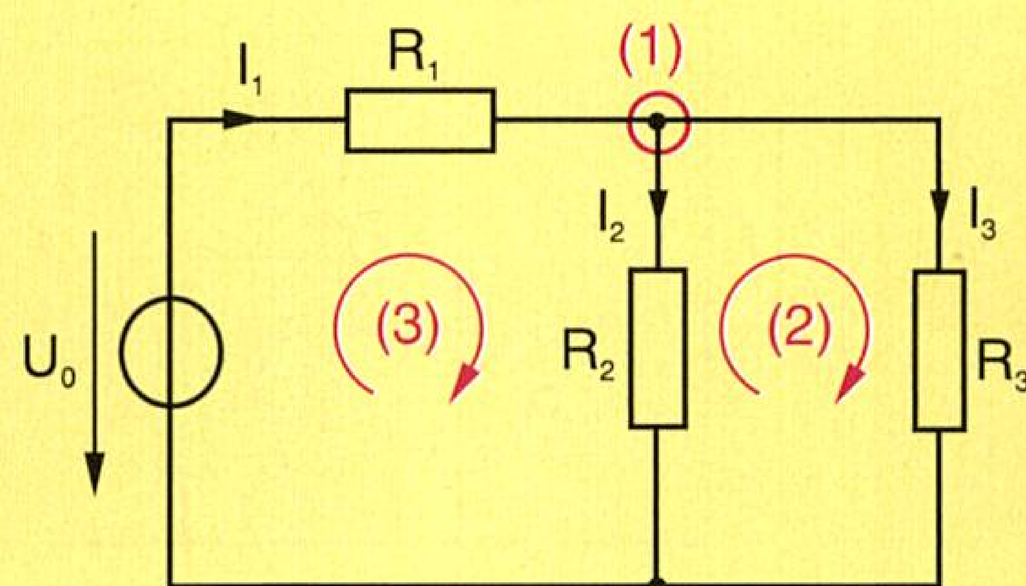
987. a) (1) $I_2 = I_1 + I_3$
(2) $U_{01} = I_1R_1 + I_2R_2$
(3) $U_{02} = I_3R_3 + I_2R_2$

$U_{01} = 24\,\text{V}$, $U_{02} = 12\,\text{V}$, $R_1 = 20\,\Omega$, $R_2 = 50\,\Omega$, $R_3 = 15\,\Omega$

b) (1) $I_1 = I_2 + I_3$
(2) $I_2R_2 = I_3R_3$
(3) $U_0 = I_1R_1 + I_2R_2$

$U_0 = 24\,\text{V}$, $R_1 = 160\,\Omega$, $R_2 = 400\,\Omega$, $R_3 = 100\,\Omega$





Anleitung zu a): Um das obige Gleichungssystem aufzustellen, ist folgendermaßen vorzugehen:

(a) Im Schaltbild werden sämtliche Leitungszüge, in denen Widerstände (‑▭‑) bzw. Spannungsquellen (‑⊖‑) auftreten, mit einem beliebig gerichteten Strompfeil versehen.

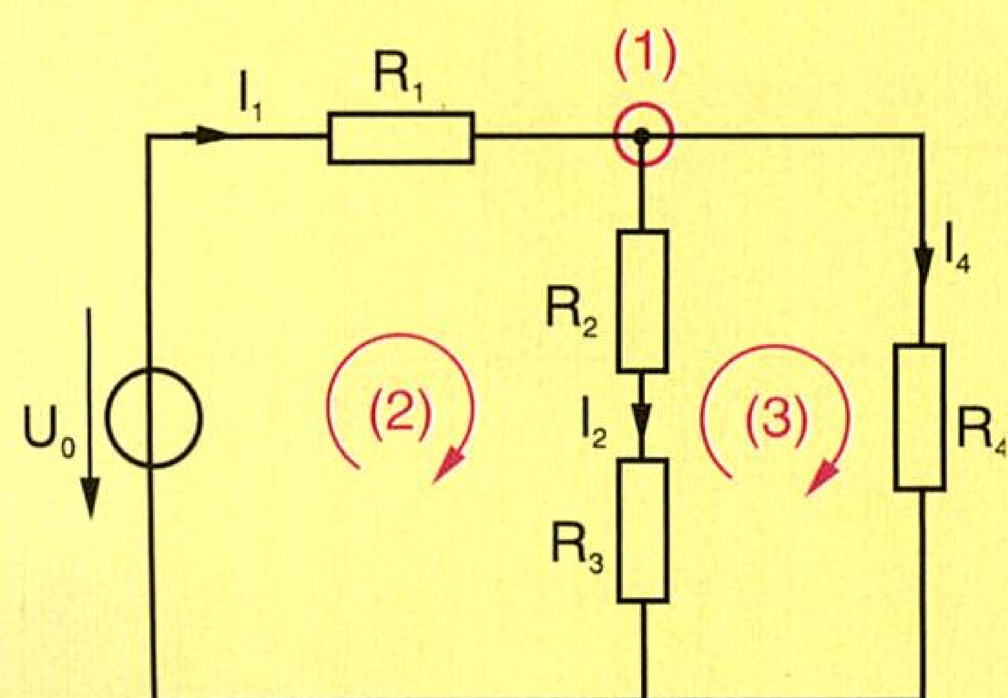
(b) Bezeichnung jener Verzweigungspunkte (**Knoten**) und geschlossener Stromkreise (**Maschen**), für die jeweils eine Gleichung aufgestelt wird (in der Figur rot gekennzeichnet: **(1)** bzw. **(2)** und **(3)**).

(c) Für einen Verzweigungspunkt gilt die **Knotenregel**: Die Summe der zufließenden Ströme ist gleich der Summe der abfließenden Ströme: **(1)** $I_1 + I_3 = I_2$

(d) Für einen geschlossenen Stromkreis gilt die **Maschenregel**: Die Quellspannung (falls vorhanden) ist gleich der Summe der Spannungsabfälle $I \cdot R$ an den einzelnen Widerständen, wobei die Masche im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Ströme und Spannungen in Zählrichtung erhalten dabei ein positives Vorzeichen, andernfalls ein negatives Vorzeichen:
(2) $U_{01} = I_1R_1 + I_2R_2$ (3) $U_{02} = I_2R_2 + I_3R_3$

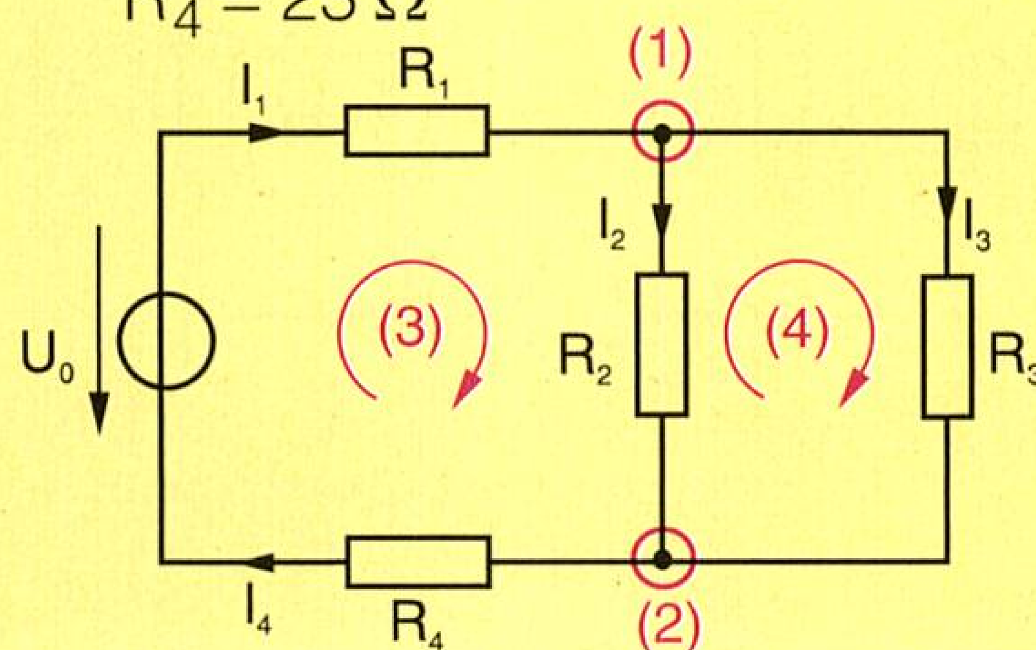
988. a) (1) $I_1 = I_2 + I_4$
(2) $U_0 = I_1R_1 + I_2R_2 + I_2R_3$
(3) $I_4R_4 = I_2R_2 + I_2R_3$

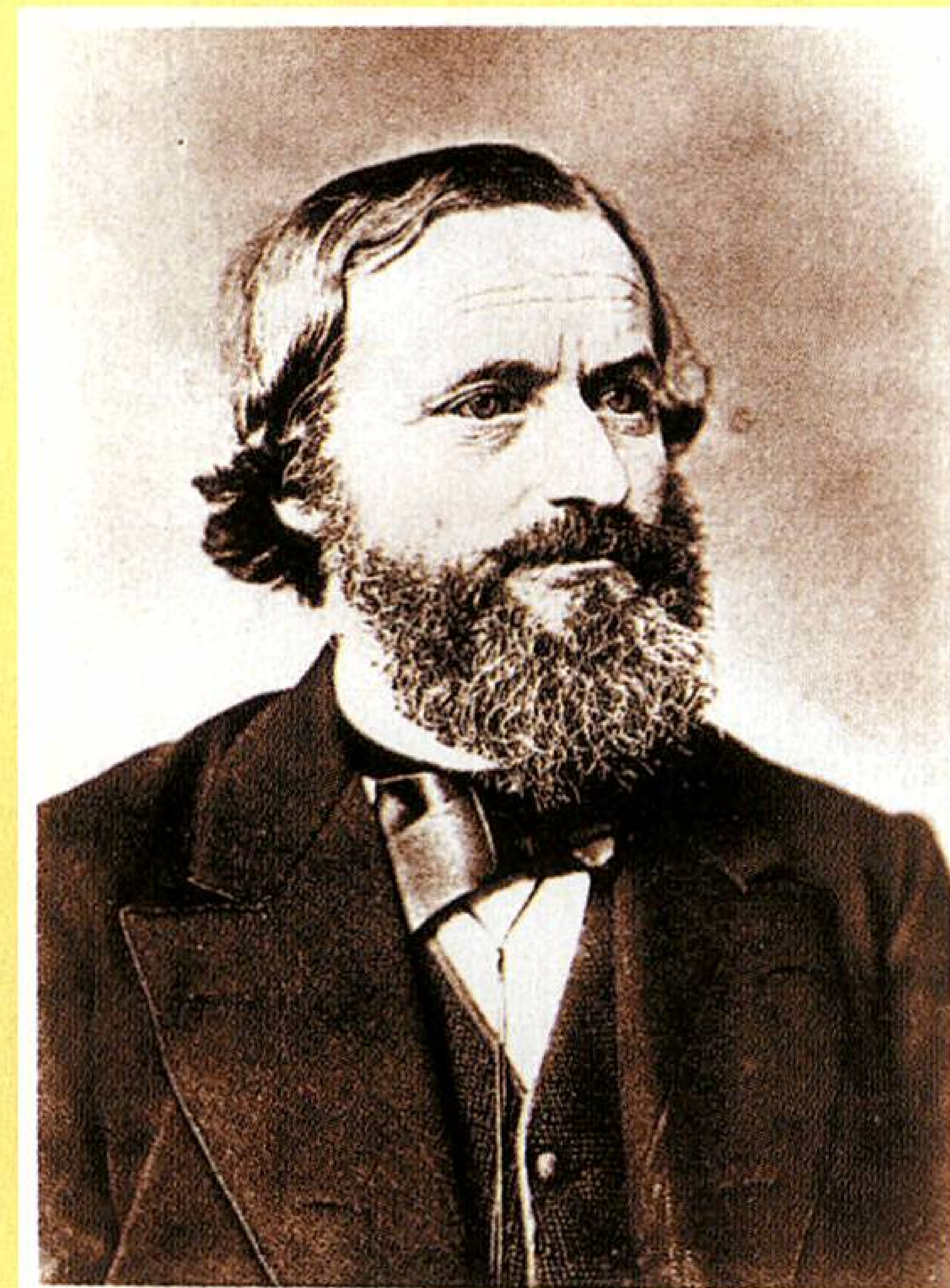
$U_0 = 24\,\text{V}$ $R_1 = 36{,}55\,\Omega$, $R_2 = 12\,\Omega$, $R_3 = 15\,\Omega$, $R_4 = 60\,\Omega$



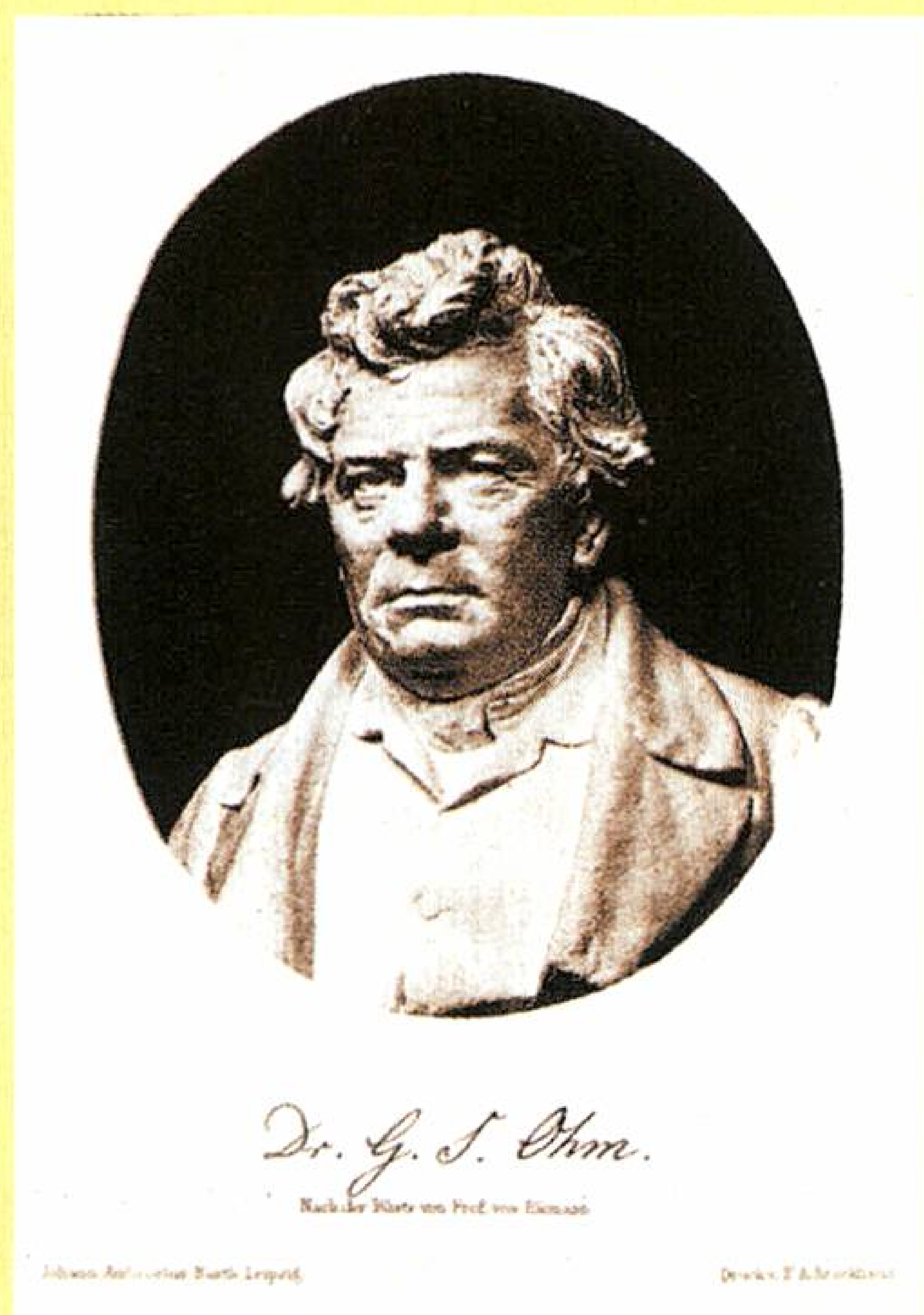
b) (1) $I_1 = I_2 + I_3$
(2) $I_4 = I_2 + I_3$
(3) $U_0 = I_1R_1 + I_2R_2 + I_4R_4$
(4) $I_2R_2 = I_3R_3$

$U_0 = 220\,\text{V}$, $R_1 = 25\,\Omega$, $R_2 = 200\,\Omega$, $R_3 = 50\,\Omega$, $R_4 = 23\,\Omega$





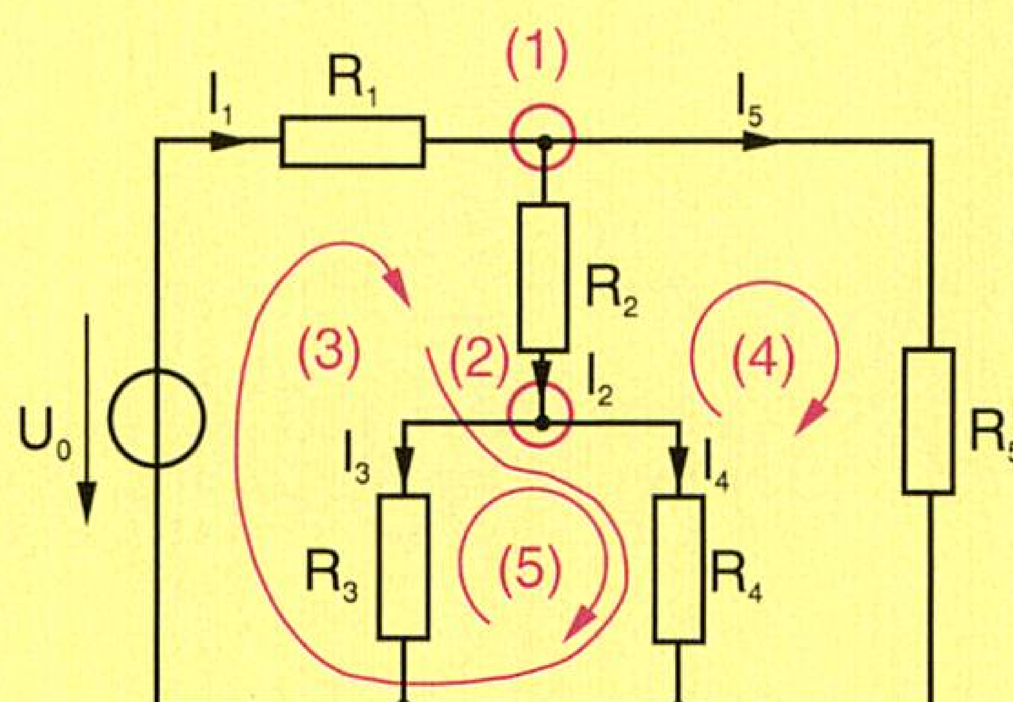
Als **Gustav Robert KIRCHHOFF** (1824–1887) im Jahr 1842 mit seinem Mathematikstudium an der Universität Königsberg begann, wurde er als Student wegen seiner Körpergröße vielfach nicht „für voll genommen". Doch bereits 1845 gelang es ihm, Aufsehen zu erregen: Die später als KIRCHHOFFsche Regeln bezeichneten Verzweigungs- und Maschenregeln wurden von ihm formuliert. KIRCHHOFFs bedeutendste Leistung war die um 1860 zusammen mit dem Chemiker **Robert BUNSEN** (1811–1899) entwickelte Spektralanalyse — ein Beispiel für eine fruchtbare Zusammenarbeit eines Physikers mit einem Chemiker. Grob gesagt beruht die Spektralanalyse darauf, dass jedes chemische Element, wenn es durch Erhitzen zur Lichtemission angeregt wird, Licht von ganz bestimmten Wellenlängen aussendet und anhand dieses sogenannten Linienspektrums erkannt werden kann. Die Spektralanalyse war enorm folgenreich für die Erforschung des ganz Kleinen (Atomphysik) und des ganz Großen (Astrophysik).



Georg Simon OHM (1789—1854) entstammte einer Handwerkerfamilie. Sein Vater unterrichtete ihn zunächst in Mathematik, Physik und Philosophie, 1805 nahm der junge OHM das Studium dieser Fächer an der Erlanger Universität auf. Schon bald darauf musste er dieses auf Grund finanzieller Schwierigkeiten abbrechen. Finanzielle Probleme, verbunden mit dem Kampf um Anerkennung, sind typisch für OHMs weiteren Lebensweg. Erst am Ende seines Lebens erhielt er die „Copley-Medaille", eine mit dem Nobelpreis vergleichbare Auszeichnung, und einen Lehrstuhl für Physik an der Universität München. *„Zwar bin ich gesund hier angekommen, aber mir ist noch so, wie einem, der die Silvesternacht hindurchgeschwärmt hat. Es ist mir alles so neu, und ich bin zu alt, um an Neuem Vergnügen zu finden"*, schrieb er nach seiner Übersiedlung an die Universität München. Die Elektrizität war OHMs wesentlichstes Forschungsgebiet: Das von ihm aufgestellte empirische Gesetz (OHMsches Gesetz) brachte Ordnung in eine verwirrende Vielfalt elektrischer Erscheinungen. Fast 40 Jahre nach seinem Tod wurde die Einheit des elektrischen Widerstands nach ihm benannt.

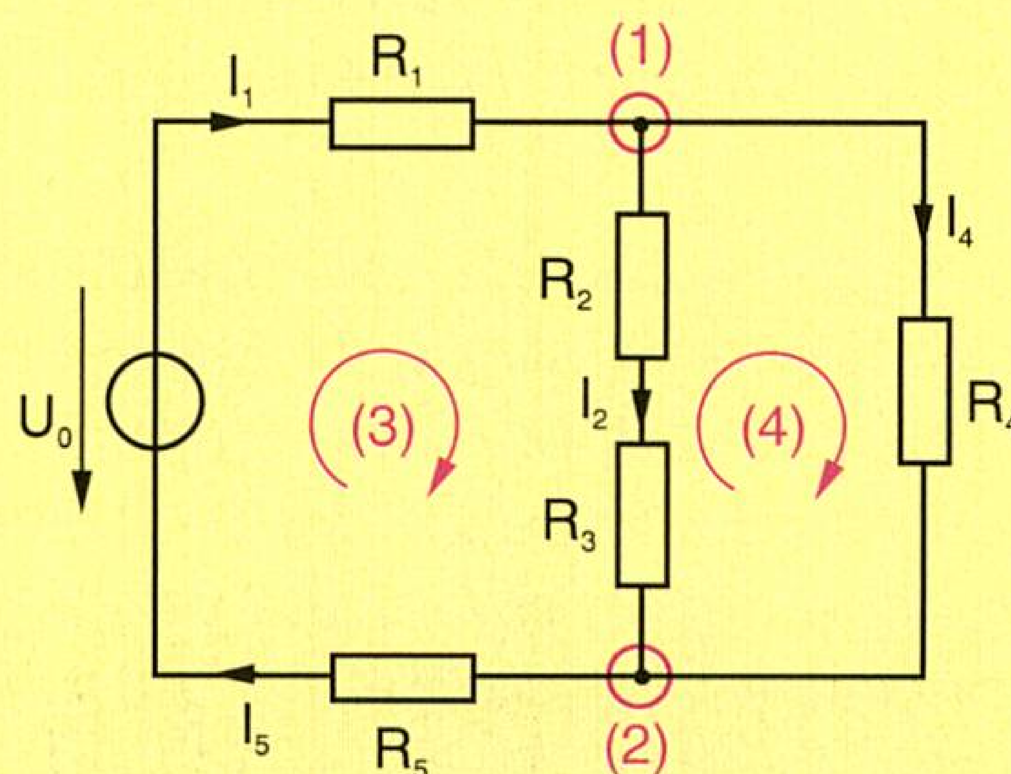
989. a)
(1) $I_1 = I_2 + I_5$
(2) $I_2 = I_3 + I_4$
(3) $U_0 = I_1R_1 + I_2R_2 + I_4R_4$
(4) $I_5R_5 = I_2R_2 + I_4R_4$
(5) $I_3R_3 = I_4R_4$

$U_0 = 106{,}6\,\text{V}$, $R_1 = 100\,\Omega$,
$R_2 = 200\,\Omega$, $R_3 = 60\,\Omega$,
$R_4 = 8\,\Omega$, $R_5 = 3200\,\Omega$

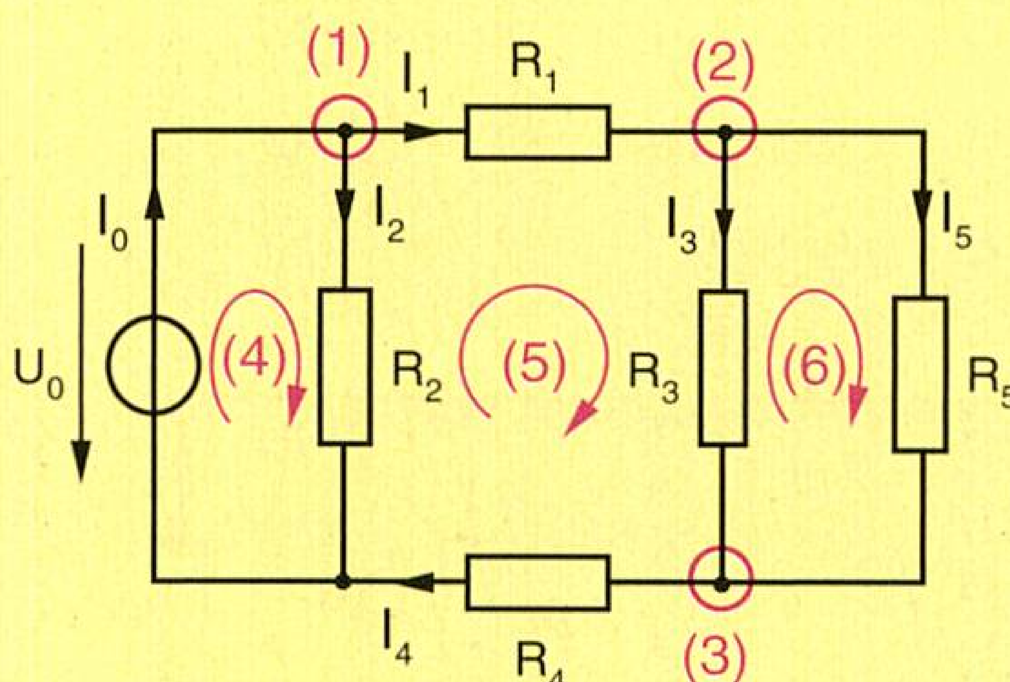


b)
(1) $I_1 = I_4 + I_2$
(2) $I_5 = I_4 + I_2$
(3) $U_0 = I_1R_1 + I_2R_2 + I_2R_3 + I_5R_5$
(4) $I_4R_4 = I_2R_2 + I_2R_3$

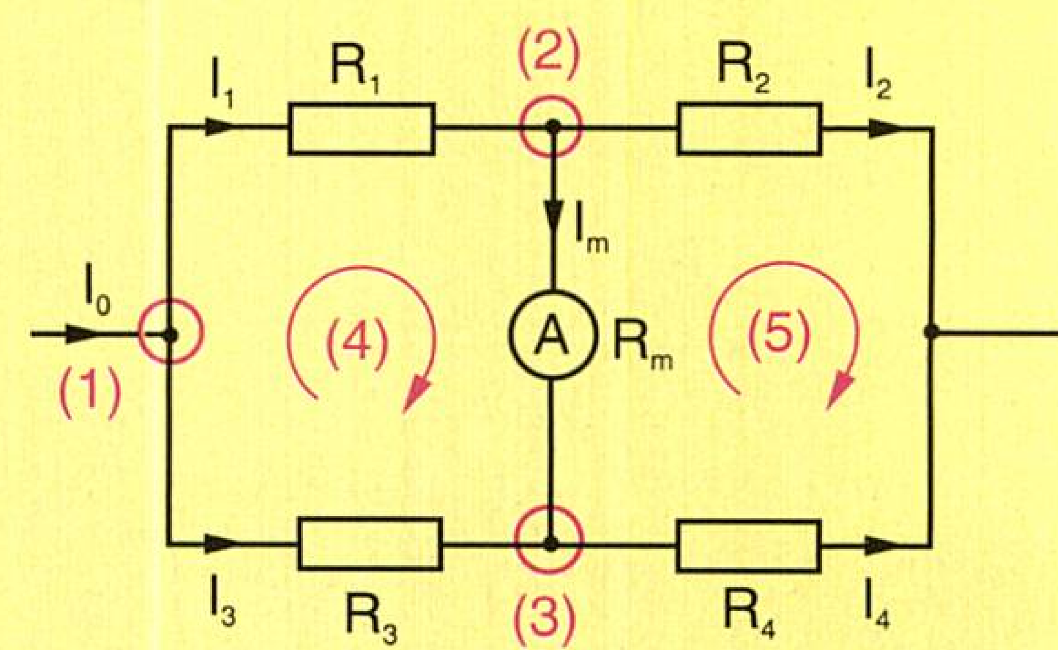
$U_0 = 24\,\text{V}$, $R_1 = 35\,\Omega$,
$R_2 = 45\,\Omega$, $R_3 = 15\,\Omega$,
$R_4 = 120\,\Omega$, $R_5 = 85\,\Omega$



990. a) $U_0 = 142\,\text{V}$, $R_1 = 120\,\Omega$,
$R_2 = 284\,\Omega$, $R_3 = 100\,\Omega$,
$R_4 = 20\,\Omega$, $R_5 = 60\,\Omega$



b) $I_0 = 21{,}12\,\text{A}$, $R_1 = 300\,\Omega$,
$R_2 = 100\,\Omega$, $R_3 = 400\,\Omega$,
$R_4 = 50\,\Omega$, $R_m = 200\,\Omega$

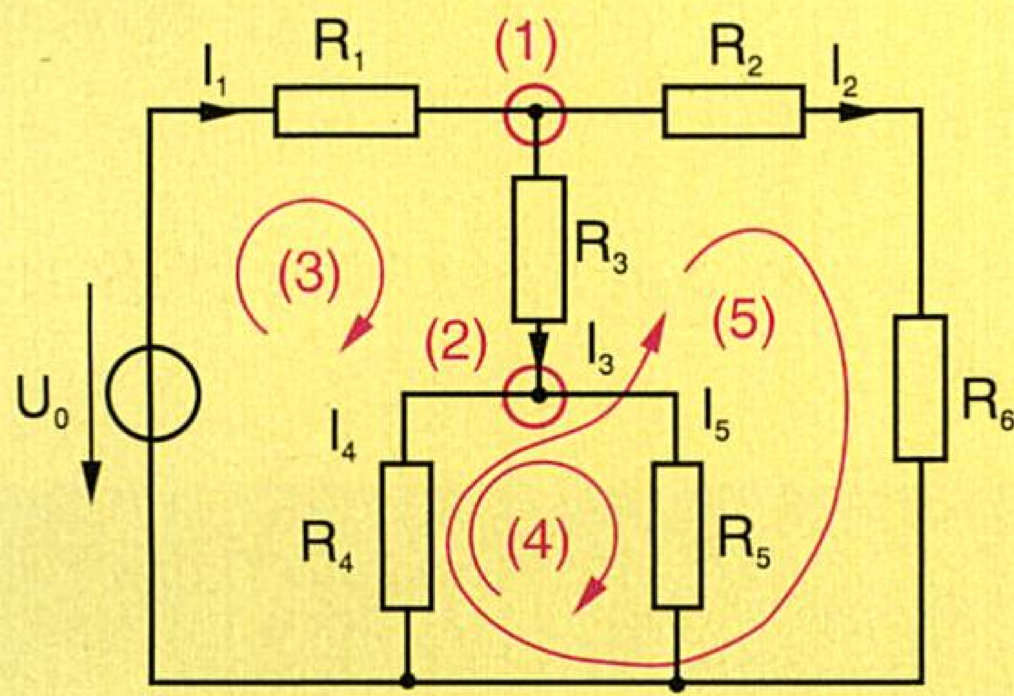


(WHEATSTONEsche Brückenschaltung)

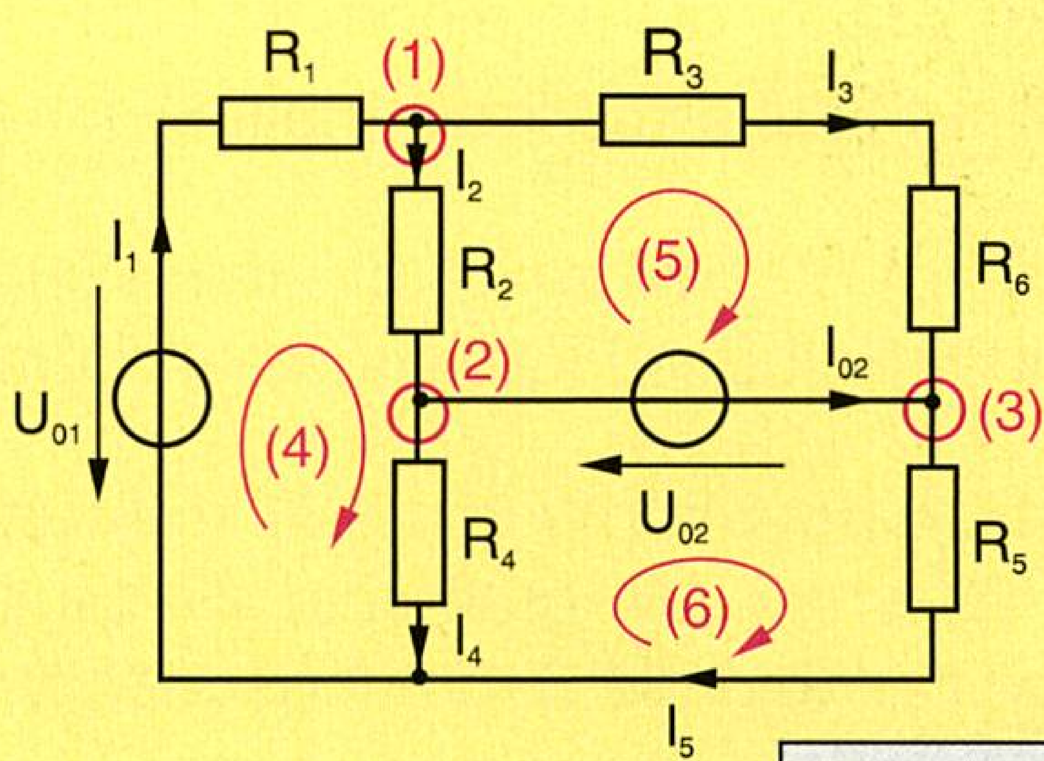

Sir Charles Wheatstone

Schon im Alter von 21 Jahren gründete der englische Physiker **Charles WHEATSTONE** (1802—1875) eine Fabrik für Saiteninstrumente. Seiner Erfindungsgabe verdanken wir eine Brückenschaltung, mit der man Leitungswiderstände genau messen kann. WHEATSTONE konstruierte ferner elektrische Uhren, Thermographen und war 1834 kurze Zeit Professor der Physik am Kings College. Vom Ertrag seiner Patente lebte er schließlich in London.

991. a) $U_0 = 12{,}91\,\text{kV}$, $R_1 = 500\,\Omega$,
$R_2 = 2800\,\Omega$, $R_3 = 1500\,\Omega$,
$R_4 = 600\,\Omega$, $R_5 = 1000\,\Omega$,
$R_6 = 3600\,\Omega$



b) $U_{01} = 24\,\text{V}$, $U_{02} = 4{,}2\,\text{V}$,
$R_1 = 50\,\Omega$, $R_2 = 260\,\Omega$,
$R_3 = 800\,\Omega$, $R_4 = 90\,\Omega$,
$R_5 = 100\,\Omega$, $R_6 = 600\,\Omega$,



Wirtschaftsingenieurwesen

992. Die Arbeiter A und B fertigen das gleiche Produkt. Arbeiter A kostet der Firma um 1,90 Euro pro Stunde mehr als B, ist aber bei der Herstellung um 3 Stunden schneller als B, so dass das von ihm produzierte Stück in der Fertigung um 6,10 Euro billiger wird als jenes von B. Könnte B sein Produkt um 1 Stunde schneller herstellen als bisher, wäre sein Produkt um 4,80 Euro billiger als jenes von A. Die Lohnkosten (Löhne und Nebenkosten) und die Produktionszeiten sind zu berechnen.

Chemieingenieurwesen

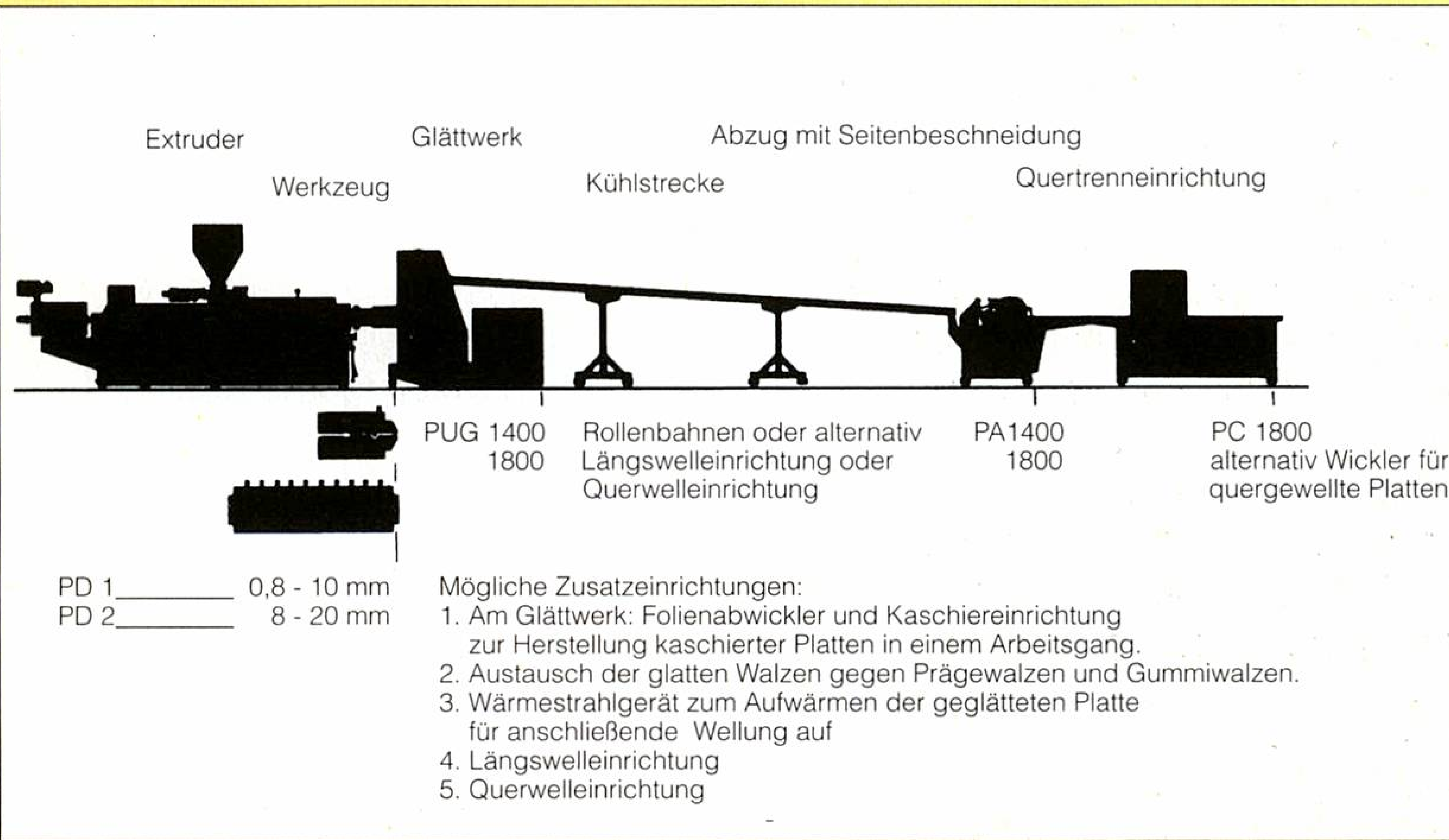
993. Welche Mengen 30%-iger und 75%-iger Salzsäure muss man mischen, um 300 ml 60%-iger Salzsäure zu bekommen?

994. Ein Autofahrer tankt 20 Liter einer Mischung aus Normalbenzin mit Oktanzahl 91 und Superbenzin mit Oktanzahl 98. Die Mischung hat die Oktanzahl 93. Wie viel Liter Normalbenzin und wie viel Liter Superbenzin hat er getankt?

Bemerkung: Die Oktanzahl gibt den Gehalt von Isooktan im Benzingemisch in Volumsprozenten an.

Vermischte Aufgaben

995. Ein österreichischer Industriekonzern produziert Kunststoff verarbeitende Maschinen. Der nebenstehend dargestellte Extruder wird an einen Kunden in Sri Lanka mit 20% Gewinn, die Zusatzeinrichtungen aber mit einem Verlust von 5% verkauft. Dennoch erzielt das Unternehmen im gegenständlichen Fall einen Gewinn von 25 000,— Euro. Wie hoch sind die jeweiligen Selbstkosten des Unternehmens für die gesamte Extrusionsanlage, für die dem Kunden ein Betrag von 180 000,— Euro fakturiert wurde?



Bemerkung: Im Exportgeschäft wird keine Mehrwertsteuer verrechnet!

996. In der Zugstange aus Handelsbaustahl herrscht eine Spannung $\sigma_z = 14\,000\,\text{N/cm}^2$. Wird die Stange durch ein Seil ersetzt, dessen Querschnitt doppelt so groß ist wie jenes der Stange, und mit einer um 2000 N größeren Kraft auf Zug beansprucht, so ergibt sich eine Spannung von $\sigma = 9000\,\text{N/cm}^2$. Wie groß sind Querschnitt A und Zugkraft F der Zugstange?

Anleitung: Normalspannungen σ (diese wirken senkrecht zur Querschnittsfläche — Zug, Druck, Biegung) sind die auf die Flächeneinheit entfallenden inneren Kräfte.

997. Zwei Kräfte F_1 und F_2 wirken in einer Geraden. Bei gleicher Wirkungsrichtung resultiert eine Kraft $F_3 = 434$ N, bei entgegen gesetzter Wirkungsrichtung eine Kraft $F_4 = 190$ N. Wie groß sind F_1 und F_2?

998. Die Summe der Kräfte, die an einem im Gleichgewicht befindlichen Hebel wirken, beträgt 1984 N. Der Drehpunkt teilt die Kraftarme im Verhältnis $1 : 4\frac{1}{6}$. Wie groß sind die Kräfte?

999. Ein Flugzeug fliegt mit 980 km/h mit dem Wind und mit 850 km/h gegen den Wind. Wie groß sind die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges und die Windgeschwindigkeit?

1000. Ein Schiff fährt mit der Strömung mit 26 km/h und gegen die Strömung mit 23 km/h. Wie groß sind die Eigengeschwindigkeit des Schiffes und die Strömungsgeschwindigkeit?

Bemerkung: Durch welche Überlegung kann man die Aufgabe lösen, ohne Gleichungen anzuschreiben?

1001. Wie viel kg Wasser von 40° C muss man mit wie viel kg Wasser von 24° C mischen, um 120 kg Wasser von 34° C zu erhalten?

1002. Zwei miteinander gemischte Alkohollösungen ergeben 120 kg einer 63 %-igen Lösung. Welche Prozentsätze hatten die beiden Alkohollösungen, wenn von der ersten 32 kg und von der zweiten 88 kg verwendet wurden und die zweite Lösung eine 2,5-mal höhere Konzentration aufweist als die erste?

1003. Aus zwei Messingsorten mit 70 % bzw. 10 % Kupferanteil wird eine Weißguss-Sorte (Kupferanteil 55 %) hergestellt. Wie viel kg von jeder Sorte sind nötig, um 100 kg der neuen Legierung zu erhalten?

1004. Werden 12 kg einer Bronzelegierung mit 18 kg einer zweiten Bronzelegierung zusammen geschmolzen, so entsteht eine Bronze mit 45,2 % Kupfergehalt. Werden 3,5 kg der ersten mit 5 kg der zweiten Sorte legiert, entsteht eine Bronze mit 45 % Kupfergehalt. Wie viel Prozent Kupfer enthält jede der beiden Ausgangssorten?

1005. Eine Rolle Kupferdraht von 2,5 mm^2 Querschnitt wird an 2 V Gleichspannung angeschlossen, und dabei fließt ein Strom von 2,94 A. Man berechne die Länge des Drahtes, wenn der spezifische Widerstand von Kupfer $\rho = 0{,}017\ \Omega\,mm^2/m$ beträgt.

1006. Eine Batterie besitzt eine Kapazität $Q = 75$ Ah.

a) Wie lange kann man Strom von 100 mA entnehmen?

b) Die Batterie soll in 15 h aufgeladen werden. Erforderliche Stromstärke?

Anleitung: Für die gespeicherte Ladung Q gilt: $Q = I \cdot t$.

1007. Ein Staubsauger, dessen Daten dem nebenstehenden Typenschild entnommen werden können, soll an eine Spannung $U = 380$ V angeschlossen werden. Erforderlicher Vorwiderstand?

Bemerkung: Ist es auf die Dauer sinnvoll, elektrische Energie in einem Vorwiderstand in Wärme umzusetzen?

Staubsauger T 140

Luftmenge	l/s	32
Vakuum	mbar	155
Behälterinhalt	l	14
Anschlußleistung	W(220 V, 1~50 Hz)	580

1008. Eine Herdplatte mit zwei Wicklungen, $R_1 = 40\ \Omega$ und $R_2 = 20\ \Omega$, wird an 230 V angeschlossen. Man berechne die Heizleistungen folgender 4 Leistungsstufen:

a) R_1 alleine **b)** R_2 alleine

c) R_1 und R_2 in Serie geschaltet **d)** R_1 und R_2 parallel geschaltet

VERHÄLTNISSE UND PROPORTIONEN

1. Was versteht man unter einem „Verhältnis" zweier Zahlen?

Der größte Straßenbahnbetrieb Österreichs befindet sich in Wien. Das Streckennetz der Wiener Straßenbahn umfasst eine Betriebslänge von 182,6 km. (Stand: 2003)

Der kleinste Straßenbahnbetrieb befindet sich in Gmunden mit einer Streckenlänge von 2,3 km.

Wenn wir den größten und den kleinsten Straßenbahnbetrieb Österreichs in Bezug auf die Streckenlänge miteinander vergleichen wollen, gibt es z. B. folgende Möglichkeit: Wir berechnen wie viel Mal so lange das Wiener Streckennetz wie das Gmundner Streckennetz ist.

Zu diesem Zweck bilden wir den Quotienten: $\frac{182{,}6\,\text{km}}{2{,}3\,\text{km}} = 79{,}4$

Das Wiener Streckennetz ist also rund 79-mal so lang wie das Gmundner. Man kann unsere Rechnung auch so ausdrücken: *„Die Länge der beiden Streckennetze verhalten sich ungefähr wie 79 zu 1."*

Um die Zahlenwerte zweier Größen zu vergleichen, kann es sinnvoll sein, ihr Verhältnis anzugeben, d. h. den Quotienten ihrer Zahlenwerte:

$a : b$ oder $\frac{a}{b}$

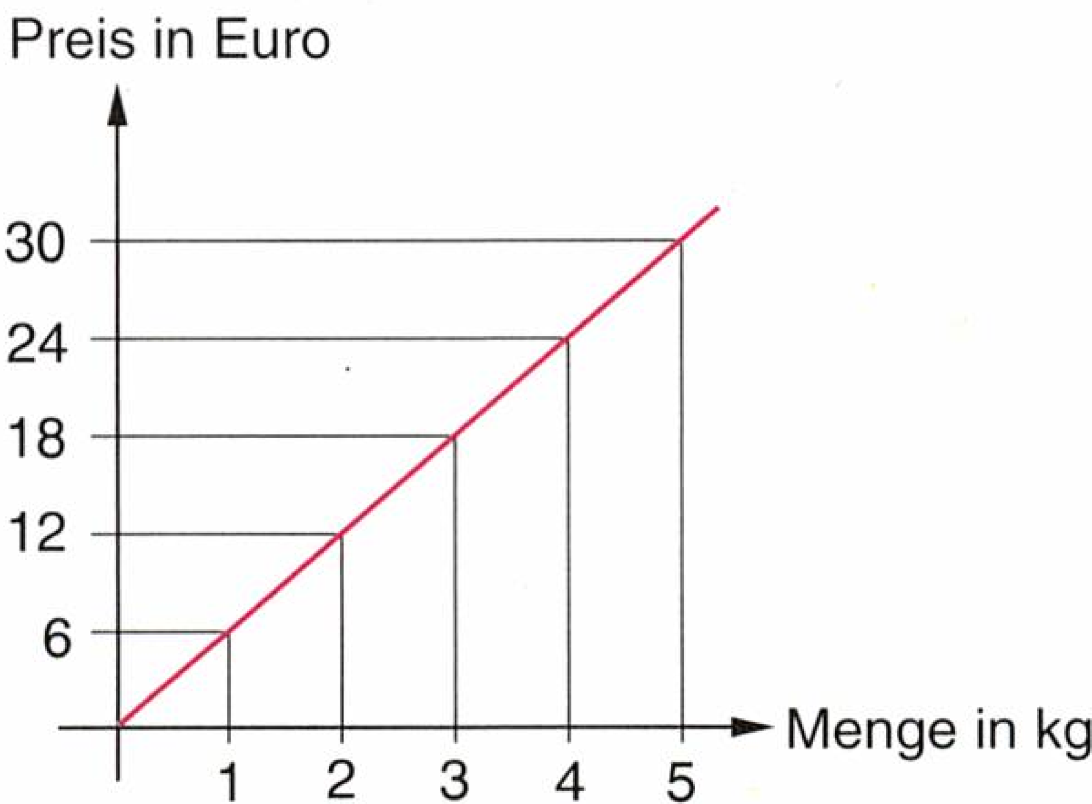
Die nachstehenden Fotos zeigen historische Fahrzeuge der Wiener bzw. Gmundner Straßenbahn:





2. Direkte und indirekte Proportionalität

1 kg Fisolen kostet ca.	6,— Euro
2 kg Fisolen kosten ca.	12,— Euro
5 kg Fisolen kosten ca.	30,— Euro
$\frac{1}{2}$ kg Fisolen kostet ca.	3,— Euro
⋮	⋮
n kg Fisolen kosten ca.	$n \cdot 6$,— Euro



Je größer die Warenmenge, desto größer der zu zahlende Preis.

Wir sagen: Preis und Warenmenge stehen in einem **„direkten Verhältnis"**.

Weitere Beispiele für direkte Verhältnisse:

Fahrstrecke und Fahrpreis (gleiches Transportmittel): Je länger (kürzer) die Fahrstrecke, desto höher (geringer) ist der Fahrpreis.

Drehzahl des Motors (bei einem bestimmten Gang) und Geschwindigkeit: Je größer (kleiner) die Drehzahl ist, desto höher (geringer) ist die Geschwindigkeit.

Die grafische Darstellung der direkten Proportionalität liefert Punkte, die auf dem Graphen der Funktion $x \mapsto kx$ liegen.

Definition:

Zwei veränderliche Größen x und y sind zueinander **direkt proportional**, wenn ihr Quotient $y : x$ einen festen positiven Wert k hat:

$y : x = k > 0$

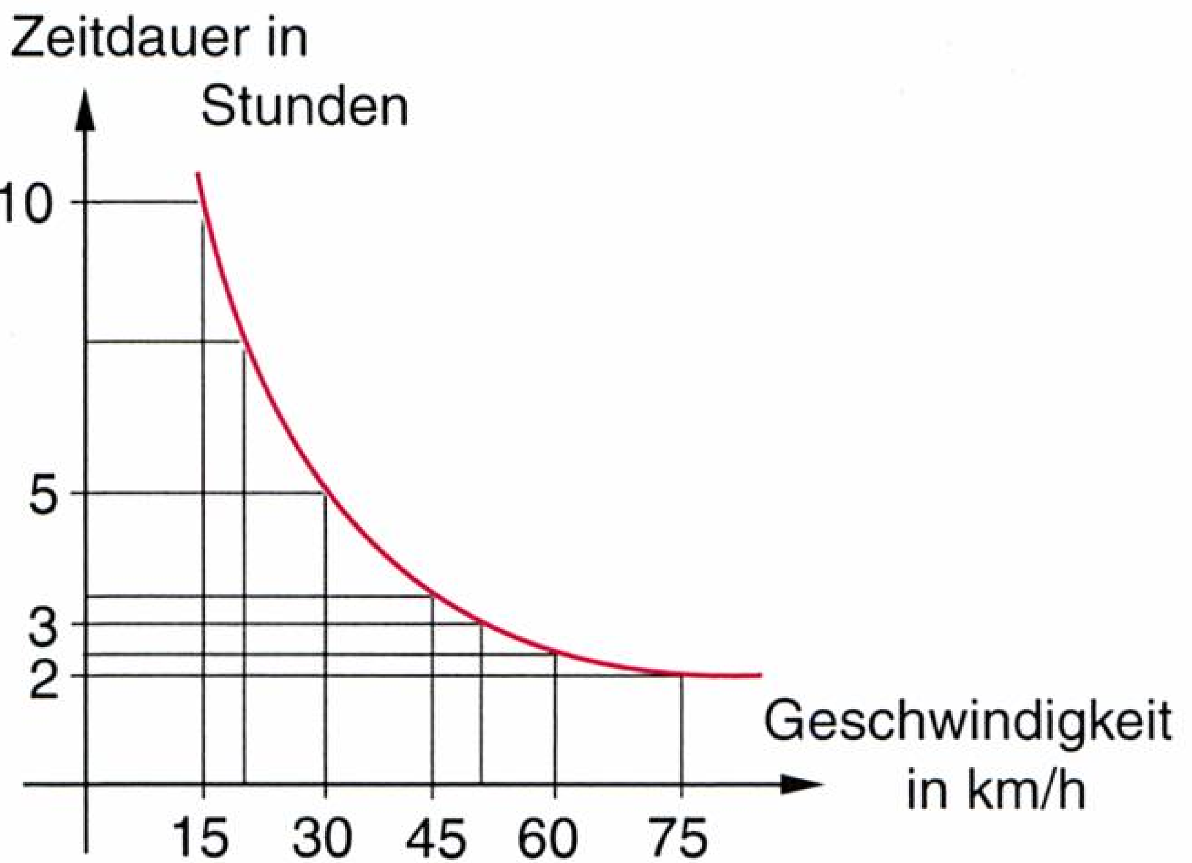
Bei einem direkten Verhältnis gilt also insbesondere:

„Je mehr ..., desto mehr ..." bzw. „Je weniger ..., desto weniger ..."

Genauer: dem 2-, 3-, 4-, ..., n-fachen der einen Größe entspricht das 2-, 3-, 4-, ..., n-fache der anderen Größe.

Um von Graz nach Klagenfurt zu fahren (ca. 150 km), braucht man bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von

15 km/h ..... ca. 10 Stunden
20 km/h ..... ca. 7,5 Stunden
50 km/h ..... ca. 3 Stunden
75 km/h ..... ca. 2 Stunden
: :
n km/h ..... ca. $\frac{150}{n}$ Stunden



Je größer die Geschwindigkeit, desto weniger Fahrzeit braucht man.

Definition:
Zwei veränderliche Größen x und y sind zueinander **indirekt proportional,** wenn ihr Produkt $x \cdot y$ einen festen positiven Wert k hat:

$x \cdot y = k > 0$

Bei einem indirekten Verhältnis gilt also insbesondere:

„Je mehr ..., desto weniger ..." bzw. „Je weniger ..., desto mehr ..."

Genauer: dem 2-, 3-, 4-, ..., n-fachen der einen Größe entspricht das $\frac{1}{2}$-, $\frac{1}{3}$-, $\frac{1}{4}$-,..., $\frac{1}{n}$-fachen der anderen Größe.

Wir sagen: Geschwindigkeit und Fahrzeit stehen in einem **„indirekten Verhältnis"**.

Weitere Beispiele für indirekte Verhältnisse:

Radumfang und Drehzahl: Je größer (kleiner) der Radumfang ist, desto weniger (mehr) Umdrehungen macht das Rad bei gleichbleibender Umfangsgeschwindigkeit.

Arbeitszeit und Anzahl der Mitarbeiter (bei gleichem Arbeitsausmaß): Je kürzer (länger) die Arbeitszeit ist, desto mehr (weniger) Mitarbeiter benötigt man.

Die grafische Darstellung der indirekten Proportionalität liefert Punkte, die auf dem Graphen der Funktion $x \mapsto \frac{k}{x}$ liegen ($x \neq 0$, $k > 0$).

3. Proportionen

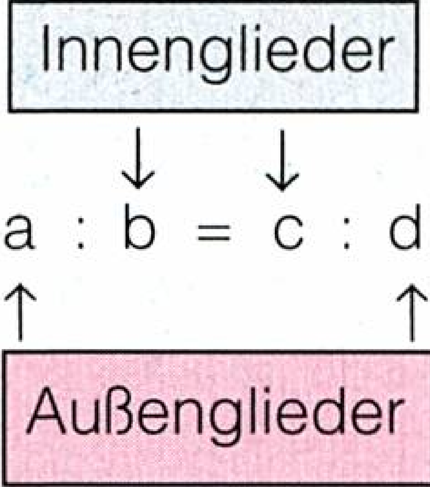
Definition:
Eine Gleichung der Form a : b = = c : d (gesprochen: a verhält sich zu b wie c zu d) heißt **Proportion**. (a, b, c, d ≠ 0)

Beispiele für Proportionen:

(1) $30:5=12:2$ (2) $2:5=3:7{,}5$ (3) $9:x=3:2$

Es handelt sich also um eine Gleichung, bei der zwei Quotienten gleichgesetzt werden. Während $2:5=3:7{,}5$ eine **richtige** Proportion ist, wäre z. B. $2:5=3:8$ eine **falsche** Proportion, weil $\frac{2}{5}=0{,}4 \neq \frac{3}{8}=0{,}375$.

Bezeichnungen bei einer Proportion:



Bei Proportion **(3)** tritt eine Variable auf. Je nachdem, welchen Zahlenwert man für x einsetzt, erhält man eine richtige oder eine falsche Proportion.

Für richtige Proportionen gelten unter anderem folgende Sätze:

Produktgleichung:

$ad = bc$

Das Produkt der Außenglieder ist gleich dem Produkt der Innenglieder. (Produktgleichung!)

Beweis:
Beide Seiten der Proportion $a:b=c:d \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ werden mit bd multipliziert: $ad=bc$

Beide Glieder einer Seite dürfen mit der gleichen Zahl e multipliziert oder durch die gleiche Zahl e dividiert werden ($e \neq 0$).

Beweis:
Die beiden Glieder einer Seite können als Bruch geschrieben werden. Diesen darf man „erweitern" bzw. „kürzen".

Beispiel:
Die Proportionen **a)** $9:x=3:2$ **b)** $\frac{5a}{3b}:5x=\frac{2c}{b}:\frac{c}{a}$ sind nach x aufzulösen!

Lösung:

a) Es gilt jene reelle Zahl x zu finden, für die die Gleichung in eine richtige Proportion übergeht:

$9:x=3:2$ | Kürzen!
$3:x=1:2$ | Produktgleichung!
$2\cdot 3=x\cdot 1$
$x=6$

Probe:
$T_L(6)=9:6=1{,}5$
$T_R(6)=3:2=1{,}5$
$T_L=T_R$ (w)

b) Wir rechnen mit a, b und c wie mit Zahlen und betrachten x als Variable:

$\frac{5a}{3b}:5x=\frac{2c}{b}:\frac{c}{a}$ | Kürzen!
$\frac{1}{3}:x=2:1$ | Auflösen!
$\frac{1}{3}=2x$ | :2
$x=\frac{1}{6}$

Probe:
$T_L\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{5a}{3b}:\frac{5}{6}=\frac{\cancel{5}a}{\cancel{3}b}\cdot\frac{\cancel{6}^2}{\cancel{5}}=\frac{2a}{b}$
$T_R\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{2c}{b}:\frac{c}{a}=\frac{2\cancel{c}}{b}\cdot\frac{a}{\cancel{c}}=\frac{2a}{b}$
$T_L=T_R$ (w)

Kürzen heißt:
Innen- und Außenglied einer Proportion werden durch die gleiche Zahl $e\neq 0$ ($e\in\mathbb{R}$) dividiert[1].

Werden mehr als zwei Verhältnisse miteinander verbunden, so spricht man von einer **fortlaufenden Proportion**.

Aus $a:b=x:y$
$b:c=y:z$ folgt $a:b:c=x:y:z$

Um mehrere Proportionen in eine fortlaufende zu verwandeln, müssen die entsprechenden Glieder — durch geeignetes Erweitern — so umgeformt werden, dass sie überein stimmen.

Beispiel:
Aus den Proportionen $a:b=4:9$ und $b:c=3:1$ ist eine fortlaufende Proportion zu bilden!

Lösung:

$a:b=4:9$	$a:b=4:9$	
$b:c=3:1$	$b:c=9:3$	$a:b:c=4:9:3$

Beispiel:
Gegeben sind die fortlaufende Proportion $x:y:z=1:2:3$ und die Gleichung $2x+y+3z=39$. Es ist zu berechnen, welche Zahlen für die Variablen x, y und z einzusetzen sind, damit die Proportion und die Gleichung erfüllt werden.

Lösung:
Aus der Beziehung $x:y:z=1:2:3$ folgt, dass die Variablen x, y, z in dem Verhältnis $1:2:3$ stehen. Von irgendeiner Grundeinheit, die wir als **Proportionalitätsfaktor k** bezeichnen wollen, entfallen auf x eine, auf y zwei und auf z drei solcher Einheiten: $x=k$, $y=2k$, $z=3k$

Die Gleichung $2x+y+3z=39$ geht über in:

$2k+2k+9k=39 \Leftrightarrow 13k=39 \Leftrightarrow k=3$

Für die Variablen x, y, z erhalten wir somit: $x=3$ $y=6$ $z=9$ **Probe!**

---

1) Die Richtigkeit dieser Behauptung kann man sich anhand der Produktgleichung leicht überlegen. Was wird man übrigens unter dem „Erweitern einer Proportion" verstehen?

4. Anwendung von Proportionen bei Schlussrechnungen

Für das Aufstellen einer Proportion gilt:
„Schaft zu Spitze ist Schaft zu Spitze."

Beispiel:
Eine Maschine verbraucht in 5 Stunden 8 Kilowattstunden (kWh) elektrische Energie. Wie viel kWh verbraucht die Maschine in 15 Stunden?

Lösung:
Zunächst überlegen wir, ob es sich um ein direktes oder indirektes Verhältnis handelt: Je mehr Stunden die Maschine eingeschaltet ist, desto mehr Energie braucht sie ⇒ **direktes Verhältnis!**
Genauer: In der k-fachen Zeit verbraucht die Maschine die k-fache Energie.

↑ 5 h ..... 8 kWh ↑
15 h ..... x kWh

$x : 8 = 15 : 5$
$x : 8 = 3 : 1$
$\mathbf{x = 24}$

Die **gleich gerichteten Pfeile** kennzeichnen das **direkte Verhältnis.**

Argumentation: In 15 Stunden verbraucht die Maschine sicher mehr kWh. 8 muss mit einem Proportionalitätsfaktor multipliziert werden, der größer als 1 ist:
$x = 8 \cdot \underbrace{\frac{15}{5}}_{>1} = 24$

Die Maschine verbraucht in 15 Stunden 24 kWh.



Beispiel:
4 Maurer verputzen eine Hausfassade und benötigen hierfür 5 Tage. Wie lange bräuchten — wenn gleiche Arbeitsleistung vorausgesetzt wird — 10 Mann, um den Auftrag auszuführen?

Lösung:
Je mehr Maurer arbeiten, desto weniger Zeit wird benötigt ⇒ **indirektes Verhältnis!**

Die doppelte Anzahl von Arbeitern braucht die **halbe** Zeit usw. Warum ist die Aufgabe bei einer immer größer werdenden Anzahl an Arbeitern sinnlos? Wie lange brauchen 5000 Maurer, um die Hausfassade zu verputzen?

↓ 4 Maurer ..... 5 Tage ↑
10 Maurer ..... x Tage

Die **entgegen gesetzten Pfeile** kennzeichnen das **indirekte Verhältnis.**

$x : 5 = 4 : 10$
⋮
$x = 2$

Argumentation: Falls die Anzahl der Maurer zunimmt, benötigen diese sicher weniger Zeit für dieselbe Arbeit. 5 muss mit einem Proportionalitätsfaktor multipliziert werden, der kleiner als 1 ist:
$x = 5 \cdot \underbrace{\frac{4}{10}}_{<1} = 2$

10 Maurer benötigen 2 Tage.

5. Arithmetisches und geometrisches Mittel

Der lange Hans mit seinen b = 187 cm kann auf seine kleine Schwester Grete, die nur a = 151 cm misst, so richtig herunter schauen. Dies gelingt seinem Bruder Karl, der mit $\overline{x} = 169$ cm genau die Mitte hält, nicht so gut: Er ist um 18 cm größer als Grete, aber um gleiche 18 cm kleiner als Hans.

Ein anderes Beispiel: Ein Restaurant bietet drei Arten von Menüs an. Menü I kostet a = 7 Euro und für Menü II wird b = 25 Euro verrechnet. Menü III liegt im Preis gerade in der Mitte, nämlich bei $\overline{x} = 16$ Euro. In der Sprache der Mathematik ausgedrückt: $b - \overline{x} = \overline{x} - a$

Wie berechnet man nun das sogenannte **arithmetische Mittel** $\overline{x}$?
In der Außenspalte sind zwei Formeln angegeben ...

Berechnet man $\overline{x}$ aus $b - \overline{x} = \overline{x} - a$, so erhält man das **arithmetische Mittel**:

(1) $$\overline{x} = \frac{a+b}{2}$$

(2) $$\overline{x} = a + \frac{b-a}{2}$$

Beispiel:

Das arithmetische Mittel $\overline{x}$ der beiden Zahlen **a)** a = 5 und b = 17 **b)** a = 1726 und b = 1748 ist zu berechnen!

Lösung:

a) $\overline{x} = \frac{a+b}{2} = \frac{5+17}{2} = 11$ (1)

b) $\overline{x} = \frac{1726+1748}{2} = \frac{3474}{2} = 1737$ (1)

Günstiger: $b - a = 22$, $\overline{x} = 1726 + 11 = 1737$ (2)

Nun vergleichen wir statt Hans, Karl und Grete eine a = 0,5 mm große Milbe mit einer Maus ($\overline{x}_g = 5$ cm) und einem Elefanten (b = 5 m). Die Maus misst 100 Milben und der Elefant 100 Mäuse. Die Maus bedeutet also auch eine Art Mittel zwischen Milbe und Elefant. Mathematisch formuliert: $a : \overline{x}_g = \overline{x}_g : b$. Allerdings handelt es sich nicht um ein arithmetisches Mittel, wie es bei Karl der Fall war, sondern um das sogenannte **geometrische Mittel** $\overline{x}_g$.

Das arithmetische Mittel von 5 m und 0,5 mm wäre 2,5 m (genauer: 2,500025 m), und das entspräche **auch** einem Elefanten (wenn auch einem kleinen), bestenfalls einer Kuh, keinesfalls aber einer Maus!

Wir erkennen: Sehr unterschiedliche Größen vergleicht man am besten mit dem geometrischen Mittel!

Die Abmessungen im Atomkern (10^{-14} m) und die Entfernungen in der Astronomie (10^{24} m) sind der menschlichen Vorstellungskraft unzugänglich. Die Längen, in denen sich der Mensch bewegt, liegen in der Größenordnung von 10^5 m. Das entspricht dem geometrischen Mittel zwischen den beiden Extremen 10^{-14} und 10^{24}!

Berechnet man $\overline{x}_g$ aus $a : \overline{x}_g = \overline{x}_g : b$, so erhält man das **geometrische Mittel**:

$$\overline{x}_g = \sqrt{ab}$$

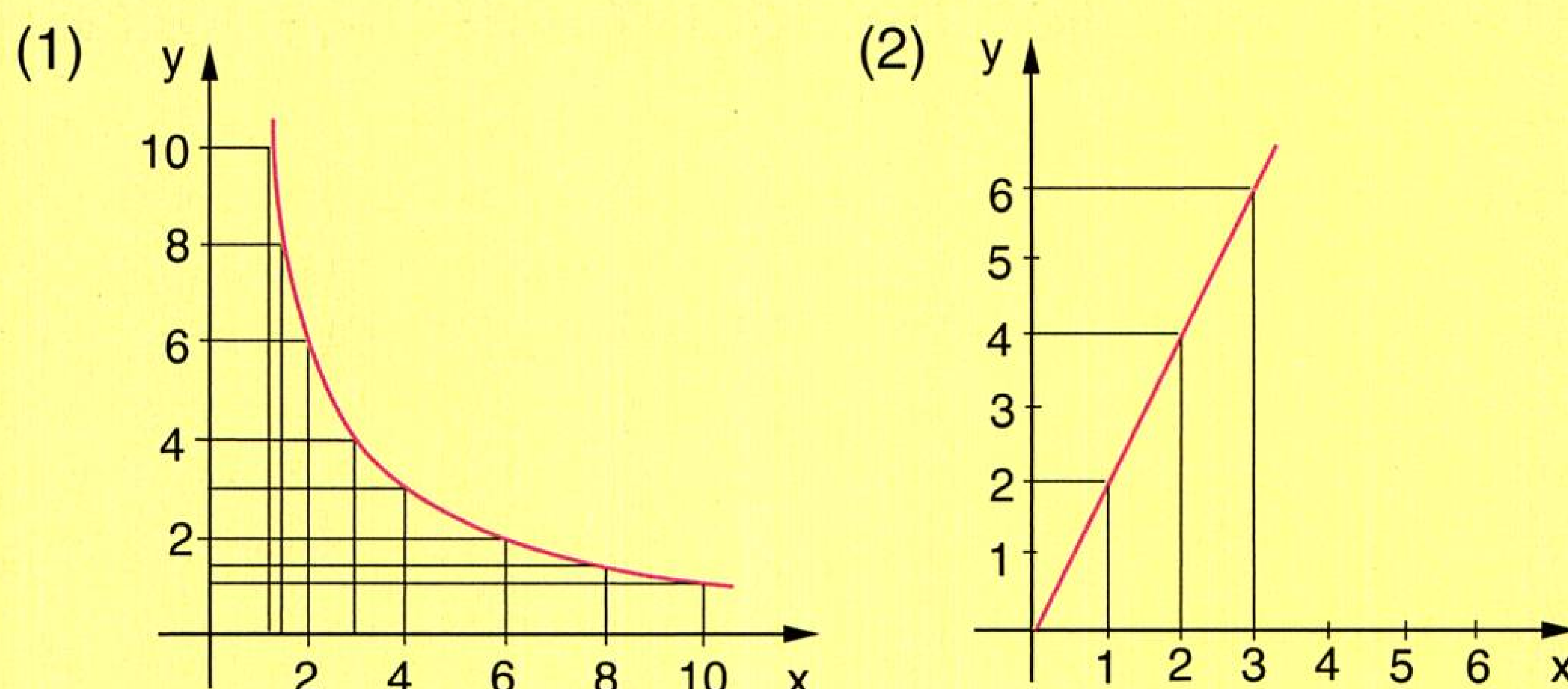
a	b	$\overline{x}$	$\overline{x}_g$
1	9	5	3
4	16	10	8
9	16	12,5	12
10	12	11	10,954
10^{-6}	10^4	$5 \cdot 10^3$	10^{-1}
10^{-14}	10^{24}	$5 \cdot 10^{23}$	10^5

AUFGABEN

1009. Es ist zu entscheiden, ob direkte oder indirekte Proportionalität vorliegt!

Beispiele:	Proportionalität:	
	direkte	indirekte
a) Arbeitslohn und Arbeitszeit (bei konstantem Stundenlohn)		
b) Umfang und Durchmesser beim Kreis		
c) Länge und Breite beim Rechteck (bei konstantem Flächeninhalt)		
d) Wasserdruck und Wassertiefe		
e) Kraft und Kraftarm (bei konstantem Drehmoment)		
f) Geschwindigkeit und Reisedauer (bei gleicher Entfernung)		
g) Jahreszinsen und Kapital (bei konstantem Zinsfuß)		
h) Radius und Drehzahl bei ineinander greifenden Zahnrädern		

1010. Welcher der beiden nebenstehenden Graphen ist eine Darstellung einer indirekten Proportionalität zwischen den Variablen x und y?



1011. Die wahren Aussagen sind anzukreuzen:

- ○ **a)** In der Aussageform $y = 5x$ ist die Größe y zur Größe x indirekt proportional.
- ○ **b)** In der Aussageform $3y = \frac{4}{x}$ ist die Größe y zur Größe x indirekt proportional.
- ○ **c)** Die Glieder p und s der Proportion $p:q = r:s$ nennt man Außenglieder der Proportion.
- ○ **d)** Die Produktgleichung der Proportion $4:x = 7:y$ lautet: $4y = 7x$.
- ○ **e)** Beide Seiten einer Proportion dürfen vertauscht werden: $a:b = c:d \Leftrightarrow c:d = a:b$.
- ○ **f)** Die Außenglieder einer Proportion dürfen vertauscht werden: $a:b = c:d \Leftrightarrow d:b = c:a$[1].
- ○ **g)** Die Innenglieder einer Proportion dürfen vertauscht werden: $a:b = c:d \Leftrightarrow a:c = b:d$[1].
- ○ **h)** Die Innenglieder einer Proportion dürfen gegen die Außenglieder vertauscht werden: $a:b = c:d \Leftrightarrow b:a = d:c$[1]

Die folgenden Proportionen sind nach x aufzulösen:

1012. **a)** $3:x = 87:145$ **b)** $x:5 = 29:10$ **c)** $52:x = 156:8112$

1013. **a)** $\frac{49}{5}:\frac{52}{5} = 264{,}6:x$ **b)** $\frac{20}{9}:\frac{30}{7} = \frac{10}{3}:x$ **c)** $\frac{20}{9}:x = \frac{2}{3}:\frac{1}{2}$

1014. **a)** $\frac{3a}{7b}:\frac{6a^2}{14c} = \frac{4c^2}{ab}:x$ **b)** $\frac{3a}{10b}:\frac{25b^2}{50} = \frac{9ab}{5c}:x$ **c)** $\frac{5a^2}{9b^2}:\frac{5a}{4{,}5b} = x:\frac{2b}{a}$

1015. **a)** $-5a:x = (-a^2 - 2ab - b^2):(a+b)$ **b)** $5a(a-b)^2:3b(a-b) = x:\frac{a-b}{5b}$

1016. **a)** $\frac{a^2+ab+b^2}{abx}:\frac{1}{5} = \left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}\right):\frac{a-b}{5}$ **b)** $(a^2-b^2):(a^2+b^2)x = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$

1017. **a)** $4a^3b^4:\frac{16a^2+16ab+4b^2}{15a^3b^2} = \frac{60a^6b^6}{(4a+2b)^2}:x$ **b)** $x:\frac{4a^2+12ab+9b^2}{12ab} = \frac{36a^3b^3}{(2a+3b)^2}:3a^2b^2$

1018. **a)** $(2a+3+x):(2a+3-x) = 2a:3$ **b)** $5:(5+3u-x) = 3u:(5+3u+x)$

1019. **a)** $\left(\frac{a^4+b^4}{a+b}\right):\left(\frac{a^4-b^4}{a-b}\right) = (a-b):x$ **b)** $\left(\frac{a^3-b^3}{a-b} - ab\right):\left(\frac{a^3+b^3}{a+b} + ab\right) = 1:x$

Aus den gegebenen Proportionen ist jeweils eine fortlaufende Proportion zu bilden:

1020. **a)** $a:b = 3:2$, $b:c = 2:5$ **b)** $a:b = 2:1$, $a:c = 2:3$ **c)** $a:b = 3:5$, $b:c = 10:7$ **d)** $a:b = 2:3$, $a:c = 4:7$

1021. **a)** $a:b = 7:3$, $b:c = 5:8$ **b)** $a:b = 3:8$, $c:b = 2:11$ **c)** $a:b = \frac{1}{3}:\frac{1}{4}$, $a:c = 2:5$ **d)** $a:b = \frac{1}{3}:\frac{7}{6}$, $c:b = \frac{3}{4}:\frac{3}{2}$

[1]) Wenn man die Produktgleichung bildet, kann man leicht nachprüfen, ob diese Aussage wahr ist.

Bei den Aufgaben **1022.** und **1023.** ist zu berechnen, welche Zahlen für die Variablen x, y und z einzusetzen sind, damit die Proportion und die Gleichung erfüllt werden:

1022. **a)** $x:y:z=2:1:1$, $3x+2y-2z=6$ **b)** $x:y:z=5:1:7$, $2x+3y+2z=81$ **c)** $x:y:z=2:1:3$, $8x-3y+2z=76$

1023. **a)** $2x:3y:z=8:15:6$, $5x-6y+3z=24$ **b)** $3x:y:z=3:2:3$, $3x+2y-z=12$ **c)** $4x:3y:2z=16:15:12$, $2x+5y-3z=60$

1024. Eine Wasserpumpe hebt 12 m^3 Wasser in 18 Minuten. Wie viel Liter Wasser hebt die Pumpe in 5 Minuten? **Anleitung:** 1 m^3 = 1000 l.

1025. Um eine 6 m breite Fahrbahn zu überqueren benötigt ein Fußgänger 4 Sekunden. Wie lange braucht der Fußgänger um eine 10 m breite Fahrbahn zu überqueren?

1026. Zum Glockenturm einer Kirche führen 58 Stufen zu je 18 cm Höhe. Beim Umbau der Kirche überlegt man, 14 cm hohe Stufen zu errichten. Wie groß wäre die Anzahl der Stufen in diesem Fall?

1027. Die PKW der Toyota Corolla-Reihe benötigen ca. 8 l Kraftstoff je 100 km. Wie viel km kann man mit einem Tankinhalt von **a)** 15 l **b)** 28 l zurücklegen?

1028. 5 LKW brauchen 20 Stunden um eine bestimmte Menge Schutt abzutransportieren. Wie viele Stunden benötigen 4 LKW der gleichen Größe, um das selbe zu leisten?

1029. Um den Rasen seines Kleingartens zu mähen benötigt Herr Tvaruzek $1\frac{1}{2}$ Stunden. Hierbei verwendet er einen Rasenmäher mit 40 cm Schnittbreite. Wie lange ist Herr Tvaruzek mit dem Mähen beschäftigt, wenn er einen Rasenmäher mit 50 cm Schnittbreite verwendet?

Vermischte Aufgaben

1030. Zwei Zahlen verhalten sich wie ...

a) ... 3 : 5, ihre Summe beträgt 136. **b)** ... 4 : 7, ihre Differenz beträgt 90.
c) ... 8 : 9, ihr Produkt beträgt 3528. **d)** ... 2 : 3, die eine Zahl ist um 5 größer als die andere Zahl.

Die beiden Zahlen sind jeweils zu berechnen!

1031. Drei Teesorten werden im Verhältnis 2 : 5 : 6 gemischt. Insgesamt sollen 39 kg Tee hergestellt werden. Wie viel kg Tee sind von jeder Sorte zu nehmen?

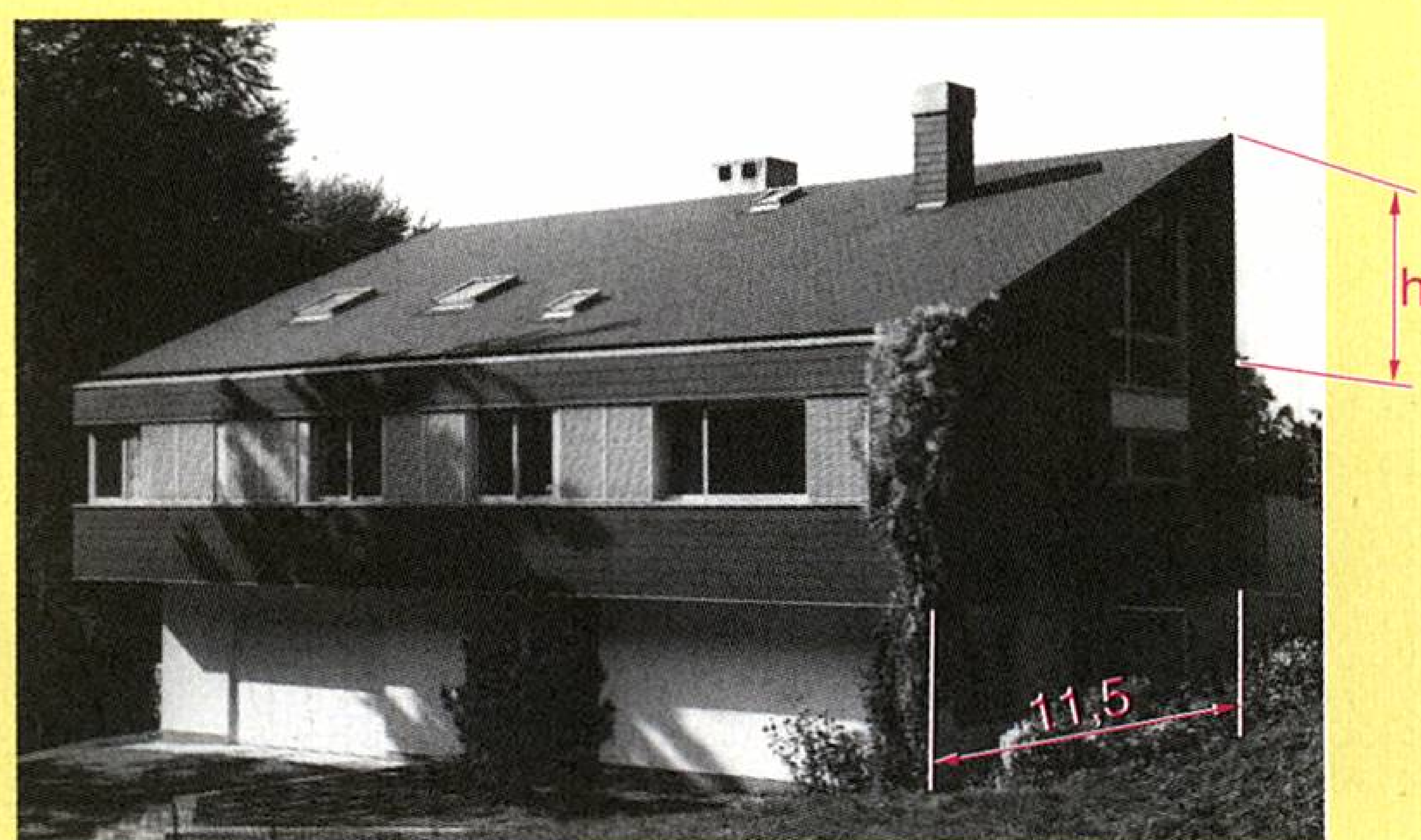
1032. An einer Privatbahn, die rechtlich als Gesellschaft mit beschränkter Haftung fungiert, sind 4 große Industriebetriebe beteiligt. Das durch die Betriebsabwicklung resultierende Defizit belief sich auf 2 050 000,— Euro. Es ist im Verhältnis der Einlagen zu verteilen. Wie viel zahlt jeder, wenn sich die Einlagen wie 40 : 60 : 84 : 21 verhalten?

1033. Ein Mann hinterlässt an drei Erben 210 000,— Euro, die im Verhältnis 5 : 7 : 9 verteilt werden sollen. Wie viel erhält jeder?

1034. A beteiligt sich an einem Unternehmen mit 200 000,— Euro durch 9 Monate, B mit 300 000,— Euro durch 7 Monate und C mit 400 000,— Euro durch 5 Monate. Wie ist ein Gewinn von 59 000,— Euro gerecht zu verteilen?

1035. Die Steigung eines Pultdaches ist 1 : 1,25.
Die Hausbreite beträgt 11,5 m.
Welche Proportion ist ein Modell für die Berechnung der Höhe h?

a) $h:1{,}25=11{,}5:1$ **b)** $h:11{,}5=1:1{,}25$
c) $h:11{,}5=1{,}25:1$



1036. Die Gemeinde Serfaus in Tirol hat eine unterirdische Luftkissenbahn, die vom Ortsanfang zur Seilbahnstation maximal 2000 Personen/Stunde transportiert.

a) Man berechne die Anzahl der Personen, die in 1 Stunde 48 Minuten befördert werden können. Wie viele Fahrten sind dazu notwendig, wenn in 180 min 25 Fahrten zurückgelegt werden?

b) Die Bahn besteht aus zwei gleich großen Kabinen. Wie viele Personen können in einer Kabine befördert werden?



1037. Es werden drei verschiedene Futtermittel (A, B und C) in verschiedenen Verhältnissen gemischt.

Der Eiweißgehalt der Mischfutter (I, II und III) ist in der nebenstehenden Tabelle angegeben.

Welches Gleichungssystem ist ein mathematisches Modell für die Berechnung des Eiweißgehalts in den Futtermitteln A, B und C?

Mischfutter	Mischungs-verhältnis	Eiweißgehalt
I	A:B:C = 1:3:4	4,5%
II	A:B:C = 2:2:1	5,8%
III	A:B = 1:1, C = 0	6,5%

a)
$$\begin{array}{ll} \text{I} & x + 3y + 4z = 8 \cdot 4{,}5 \\ \text{II} & 2x + 2y + z = 5 \cdot 5{,}8 \\ \text{III} & x + y = 2 \cdot 6{,}5 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} \text{I} & x + 3y + 4z = 4{,}5 \\ \text{II} & 2x + 2y + z = 5{,}8 \\ \text{III} & x + y + = 6{,}5 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ll} \text{I} & \frac{4{,}5}{100}x_1 : \frac{4{,}5}{100}x_2 : \frac{4{,}5}{100}x_3 = 1:3:4 \\ \text{II} & \frac{5{,}8}{100}x_1 : \frac{5{,}8}{100}x_2 : \frac{5{,}8}{100}x_3 = 2:2:1 \\ \text{III} & \frac{6{,}5}{100}x_1 : \frac{6{,}5}{100}x_2 : \quad = 1:1 \end{array}$$

1038. Man überprüfe die Richtigkeit der Behauptung $a:b = c:d \Leftrightarrow (ka + lb):(ma + nb) = (kc + ld):(mc + nd)$ anhand folgender Zahlen: $a = 3$, $b = 5$, $c = 6$, $d = 10$

a) $k = l = m = 1$; $n = -1$ **b)** $k = 2$, $l = 3$, $m = 5$, $n = 7$

1039. Man versuche, die in der Aufgabe **1038.** gemachte Erfahrung zu begründen!

1040. **a)** $a:b = 7:2$
$(4a + 5b):(3a - 10b) = ?$

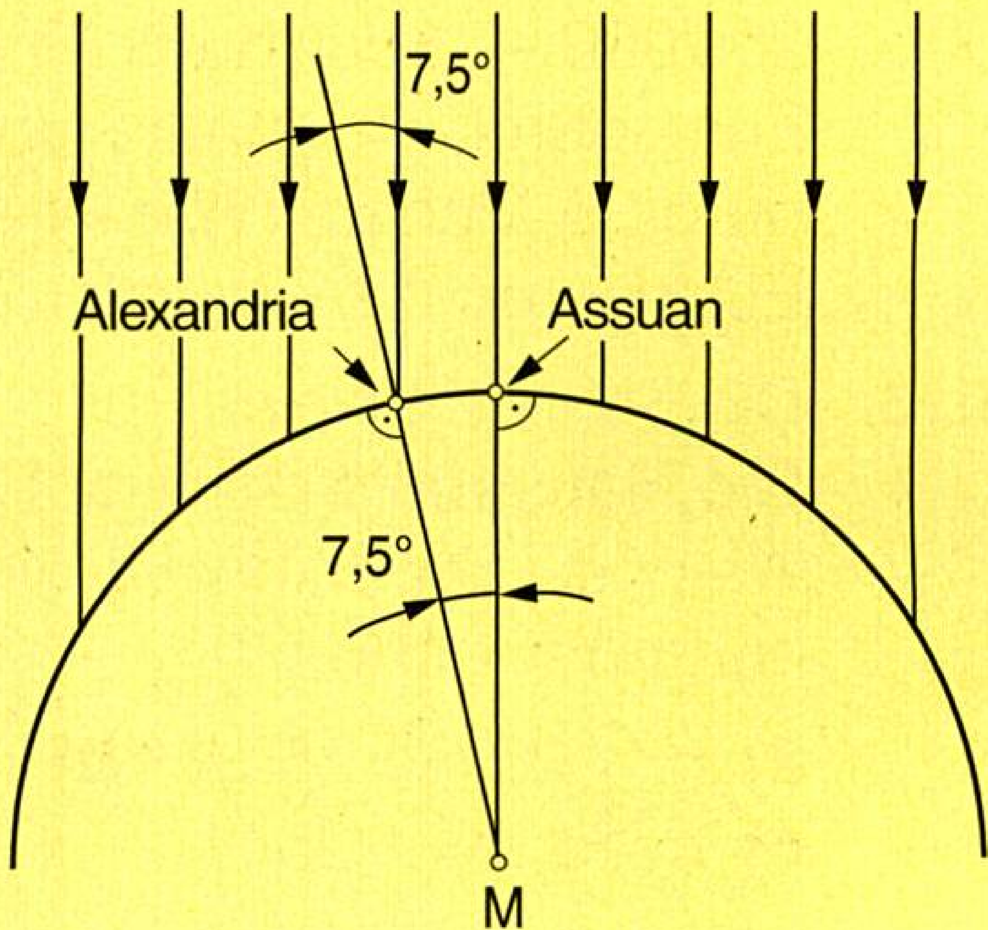
b) $a:b = 27:11$
$(-2a + 5b):(a - 2b) = ?$
(Kontrolle für das Ergebnis!)

1041. Wie lauten arithmetisches und geometrisches Mittel der Zahlen 2 und 200?

1042. Bei allen Beispielen fällt auf, dass die geometrischen Mittel kleiner sind als die arithmetischen. Sind das Zufälle oder lässt sich das als Regel beweisen?
Anleitung: Man gehe vom arithmetischen Mittel $\bar{x}$ aus und bezeichne die Werte a und b mit $a = \bar{x} + d$ und $b = \bar{x} - d$.

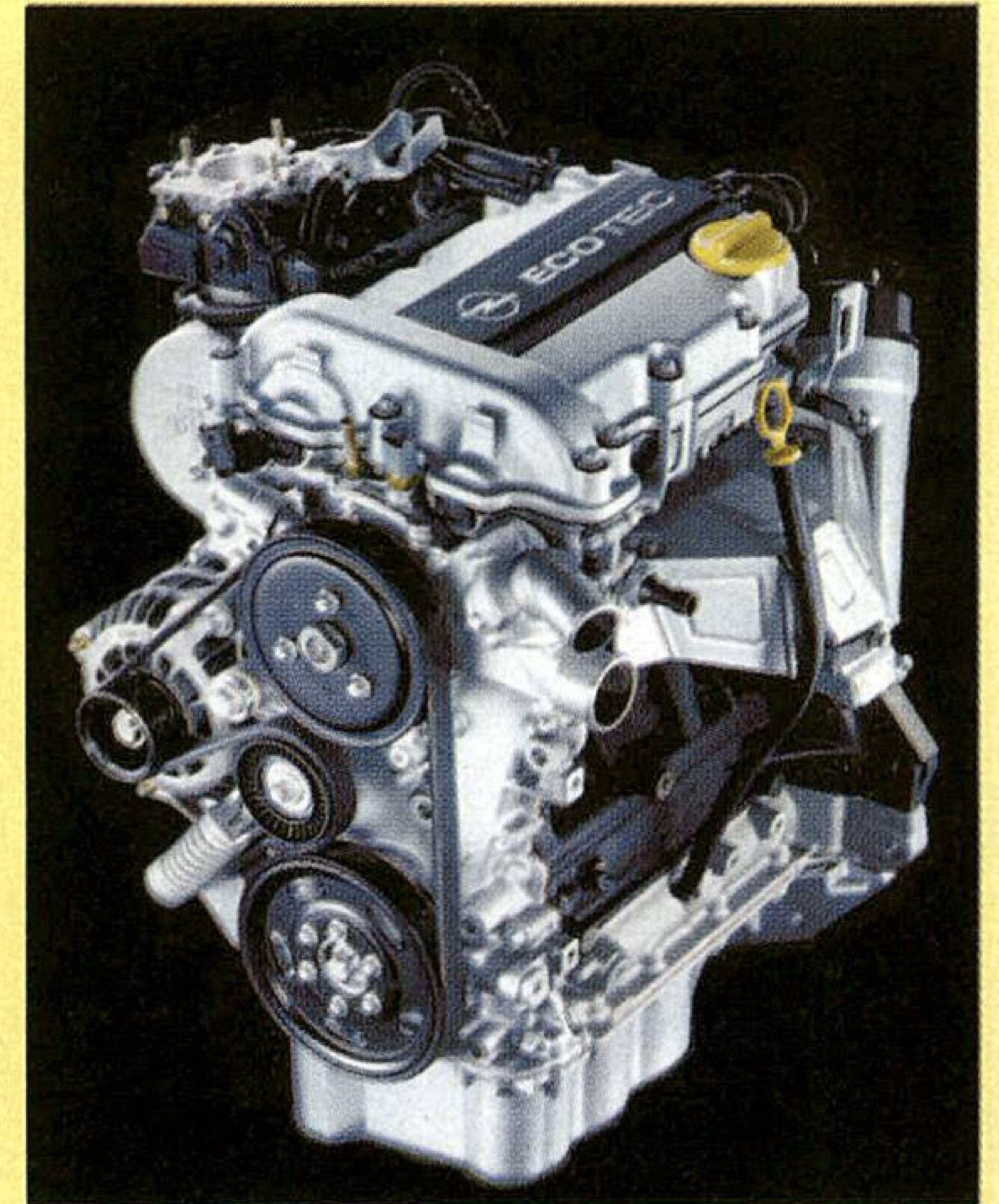
1043. Beim Normformat für Schreib- und Zeichenpapier ist die kleinere Seite des Rechtecks das geometrische Mittel aus der ganzen und der halben längeren Seite: Wie lautet das Verhältnis der beiden Rechteckseiten?

1044. Der griechische Mathematiker **ERATOSTHENES von Kyrene** (276—194 v. Chr.) führte eine erstaunlich genaue Messung des Erdumfangs durch. In Assuan (Oberägypten) ist die Richtung „senkrecht nach oben", die „Zenitrichtung", anders als in Alexandria — sofern die Erde eine Kugel ist. Tatsächlich fand ERATOSTHENES eine Abweichung von 7,5° der Zenitrichtung mit Hilfe der Mittagssonne. Nach seiner Messung betrug die Entfernung zwischen Assuan und Alexandria 5000 ägyptische Stadien (1 ägyptisches Stadion = 184,72 m). Mit Hilfe dieser Angaben berechnete ERATOSTHENES den Erdumfang. Welchen Wert hat er gefunden?



6. Problemstellungen der Technik

Maschineningenieurwesen/Mechatronik



1045. Ein offener Riementrieb läuft mit $v = 17$ m/s Riemengeschwindigkeit. Wie groß ist die Riemengeschwindigkeit, wenn die Drehzahl der treibenden Scheibe um $\frac{1}{5}$ erhöht wird?

1046. Ein Zahnradtrieb besteht aus 2 Zahnrädern mit 40 bzw. 16 Zähnen. Wie viele Umdrehungen/min macht das kleinere Rad, wenn sich das größere mit 120 U/min dreht? Wie groß ist das Übersetzungsverhältnis?

Anleitung: Das Produkt aus Drehzahl und Anzahl der Zähne muss für jedes Rad gleich groß sein.

1047. Ein einfaches Zahnradgetriebe besteht aus 3 Zahnrädern, wobei das mittlere 120, das linke 30 und das rechte 50 Zähne hat. Wie lange braucht das rechte bzw. linke Zahnrad für eine Umdrehung, wenn das mittlere 20 U/min macht?

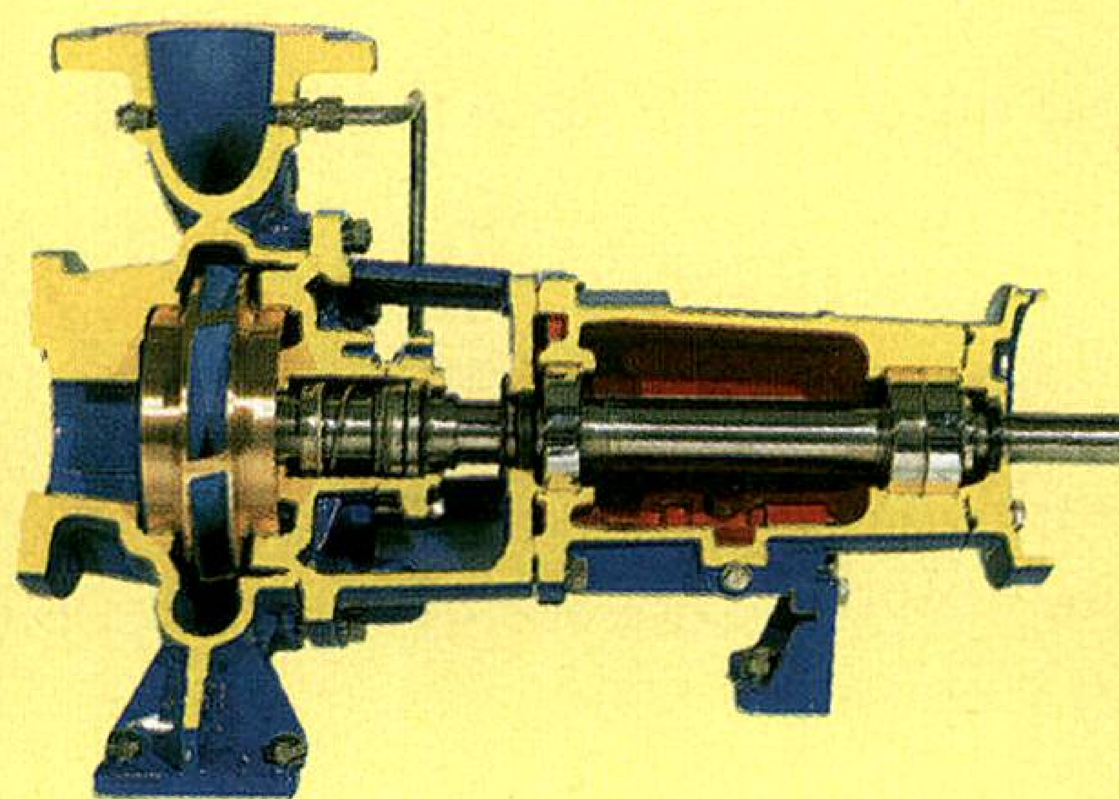
1048. Wie groß ist die Drehzahl des größeren Rades eines Übersetzungsgetriebes, wenn der Motor in der Antriebswelle des kleineren Rades ein Drehmoment von $M_1 = 8$ Nm bei 3200 U/min entwickelt und daher am größeren Rad ein Drehmoment von $M_2 = 160$ Nm erzeugt?

Anleitung: Die Übersetzung der Drehmomente erfolgt im umgekehrten Verhältnis der Drehzahlen.

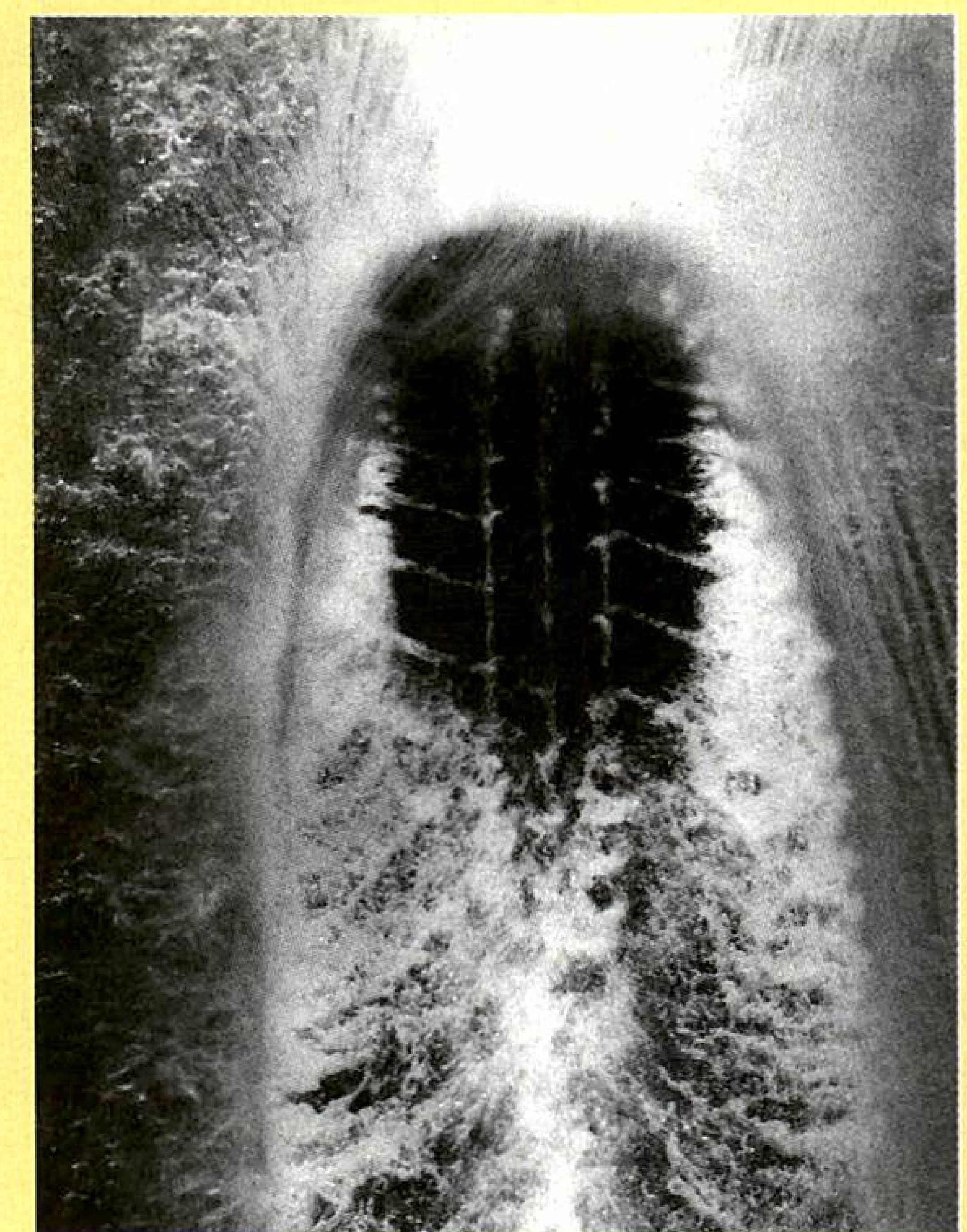


1049. Wie groß muss die Fläche des Presskolbens eines Wagenhebers sein, wenn das Gewicht eines PKW auf den Presskolben mit 350 N wirkt und am Pumpenkolben 12 N betragen soll? Die Fläche des Pumpenkolbens beträgt 2,6 cm^2.

Anleitung: Die Kräfte verhalten sich wie die Flächen, auf die sie einwirken.



1050. Eine Kreiselpumpe fördert 0,9 m^3 Wasser in 5 s 14 m hoch. Welche Wassermenge wird in 4,5 s in 22,5 m Höhe gedrückt?



1051. Ein Schiffskran benötigt zum Heben eines 12 kN schweren Containers auf 15 m Höhe 45 s. Wie lange braucht er bei gleicher Leistung, um eine andere, 8 kN schwere Last auf 13 m zu heben?

Anleitung: Bei konstanter Leistung ist die Arbeit der Zeit proportional.

1052. Ein PKW-Reifen überträgt eine Last von 4320 N auf die Straße. In der Aufstandsfläche — mit dem Seitenverhältnis $l : b = 3 : 2$ — herrscht ein Druck von 20 N/cm^2. Wie lang und wie breit ist die Aufstandsfläche?

Elektrotechnik/Elektronik

1053. Die beiden Widerstände $R_1 = 21\,\Omega$, $R_2 = 31{,}5\,\Omega$ sind in einer Stromverzweigung parallel geschaltet. Welchen Strom nimmt die zweite Leitung auf, wenn die Stromstärke $I_1 = 1{,}2$ A beträgt?

Anleitung: $R_1 : R_2 = I_2 : I_1$ (KIRCHHOFFsches Gesetz)

1054. Ein elektrischer Heizkörper nimmt bei $U = 230$ V einen Strom von $I = 8{,}8$ A auf. Wie groß ist der Widerstand R_2 eines anderen Heizkörpers, dessen Stromaufnahme im Verhältnis 1,6 : 1 herabgesetzt und an ein 110 V-Netz angeschlossen wurde? In welchem Verhältnis stehen R_1 und R_2 beider Geräte?

Anleitung: Mit Hilfe des OHMschen Gesetzes $U = I \cdot R$ findet man das Verhältnis der Widerstände.

1055. In einer Kupfersulfatlösung entsteht bei einer Stromstärke von 1 A in 1 s an der Kathode ein Niederschlag von 0,329 mg Cu. Wie groß ist die abgeschiedene Menge bei 20 A in 8,5 min?

Anleitung: Die abgeschiedenen Mengen sind der Zeit und der Stromstärke proportional.

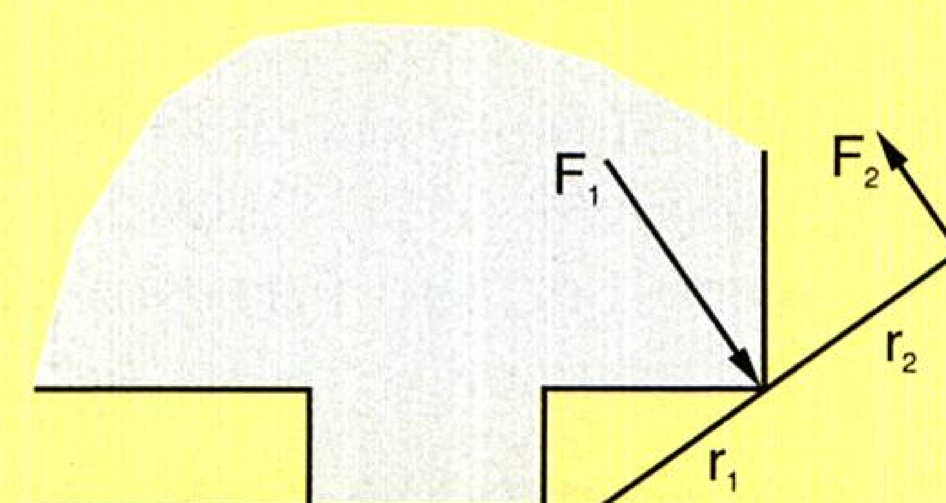
1056. Aus einer Silbernitratlösung werden 1677 mg Silber in 5 min abgeschieden. Wie viel mg Silber erhält man in 7 min 30 s, wenn man die Stromstärke verdoppelt?

Anleitung: Vgl. vorige Aufgabe.

Bautechnik

1057. Welche Kraft F_2 ist nötig, um einen Kasten anzuheben, wenn eine Kraft $F_1 = 300$ N entgegen wirkt und die Kraftarme die Längen $r_1 = 16$ cm bzw. $r_2 = 50$ cm haben?

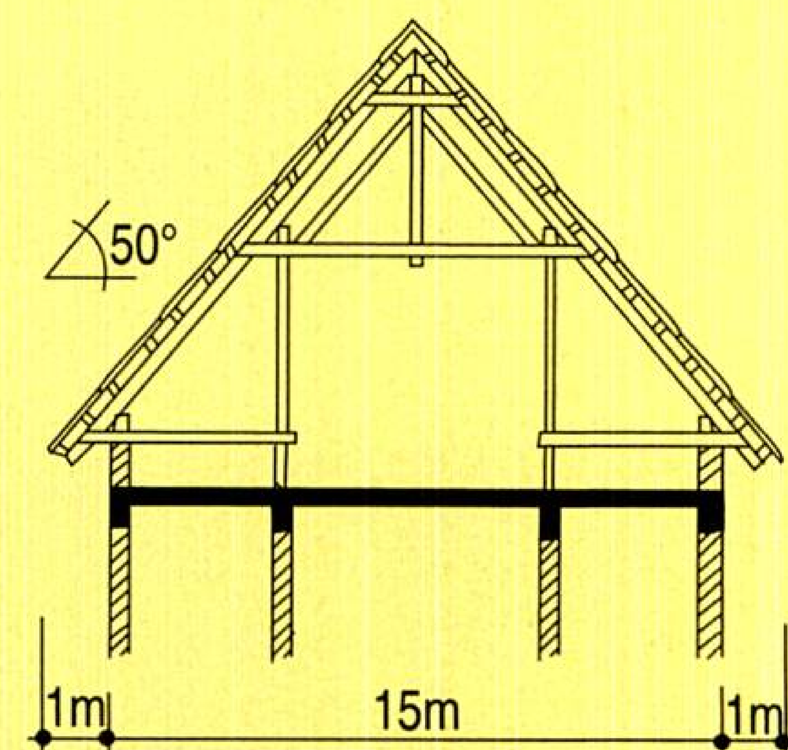
Anleitung: Die Kräfte verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Kraftarme.



1058. Ein Teil Kalk und drei Teile Sand ergeben 3,2 Teile fertigen Kalkmörtel. Wie viele m^3 Sand benötigt man für 1,24 m^3 Kalk und wie viele m^3 Mörtel entstehen?

1059. Ein Architekt plant ein symmetrisch aufgesetztes Satteldach für ein 17 m breites Haus. Wie hoch wird das Dach, wenn das an der Traufe gemessene Neigungsmaß 1,2 : 1 betragen soll?

Anleitung: Unter dem Neigungsmaß versteht man den Quotienten aus der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete und der dem Winkel anliegenden Kathete: $h : \frac{f}{2}$.



Wirtschaftsingenieurwesen

1060. Eine Firma berücksichtigt bei der Kalkulation der Nichtleistungslöhne folgende jährliche Nichtarbeitstage: 16 Tage Urlaub, 13 Tage bezahlten Krankenstand, 11 Feiertage. In welchem Verhältnis stehen Arbeitstage zu Nichtarbeitstagen?

Bemerkung: Das Jahr wird mit 52 Wochen zu je 5 Tagen angesetzt.

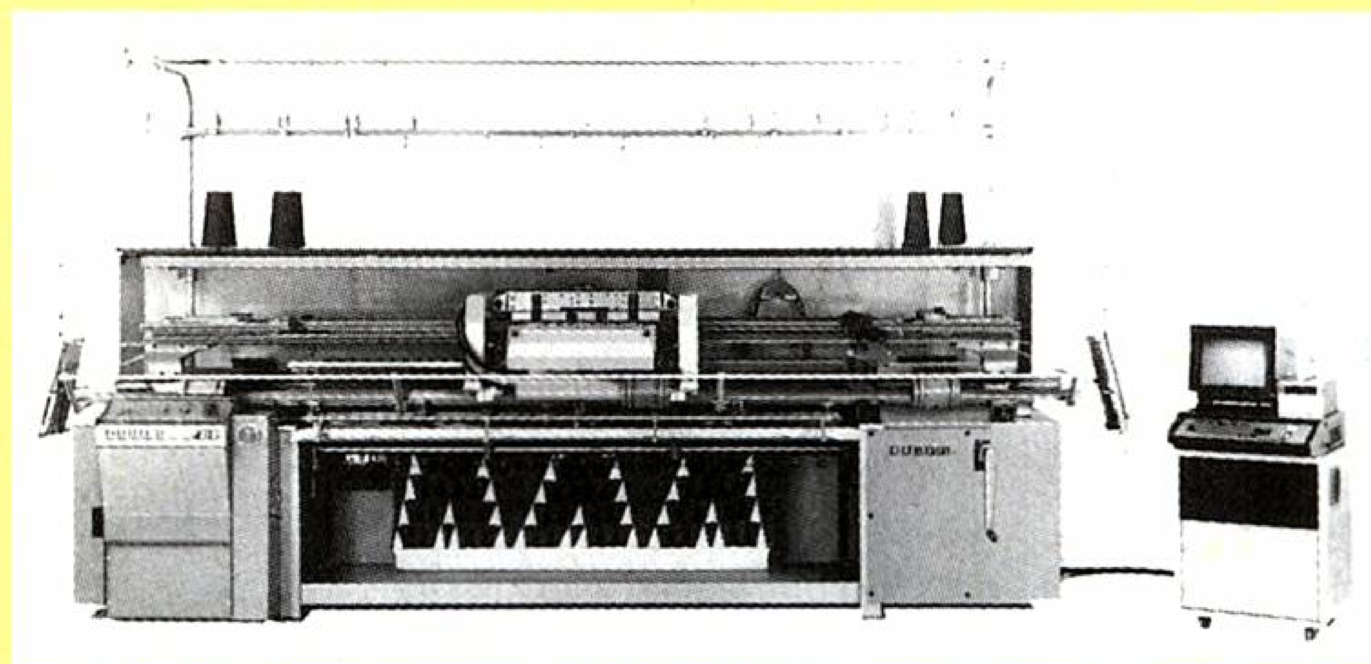
Textiltechnik

In der **Wirkerei/Strickerei** ist der Abstand von Nadel zu Nadel (das entspricht einer Nadelteilung) ein wesentliches Merkmal der Maschinen. Die Anzahl der Nadelteilungen pro Längeneinheit nennt man **Maschinenfeinheit**. Je nach Art der Maschine und deren Herkunftsland sind verschiedene Feinheitsbezeichnungen üblich. Einige wichtige Feinheitsmaße sind:

E (englische Feinheit): Anzahl der Nadelteilungen (NT) pro engl. Zoll: engl. Zoll = 25,4 mm

Jg (Jauge-Schweizer Teilung): Anzahl der mm, die für 10 NT benötigt werden

Ff (Französisch fein): Anzahl der NT pro französischem Zoll (27,28 mm). Ff wird hauptsächlich bei Rundmaschinen verwendet.



1061. Wie viel NT hat eine LL-Flachstrickmaschine der Feinheit E 12 auf 120 cm Arbeitsbreite?

1062. Wie viel NT hat eine Flachstrickmaschine der Feinheit Jg 28 auf 90 cm Arbeitsbreite?

1063. Wie viel NT hat eine Rundwirkmaschine der Feinheit Ff 26 bei einem Nadelkranzdurchmesser von $20''_F$?
Bemerkung: Ein Nadelkranz ist eine Scheibe, an deren Umfang in regelmäßigen Abständen Nadeln angebracht sind.

1064. Welche Feinheit Jg hat eine Flachstrickmaschine mit 450 NT auf 80 cm?

1065. Da für einen Auftrag, der auf Flachstrickmaschinen der Feinheit E 18 ausgeführt wird, die Anzahl der Maschinen nicht ausreicht, wird ein Teil der Arbeit auf Maschinen mit Schweizer Teilung ausgeführt. Welche Feinheit Jg müssen diese haben?

Im Laufe einer Produktion einer Strick- oder Wirkware kann es vorkommen, dass der Rohstoff (Garn) geändert wird. Um dieselbe **Garnfüllkraft** zu erzielen, muss unter Berücksichtigung der Dichte des Garnes die Garnnummer geändert werden. Dies geschieht nach der Proportion

$$Nm_{alt} : Nm_{neu} = \rho_{neu} : \rho_{alt}$$

Es handelt sich um eine indirekte Proportion: Bei größerer Dichte braucht man ein Garn mit kleinerer Nm.

1066. Auf einem Strumpfautomat mit $\varnothing\, 2\,^3/_4{}''_E$ und der Feinheit E 20 werden Kinderstrümpfe aus Baumwollgarn Nm 36 erzeugt.
a) Welche Nm müsste bei Verwendung von Wolle verarbeitet werden?
($\rho_{Baumwolle} = 1{,}54\ g/cm^3$, $\rho_{Wolle} = 1{,}34\ g/cm^3$)
b) Wie viel NT hat der Strumpfautomat?

Stoffgewichte[1)] werden in verschiedener Form angegeben. Man kann das Quadratmetergewicht[1)] g/m^2, das Laufmetergewicht[1)] g/lfm oder das Stückgewicht[1)] angeben. Sehr oft ist auch die Angabe von lfm/kg sinnvoll, insbesondere wenn beurteilt werden soll, wie viele lfm auf einem Stoffballen sind.

1067. Ein Stoff mit der Breite 145 cm hat ein Quadratmetergewicht von $64{,}15\ g/m^2$. Wie viel lfm sind auf einem Stoffballen mit 15 kg?

Beim Färben von Stoffen wird die Ware in ein Behandlungsbad (Flotte) gesenkt. Dabei spielt das Flottenverhältnis eine wichtige Rolle: **Flottenverhältnis** = Masse der trockenen Ware : Gesamtvolumen der Flotte.

1068. 75 kg Ware sollen auf der Haspelkufe im Flottenverhältnis 1:24 gefärbt werden. Welches Volumen muss die Haspelkufe mindestens haben?

1069. 200 kg Baumwollgewebe werden in einer Flotte 1:30 gefärbt. Dabei benötigt man 3 % der Stoffmasse an Farbstoff, weiters 5 ml 32,5 %-ige NaOH pro Liter und 20 g NaCl pro Liter Flotte. Man berechne den Verbrauch an Farbstoff in kg, NaOH in l und NaCl in g!

---

1) In der Praxis wird das Wort Stoffgewicht verwendet. Es müsste exakt heißen: Masse des Stoffes. Ebenso: Quadratmetergewicht — Quadratmetermasse, Laufmetergewicht — Laufmetermasse und Stückgewicht — Stückmasse.

Unter der **Flottenaufnahme** (Abquetscheffekt) versteht man die beim Klotzen aufgenommene Flüssigkeitsmenge. Flottenaufnahme in %: 100 % = Masse der Flotte : Masse der trockenen Ware. Dabei ergibt sich die Flottenmasse als Massendifferenz von geklotzter und trockener Ware.

1070. Ein trockenes Stück wiegt vor dem Klotzen 1,5 kg, danach 2,75 kg. Welche Flottenaufnahme liegt vor?

Chemieingenieurwesen

1071. **a)** H_2O **b)** H_2SO_4 **c)** CH_3-CH_2-OH **d)** $HOOC-CHOH-CHOH-COOH$
In welchem Gewichtsverhältnis stehen die Elemente der obigen Verbindungen?

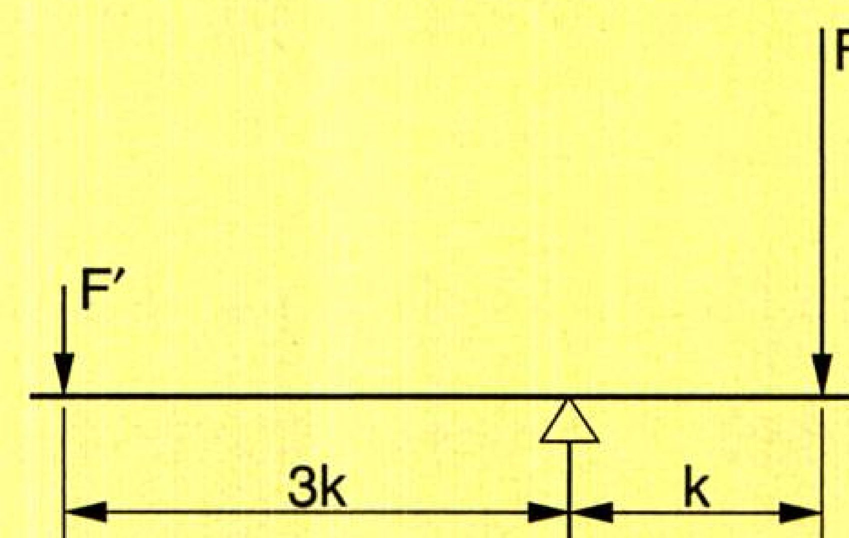
1 H 1,008	
6 C 12,011	8 O 16,00
11 Na 22,99	16 Cl 35,46
29 Cu 63,54	

1072. Die Stoffmengen (in mol) und die Anzahl der Moleküle nachstehender Verbindungen sind mittels Proportion zu ermitteln:

a) 15 g H_2O **b)** 23 g $CuCO_3$ **c)** 100 g NaCl **d)** 12 g CO_2

Vermischte Aufgaben

1073. Welche Kraft F′ ist aufzuwenden, um eine Last von F = 1440 N, die am Ende einer Stange befestigt ist, im Gleichgewicht zu halten, wenn der Drehpunkt die Stange im Verhältnis 3 : 1 teilt?



1074. In einer Stromröhre sind die Strömungsgeschwindigkeiten den Querschnittsflächen indirekt proportional. Mit welcher Geschwindigkeit fließt Erdöl durch eine Rohrverengung (Querschnittsfläche $A_2 = 1563\ cm^2$), wenn es bei $A_1 = 1875{,}6\ cm^2$ mit $v_1 = 1{,}3$ m/s fließt?

1075. Nach dem BOYLE-MARIOTTEschen Gesetz ist bei konstanter Temperatur das Produkt aus Druck und Volumen konstant. In einer Stahlflasche befinden sich 24 dm^3 Wasserstoffgas unter einem Druck von 9,8 MPa. Welches Gasvolumen erhält man, wenn sich das Gas ausdehnt, bis der Druck auf 3 MPa abgesunken ist?

1076. Aus einem Wasserbehälter fließt Wasser mit einer Geschwindigkeit von 9,45 m/s aus, wenn der Wasserspiegel 7,29 m hoch ist. Auf welchen Wert sinkt die Ausflussgeschwindigkeit ab, wenn der Wasserspiegel auf eine Höhe von 3,24 m sinkt?

Anleitung: Die Ausflussgeschwindigkeiten verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Höhen.

1077. Ein Satz von Orgelpfeifen soll die Töne einer Dur-Tonleiter wiedergeben, deren Schwingungszahlen (Frequenzen) sich wie $1 : \frac{9}{8} : \frac{5}{4} : \frac{4}{3} : \frac{3}{2} : \frac{5}{3} : \frac{15}{8} : 2$ verhalten. Die längste Pfeife soll 360 mm sein. Wie lang müssen die übrigen 7 sein?

Anleitung: Die Längen von Pfeifen sind — bei sonst gleichen Bedingungen — der Frequenz ihrer Töne indirekt proportional.

PLANIMETRIE (Geometrie der Ebene)

Die **Geometrie**[1] ist eines der ältesten Teilgebiete der Mathematik. Sie untersucht ebene (planimetrische[2]) und räumliche (stereometrische[3]) Figuren und beschreibt ihre Gesetzmäßigkeiten. Die Geometrie entstand ursprünglich aus der Vermessung von Ackerland und aus notwendigen Berechnungen bei der Herstellung großer Bauwerke (Pyramiden). So mussten etwa die Ägypter nach jeder Nilüberschwemmung ihre Felder neu vermessen. Auch bei astronomischen Beobachtungen der Babylonier und Ägypter ergaben sich geometrische Erkenntnisse. Erst durch die Griechen wurde die Geometrie zu einem „wissenschaftlichen" Gebiet, d. h. man formulierte nicht nur geometrische Aussagen aus der Erfahrung heraus, sondern man forderte und fand **Beweise** für die einzelnen Behauptungen. Bei den Griechen — und bis spät ins Mittelalter — galt nur die Geometrie als mathematische Wissenschaft im heutigen Wortsinn[4].

Die **Arithmetik**[5], sozusagen das „praktische Rechnen", verstand man dagegen als Handwerk, das nicht einmal in hohem Ansehen stand. Erst ab **François VIÈTA** (1540—1603), dem Erfinder der Buchstabenrechnung, und den Mathematikern der Renaissance entwickelte sich die Arithmetik zur **Algebra**[6]. Heute ist die Algebra allerdings ein weit über die Theorie der Gleichungen hinaus gehendes Teilgebiet der Mathematik.



Eines der meistgedruckten Bücher (nach der Bibel), die „Elemente", stammt von dem griechischen Mathematiker **EUKLID von Alexandrien** (ca. 365—300 v. Chr.). Über sein Leben ist so gut wie nichts bekannt. Wahrscheinlich war er ein Schüler von ARISTOTELES. Er wirkte im 4. Jahrhundert v. Chr. in der damals neuerbauten Bibliothek in Alexandria, dem Zentrum der Wissenschaften im Reich ALEXANDERs des Großen und dessen Nachfolgern. Die Werke EUKLIDs (Er hat außer den „Elementen" noch weitere, nur teilweise erhaltene Bücher geschrieben.) enthalten theoretische Abhandlungen, wie sie der griechischen Mathematik entsprechen. Flächenberechnungen oder kaufmännisches Rechnen sind nicht enthalten. Natürlich wusste man dennoch wie dies durchzuführen sei. Philosophen (in dieser Zeit gab es keine Trennung der einzelnen Wissenschaften) haben sich dafür aber nicht interessiert, ja sie haben es sogar strikt abgelehnt. EUKLID soll einem seiner Hörer, der ihn danach gefragt hatte, welchen Nutzen er — der Schüler — vom Studium geometrischer Lehrsätze habe, eine kleine Geldmünze geschenkt haben, da *„dieser armselige Mensch einen Gewinn aus seinen Studien ziehen müsse"*. Als der Ptolemäerkönig ihn nach einem einfacheren Weg sich mathematisches Wissen anzueignen gefragt hat, soll EUKLID geantwortet haben: *„Es gibt keinen Königsweg zur Mathematik"*.

1. Wiederholung geometrischer Grundbegriffe

In einem Lexikon finden wir folgende „Definitionen":

Der **Punkt** ist das einfachste geometrische Gebilde. Ein Punkt hat keine Ausdehnung. Er ist dimensionslos.

Die **Gerade** ist die Spur eines Punktes, der sich in konstanter Richtung bewegt. Sie hat eine Ausdehnung, die Längenausdehnung. Sie ist eine eindimensionale Punktmenge.

Wird die Einschränkung fallen gelassen, dass sich der Punkt in konstanter Richtung bewegt, so entsteht eine Linie. Beispiele: Kreis, Spirale, Schraubenlinie (räumlich). Eine Gerade ist natürlich auch eine Linie.
Verschiebt man eine Gerade, ohne sie zu drehen, längs einer anderen Geraden, so entsteht eine **Ebene**. Sie hat zwei Ausdehnungen, nämlich Länge und Breite. Sie ist eine zweidimensionale Punktmenge.

Bei der Bewegung einer **Linie** entsteht eine Fläche. Beispiele: Oberfläche einer Kugel, Mantelfläche eines Kegels. Nur bei spezieller (gerader) Bewegung einer speziellen Linie (einer Geraden) entsteht eine Ebene.
Natürlich ist bei nebenstehender Definition EUKLIDs meist nicht angebbar, was als „Länge" und was als „Breite" zu verstehen ist.

Da es sich bei den Begriffen Punkt, Gerade und Ebene um Grundbegriffe handelt, wurden sie durch obige Aussagen nicht definiert, sondern nur umschrieben.

EUKLID wählte folgende Formulierungen:

Ein **Punkt** ist, was keinen Teil hat.

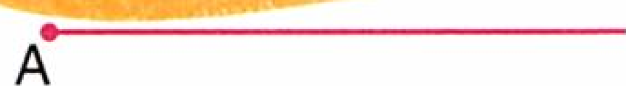
Eine **Linie** ist eine Länge ohne Breite.

Eine **Fläche** ist, was nur Länge und Breite hat.

---

1) ge (griech.): Erde, metrein (griech.): messen.
2) planities (lat.): Ebene.
3) stereos (griech.): hart, fest.
4) Wie hoch die Geometrie von den Griechen geschätzt wurde, kann man dem Spruch entnehmen, der über dem Eingang zur Akademie PLATOs stand: *„Niemand trete ein, der sich nicht mit Geometrie beschäftigt hat"*.
5) arithmos (griech.): Zahl.
6) Das Wort kommt aus dem Arabischen.

Definition:
Ein **Strahl** ist ein einseitig begrenztes Stück einer Geraden. Ein Strahl hat **einen Endpunkt**.



Unter Verwendung dieser Grundbegriffe schaffen wir durch nebenstehende Definitionen neue Begriffe.

Beispiel:
Man veranschauliche durch entsprechende Skizzen:
a) Die Geraden g_1 und g_2 schneiden einander im Punkt S.
b) Die Geraden g_1 und g_2 sind identisch.
c) Die Geraden g_1 und g_2 sind parallel.
Weiters ist der Sachverhalt mit Symbolen der Mengenlehre auszudrücken!

Lösung:

a) $g_1 \cap g_2 = \{S\}$

b) $g_1 = g_2$ $\quad g_1 \cap g_2 = g_1 = g_2$

c) $g_1 \parallel g_2 \Rightarrow g_1 \cap g_2 = \{\,\}$

Definition:
Eine **Strecke** ist ein an zwei Seiten begrenztes Stück einer Geraden. Eine Strecke hat **zwei Endpunkte**.

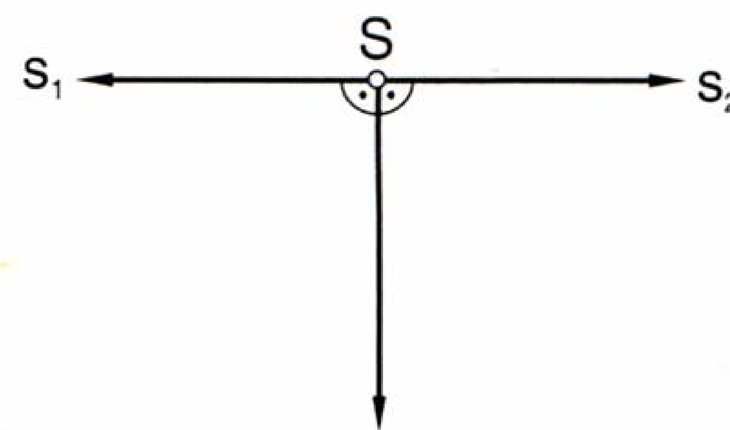


Mit AB wird die Strecke zwischen A und B bezeichnet und mit $\overline{AB}$ deren Länge.

Es ist zu diskutieren ...

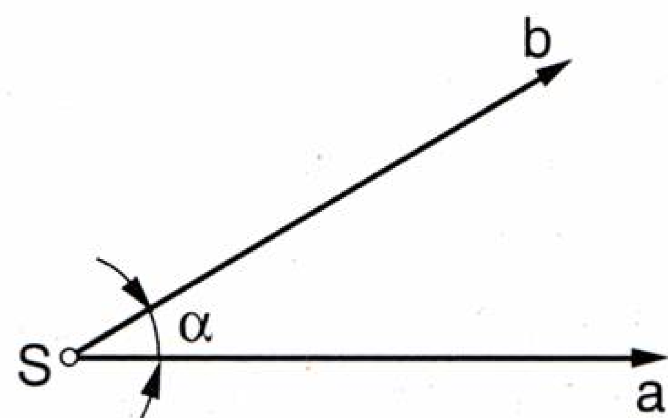
— wie eine Strecke halbiert wird,
— wie eine Normale auf einer Geraden errichtet wird,
— wie die Normale von einem Punkt auf eine Gerade gefällt wird,
— wie eine Parallele zu einer Geraden durch einen Punkt gezeichnet wird,
— wie eine Parallele zu einer Geraden im Abstand a gezeichnet wird.

2. Winkel

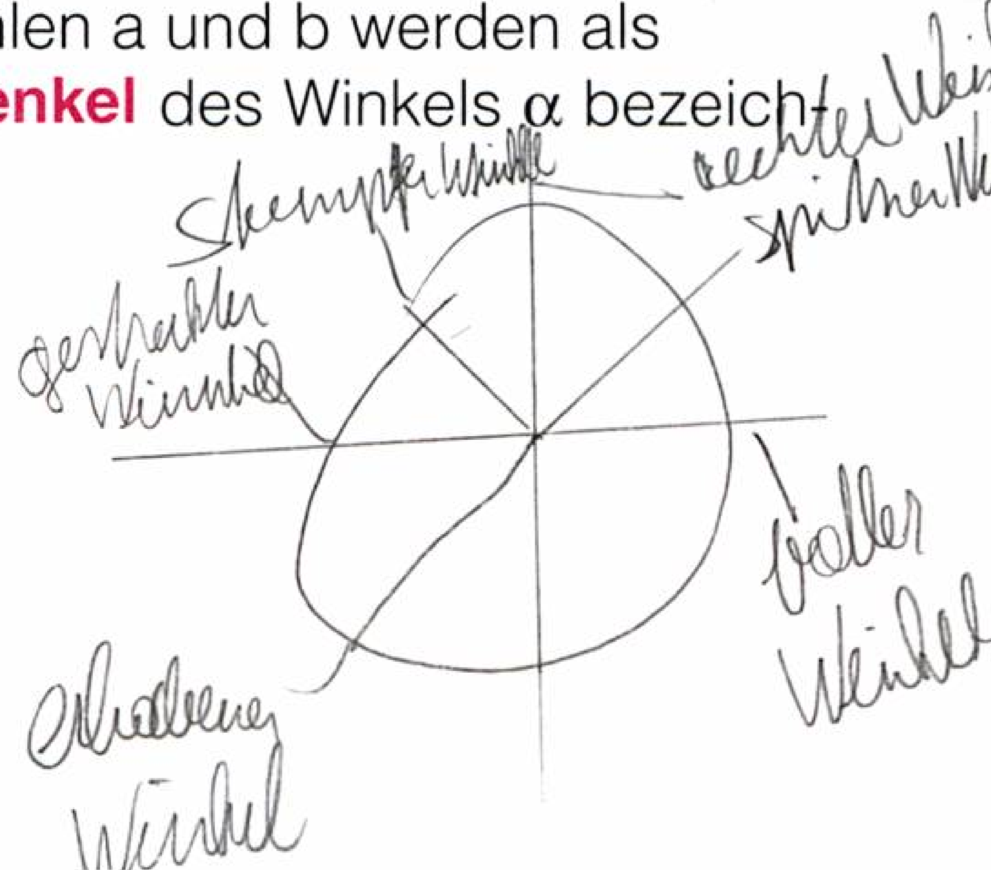


Jeden Punkt einer Geraden kann man sich als Scheitel S eines Winkels denken. Die von S in entgegen gesetzte Richtungen ausgehenden Teile der Geraden (die Strahlen s_1 und s_2) sind die Schenkel dieses Winkels, der dann als **gestreckter Winkel** bezeichnet wird.

Definition:
Zwei von einem gemeinsamen Punkt S ausgehende Strahlen a und b bilden einen **Winkel** (a, b).



Der Punkt S wird als **Scheitel**, die Strahlen a und b werden als **Schenkel** des Winkels α bezeichnet.



Wird ein gestreckter Winkel halbiert, so entstehen zwei **rechte Winkel**, die man üblicherweise durch das Symbol ⊾ kennzeichnet. Ein Schenkel eines rechten Winkels steht, wie man sagt, „normal" zum anderen. Die vielfach übliche 90-fache Teilung des rechten Winkels führt zum sogenannten **„Altgrad"**.

Die Bezeichnung „Altgrad" rührt daher, dass in manchen Bereichen der Geodäsie (Landvermessung) eine 100-fache Teilung in „Neugrade" eingeführt worden ist. Da der ehemalige **„Neugrad"** nun **„Gon"** heißt, ist die Kennzeichnung „Alt-" überflüssig geworden: 1 Grad ist eindeutig $\frac{1}{90}$ des rechten Winkels.

Ein Grad wird bei den jetzt üblichen Rechengeräten weiter dezimal unterteilt und nicht mehr — wie es früher geschehen ist — in je 60 Minuten zu je 60 Sekunden. Zum Rechenvorteil der dezimalen Unterteilung kommt noch, dass nicht mehr die Gefahr der Verwechslung mit den ebenso genannten kleinen Zeiteinheiten besteht.

Beispiel:
Man verwandle **a)** 312°12' **b)** 61°33'36" in Dezimalgrad.

Lösung:

a) $\left(\frac{12}{60}\right)^{\circ} = 0{,}2^{\circ} \Leftrightarrow \mathbf{312^{\circ}12' = 312{,}2^{\circ}}$

b) $\left(\frac{36}{60}\right)' = 0{,}6' \Leftrightarrow 33'36'' = 33{,}6' \Leftrightarrow \left(\frac{33{,}6}{60}\right)^{\circ} = 0{,}56^{\circ} \Leftrightarrow \mathbf{61^{\circ}33'36'' = 61{,}56^{\circ}}$

Beispiel:
Man verwandle **a)** 17,4° **b)** 91,58° in Grad, Minuten und Sekunden.

Lösung:

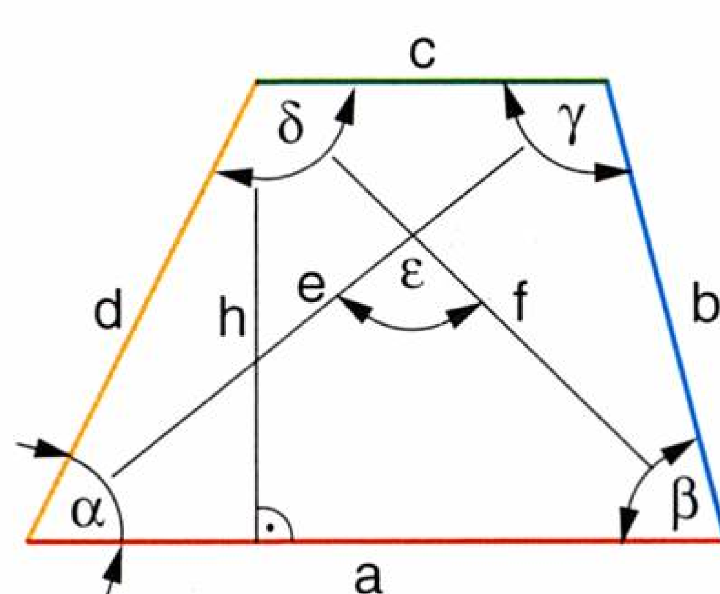
a) $0{,}4 \cdot 60 = 24 \Leftrightarrow \mathbf{17{,}4^{\circ} = 17^{\circ}24'}$

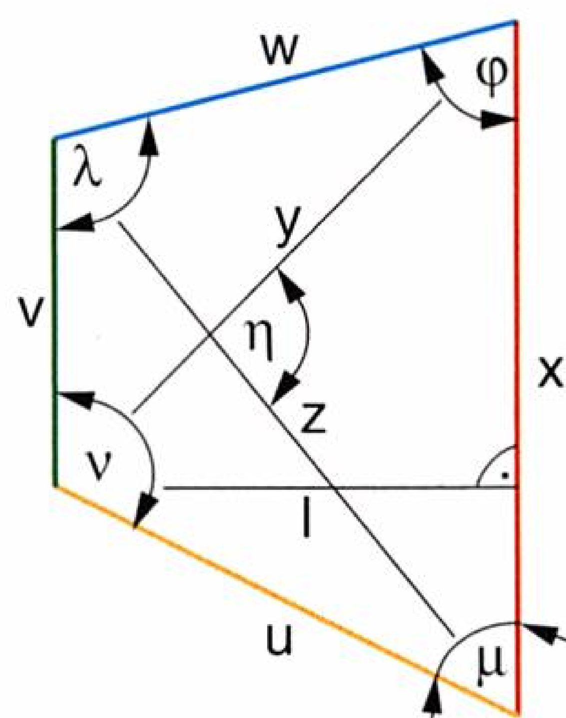
b) $0{,}58 \cdot 60 = 34{,}8 \Leftrightarrow 0{,}8.60 = 48 \Leftrightarrow \mathbf{91{,}58^{\circ} = 91^{\circ}34'48''}$

3. Kongruenz und Ähnlichkeit

Definition:
Zwei ebene Figuren sind **kongruent** (deckungsgleich), wenn sie in **Größe** und **Gestalt** überein stimmen.
Für kongruente Figuren verwenden wir das Zeichen „≅“.
Insbesondere sind Figuren dann kongruent, wenn sie in den entsprechenden Seiten und Winkeln überein stimmen.

Beispiel:
Welche Seiten und welche Winkel der beiden kongruenten Figuren gehören zusammen?





Lösung:

$a \leftrightarrow x,\ b \leftrightarrow w,\ c \leftrightarrow v,\ d' \leftrightarrow u,\ e \leftrightarrow z,\ f \leftrightarrow y,$

$h \leftrightarrow l,\ \alpha \leftrightarrow \mu,\ \beta \leftrightarrow \varphi,\ \gamma \leftrightarrow \lambda, \delta \leftrightarrow \upsilon,\ \varepsilon \leftrightarrow \eta$

Der Begriff **„Kongruenz“** ist eindeutig. Er ist auf den Bereich der Geometrie beschränkt und kann daher kaum missverstanden werden. Anders ist das beim Begriff **„Ähnlichkeit“**.

Man versteht es in ganz verschiedener Weise, wenn man sagt:
„Peter sieht seinem Vater ähnlich“ oder „Diese beiden Rechtecke sind ähnlich“.

Über Familienähnlichkeit soll hier nicht gesprochen werden, die ist nicht genau definierbar. Sehr wohl definiert ist der Begriff aber in der Geometrie.

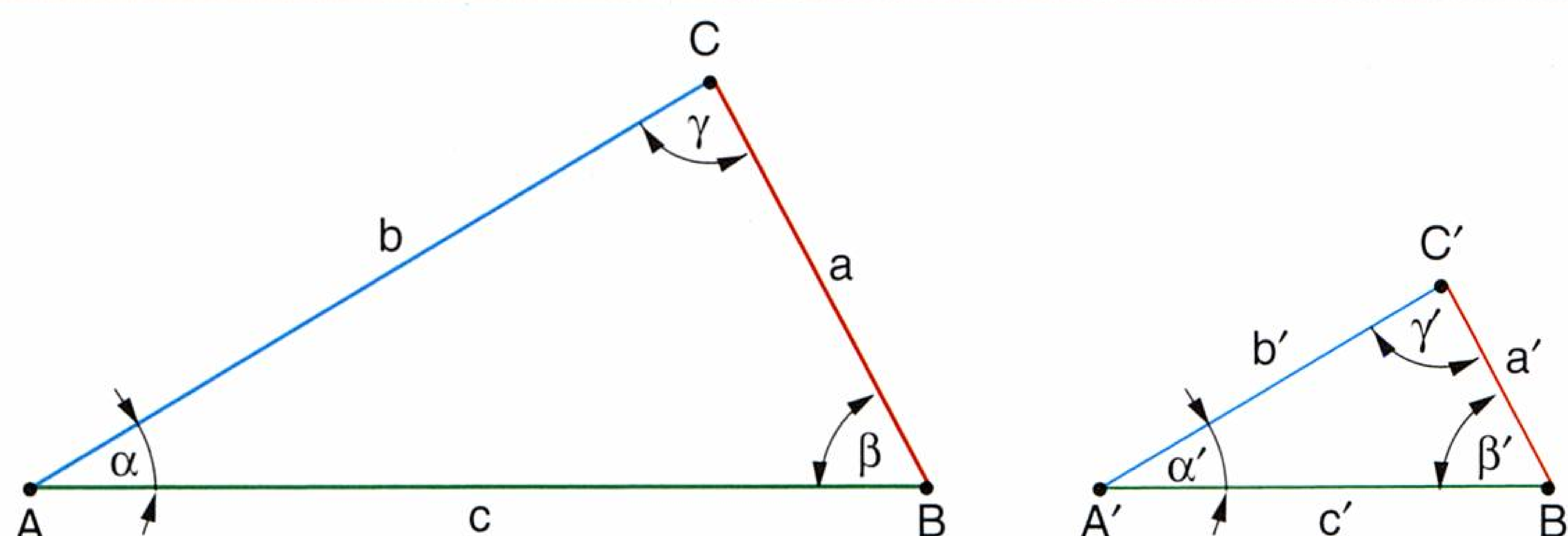
Sollen z. B. zwei Rechtecke ähnlich sein, dann müssen sie im Verhältnis ihrer Seiten überein stimmen. Alle Zeichen-, Schreib- und sonstigen Papiere im Normformat veranschaulichen die Ähnlichkeit, da bei ihnen, ohne Rücksicht auf die Größe, das Verhältnis ihrer Seiten $1:\sqrt{2}$ lautet.

Mit Ähnlichkeit hat man es immer zu tun, wenn von einer Zeichnung (von einem Plan, einer Fotografie) eine Vergrößerung oder eine Verkleinerung hergestellt wird.

Verschieden große Quadrate sind selbstverständlich ähnlich, ebenso gleichseitige Dreiecke, Kreise und andere regelmäßige Figuren.

Definition:
Dreiecke (bzw. ebene Figuren, die aus Dreiecken zusammengesetzt sind) heißen **ähnlich**, wenn sie in entsprechenden Winkeln überein stimmen. Für ähnliche Figuren verwenden wir das Zeichen „∼“.

Beispiel:
Man begründe, warum die dargestellten Dreiecke ähnlich sind!



Lösung:

Durch Abmessen der Winkel und Seitenlängen ergibt sich:

a = 2,6 cm	a′ = 1,3 cm	$\alpha = 30° = \alpha'$
b = 4,5 cm	b′ = 2,25 cm	$\beta = 60° = \beta'$
c = 5,2 cm	c′ = 2,6 cm	$\gamma = 90° = \gamma'$

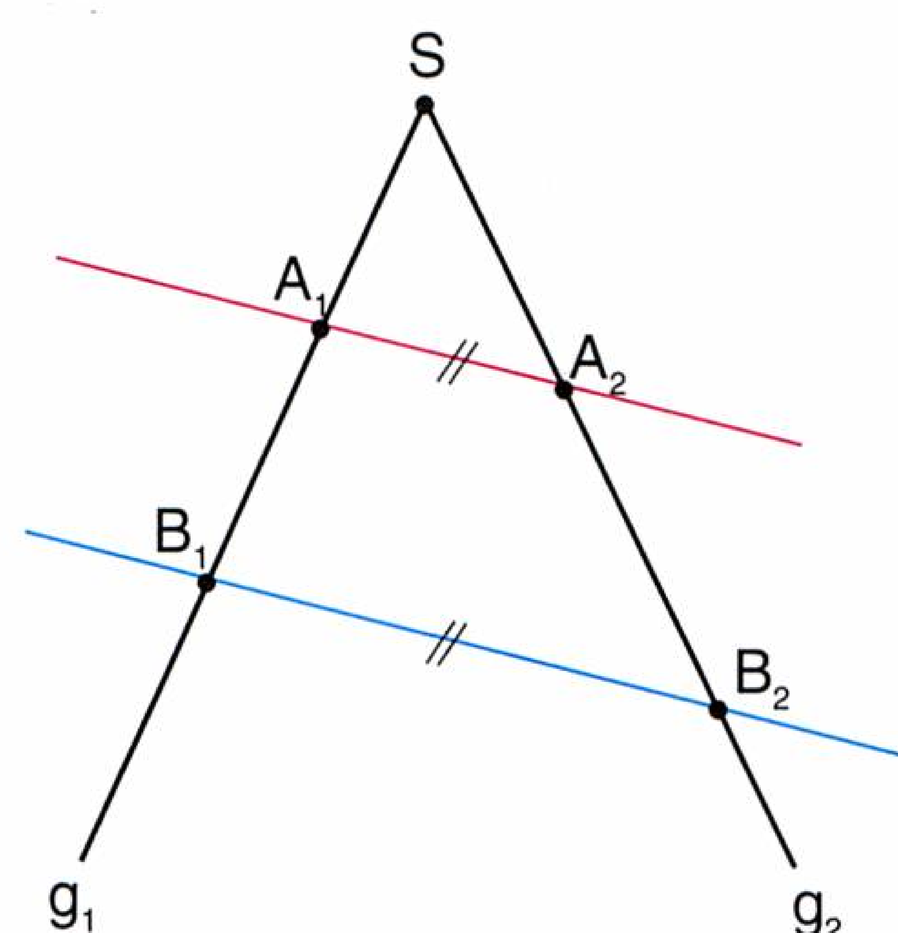
Wir erkennen, dass die Dreiecke in den entsprechenden Winkeln, entsprechend der Messgenauigkeit, überein stimmen.
Somit gilt: Die dargestellten Dreiecke sind ähnlich!

Ferner erkennen wir: $\frac{a}{a'} = \frac{2,6}{1,3} = 2$, $\frac{b}{b'} = \frac{4,5}{2,25} = 2$, $\frac{c}{c'} = \frac{5,2}{2,6} = 2 \Rightarrow$ Das Verhältnis entsprechender Seiten ist konstant und beträgt 2.

Einige Fragen zur „Ähnlichkeit"...

- Zwei Vierecke stimmen in den Verhältnissen ihrer Seiten überein:
  a : b : c : d = a′ : b′ : c′ : d′
  Wie lässt sich anschaulich zeigen, dass die Erfüllung dieser Proportion noch keine Ähnlichkeit bedingt? (Man denke an gelenkig verbundene Stäbe.)
- Wie kann an zwei Vierecken gezeigt werden, dass sie in ihren Winkeln überein stimmen mögen, ohne ähnlich zu sein?
- Es ist zu überlegen, ob zur Prüfung der Ähnlichkeit zweier Dreiecke alle drei Winkel verglichen werden müssen.

Für viele geometrische Überlegungen sind die sogenannten **„Strahlensätze"** von großer Bedeutung:



In der Zeichnung wird die Parallelität durch // angedeutet.

1. Strahlensatz:

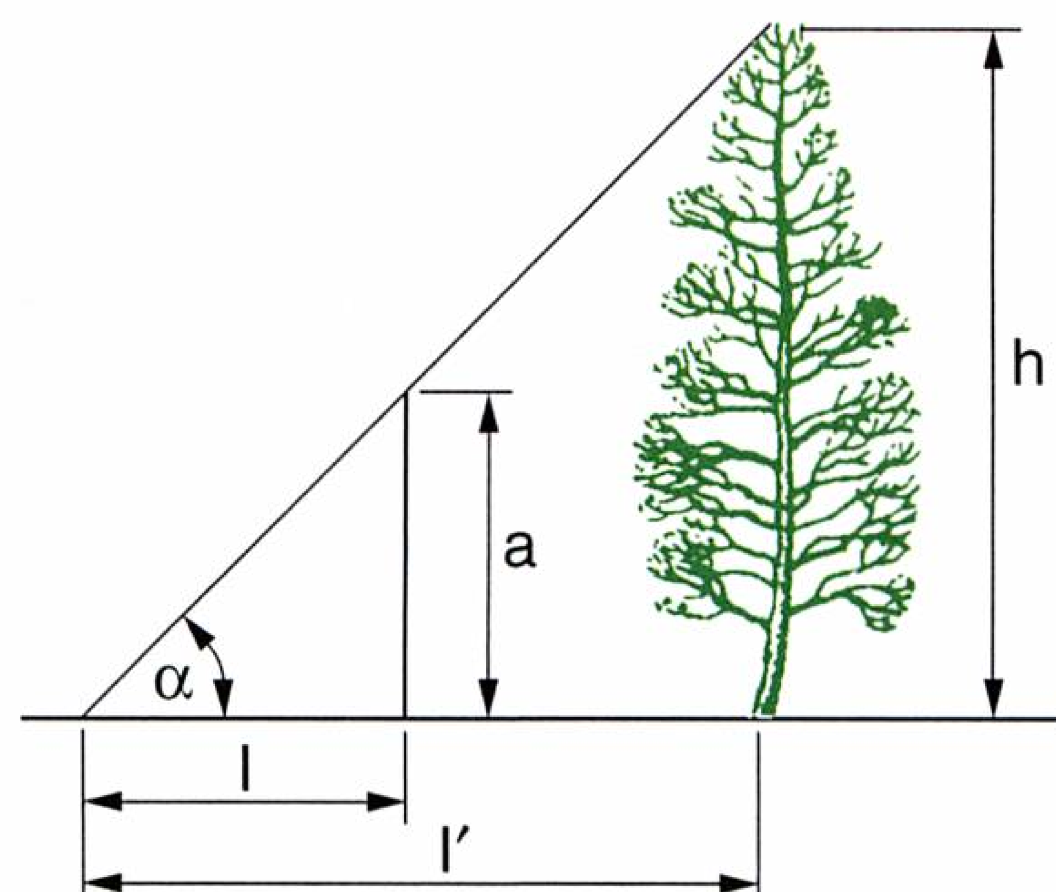
Werden die Schenkel eines Winkels von parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte des einen Schenkels wie die zugeordneten Abschnitte des anderen Schenkels.

$\overline{SA_1} : \overline{SB_1} = \overline{SA_2} : \overline{SB_2}$ $\qquad$ $\overline{SA_1} : \overline{A_1B_1} = \overline{SA_2} : \overline{A_2B_2}$

2. Strahlensatz:

Werden die Schenkel eines Winkels von parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich die Parallelabschnitte zwischen den Schenkeln wie die entsprechenden vom Scheitel aus gemessenen Abschnitte auf den Schenkeln.

$\overline{A_1A_2} : \overline{B_1B_2} = \overline{SA_1} : \overline{SB_1}$ $\qquad$ $\overline{A_1A_2} : \overline{B_1B_2} = \overline{SA_2} : \overline{SB_2}$



Beispiel:
Mit Hilfe einer a m langen Messlatte ist die Höhe h eines Baumes zu bestimmen!

Bemerkung: Es wird ein horizontales Gelände voraus gesetzt. Der Baum steht senkrecht auf der Bodenlinie.

Lösung: (vgl. nebenstehende Figur)

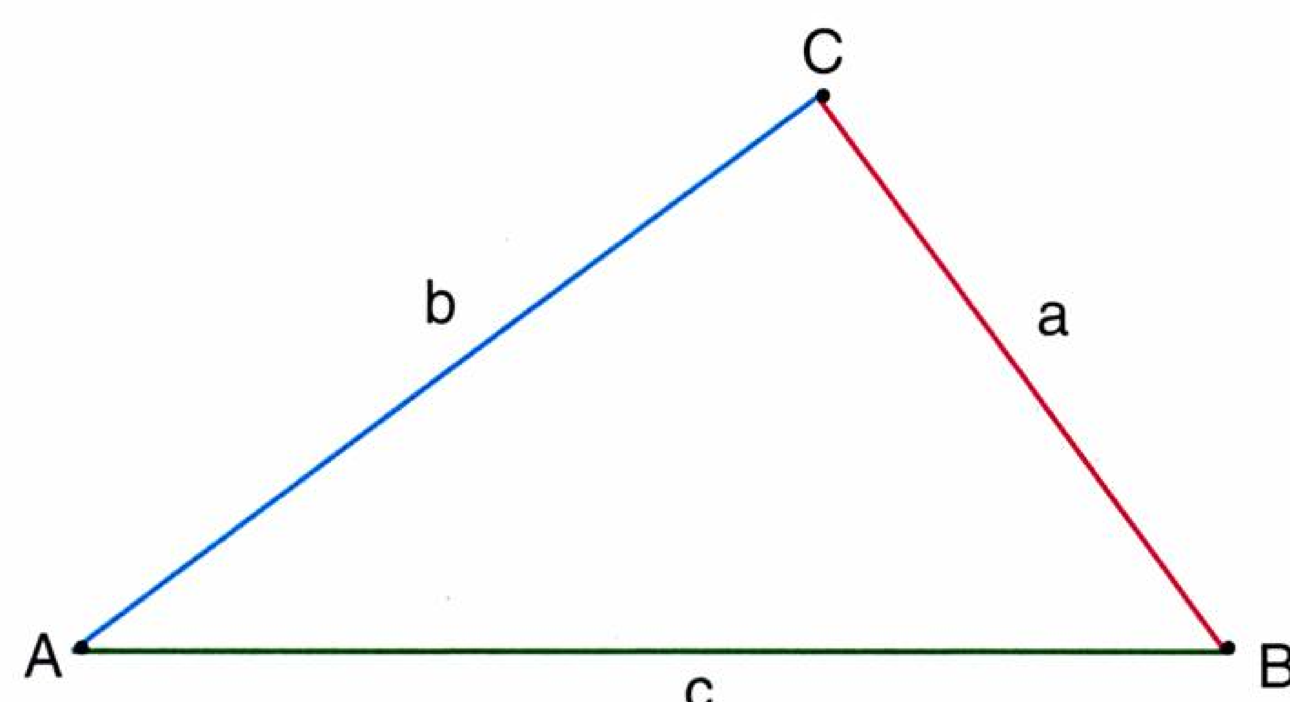
Man stellt die Messlatte so auf, dass bei der Beobachtung von P aus die Spitze der Messlatte mit der Baumspitze zur Deckung kommt. Dann misst man l und l'. Unter Verwendung des 2. Strahlensatzes gilt:

$a : h = l : l' \Leftrightarrow h = \frac{al'}{l}$

Die Strahlensätze können auch zum **Vergrößern und Verkleinern von Figuren** verwendet werden. Im folgenden Beispiel wird das Vergrößern gezeigt:

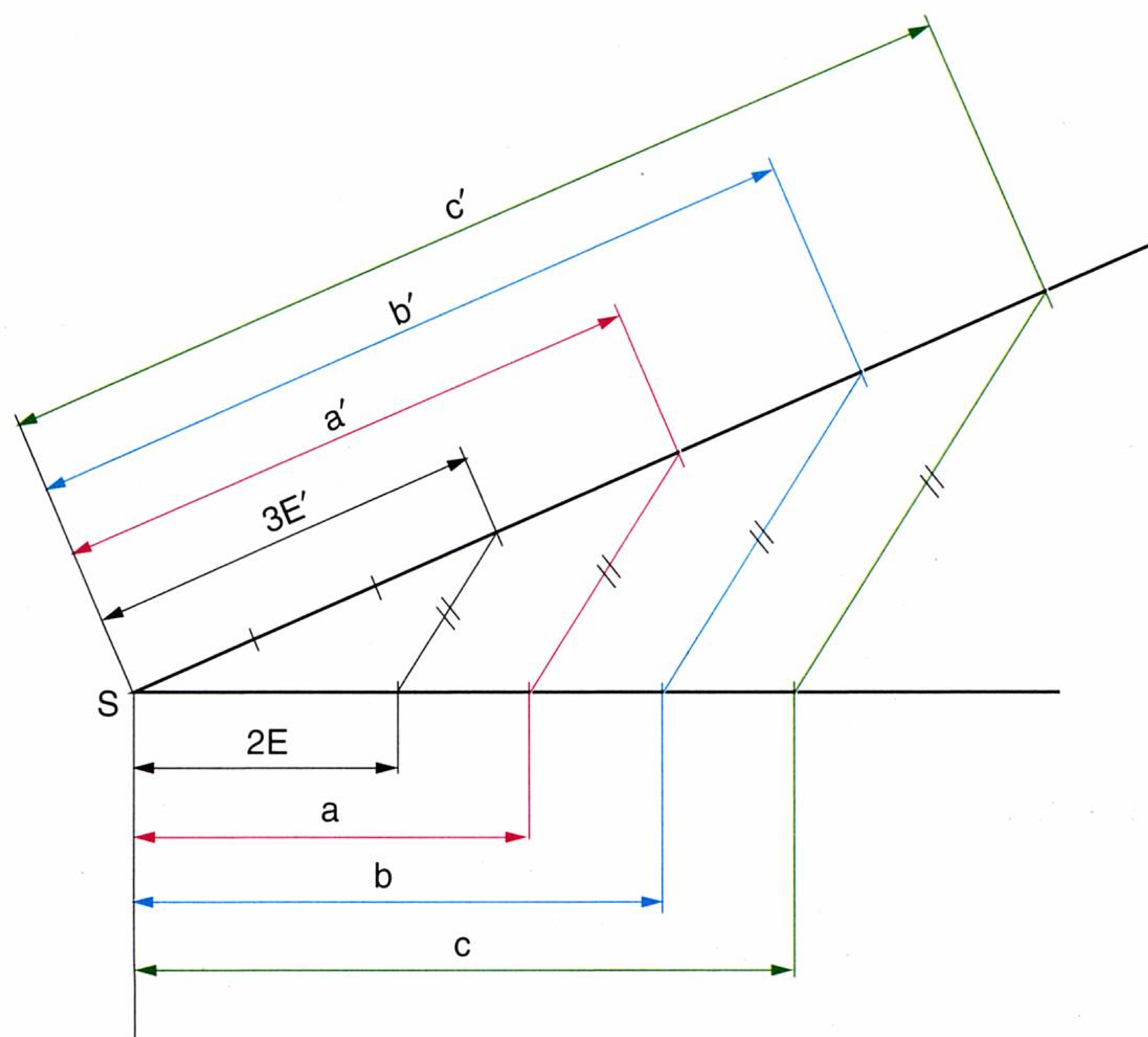
Beispiel:

Man vergrößere das Dreieck mit den Seiten a = 3 cm, b = 4 cm und c = 5 cm im Verhältnis 2 : 3.



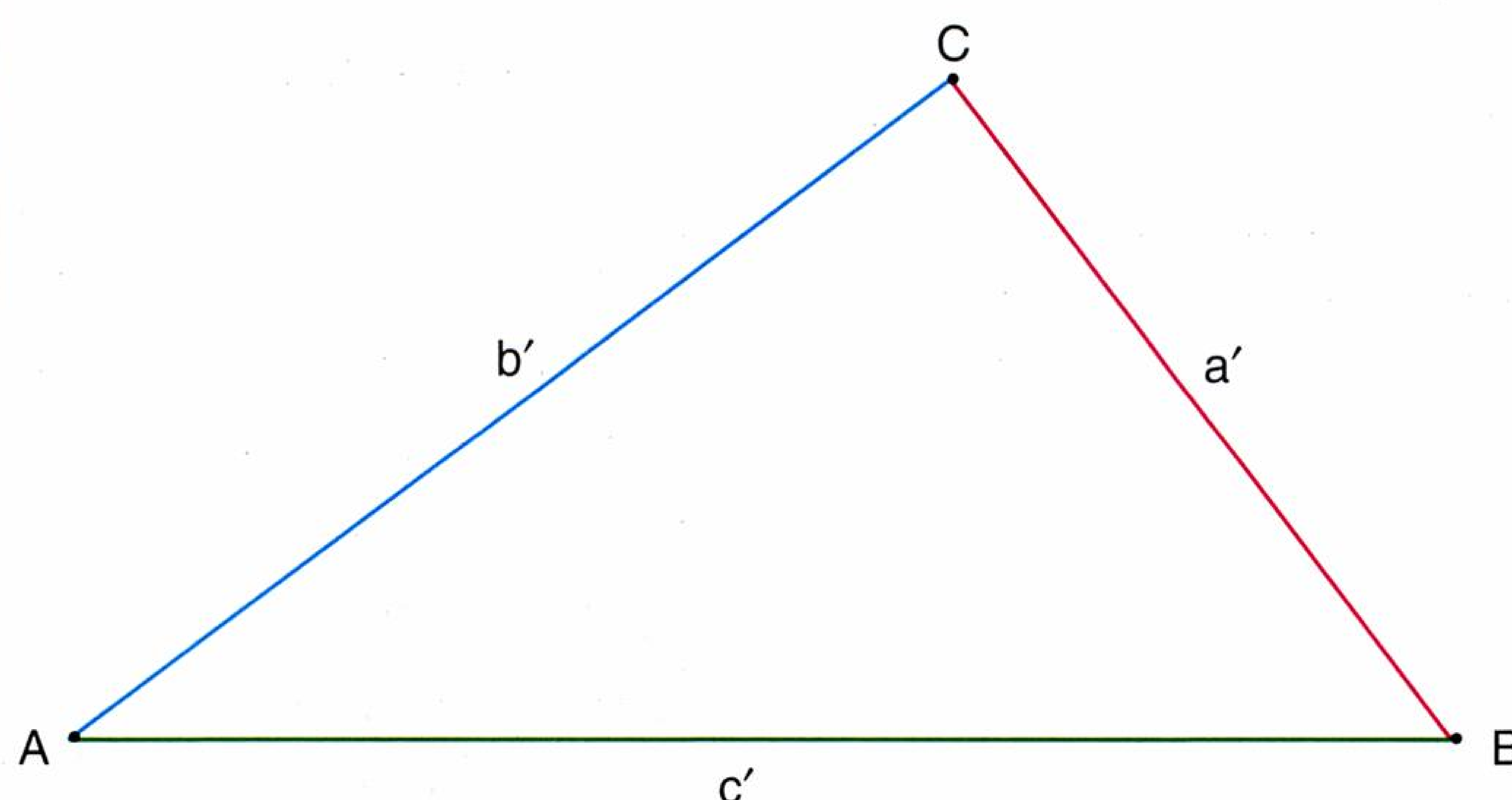
Lösung:

Wir zeichnen von einem Punkt S ausgehend zwei in einem beliebigen Winkel zueinander liegende Strahlen ein und tragen auf einem Strahl zwei Einheiten und auf dem anderen Strahl drei Einheiten ab.



Auf dem ersten Strahl werden die ursprünglichen Längen aufgetragen. Die entsprechenden Vergrößerungen erhält man durch Parallelverschiebung — vgl. nebenstehende Figur.

Wir können die Seitenlängen des vergrößerten Dreieck ablesen und das Dreieck zeichnen.



Wie ist bei einer Verkleinerung vorzugehen? Angenommen, es soll eine Figur im Verhältnis 3 : 2 verkleinert werden. In diesem Fall wären zunächst auf dem ersten Strahl drei Einheiten und auf dem zweiten Strahl zwei Einheiten aufzutragen.

Die weitere Vorgangsweise (Auftragen der ursprünglichen Längen, Parallelverschiebung) ist analog zum Vergrößern.

4. Symmetrie

Betrachten wir die folgende Fotografie:



Die Landschaft (= Ausgangsfigur) und ihr Spiegelbild im See (= Bildfigur), stimmen rein optisch überein. Man kann sich an der mit → bezeichneten Stelle eine Gerade g denken, an der die Spiegelung erfolgt. Diese Gerade g heißt **Symmetrieachse**.

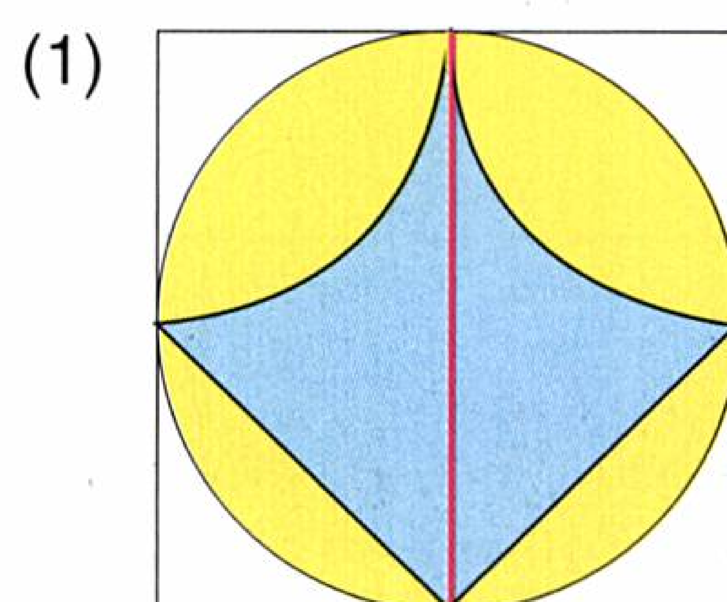
Eine ebene Figur heißt **achsensymmetrisch**, wenn sie durch eine Gerade in zwei spiegelbildlich gleiche Hälften zerlegt werden kann.

Oftmals sind **Ornamente**[1] und **Fliesenmuster** achsensymmetrische Figuren.

Die Landschaft (= Ausgangsfigur) und ihr Spiegelbild im See (= Bildfigur) sind **kongruent** (vgl. S. 167). Die **Spiegelung** an einer Geraden ist eine **Kongruenzabbildung**.
Weitere Beispiele für Kongruenzabbildungen: Schiebung, Drehung

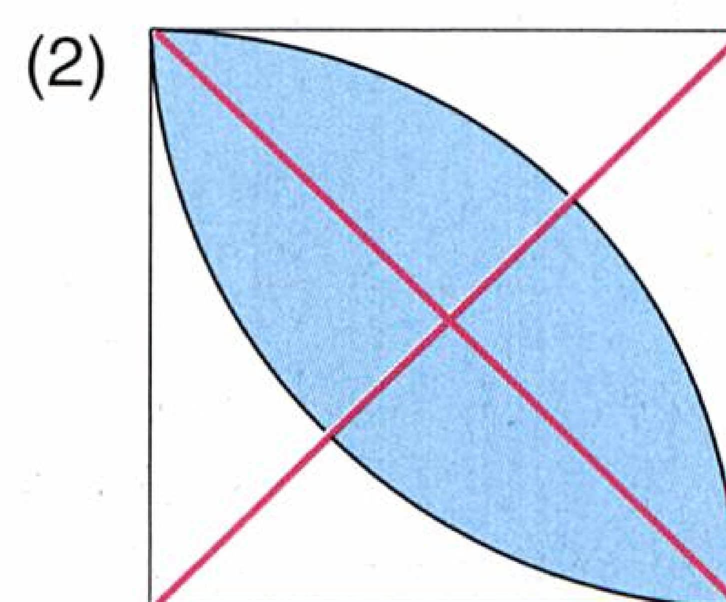
Bemerkung: In den Figuren **(1)** bis **(3)** sind die Symmetrieachsen rot eingezeichnet.

(1)



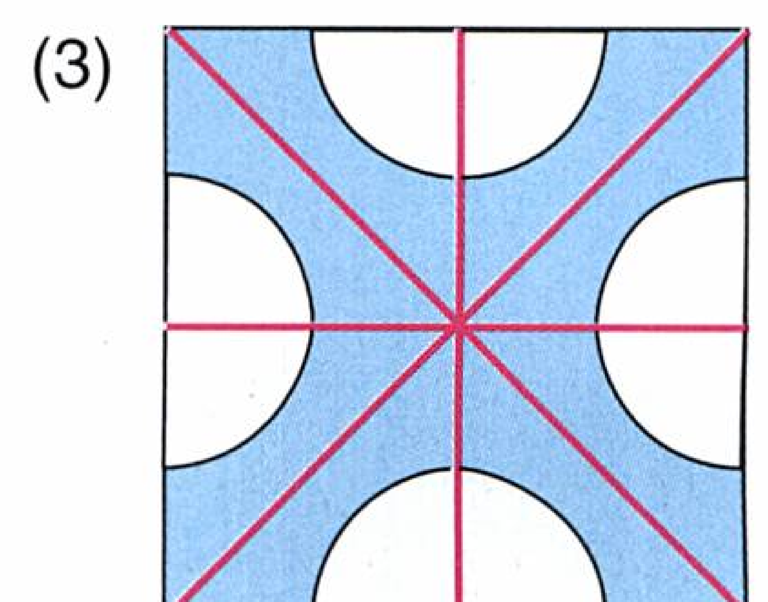
Figur **(1)** hat **eine** Symmetrieachse.

(2)



Figur **(2)** hat **zwei** Symmetrieachsen.

(3)

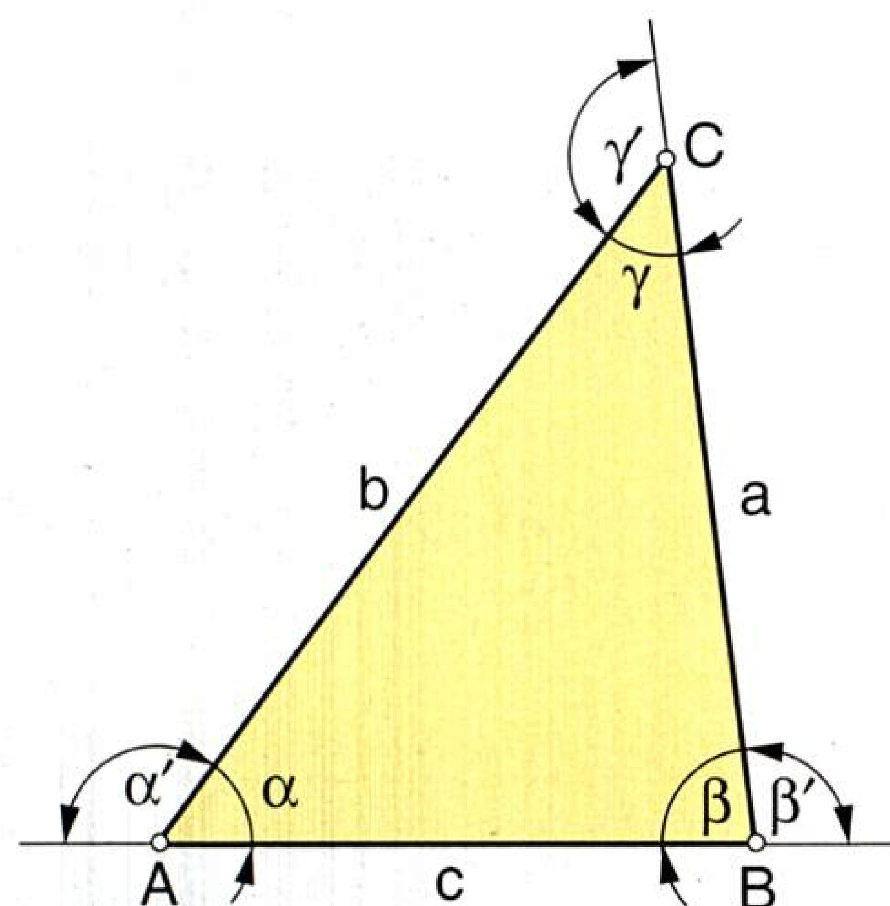


Figur **(3)** hat **vier** Symmetrieachsen.

[1]) Ornament (lat.): Verzierung, Verzierungsmotiv.

5. Dreieck

5.1 Allgemeines Dreieck



Bezeichnungen:
A, B, C ..... Eckpunkte (Ecken)
a, b, c ..... Seiten
α, β, γ ..... Innenwinkel
α', β', γ' ..... Außenwinkel

Die Bezeichnung wird so gewählt, dass die Eckpunkte alphabetisch gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen werden.

Winkelbeziehungen

Die Summe der Innenwinkel ist in jedem Dreieck 180°.

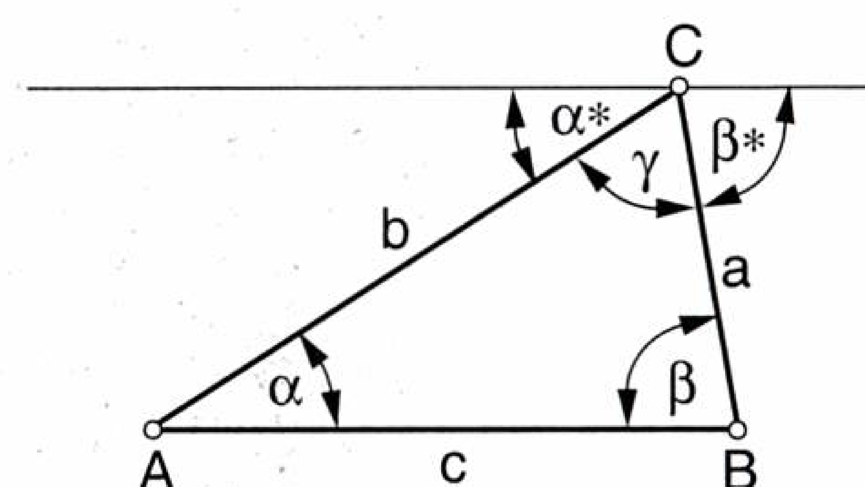
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Beweis:

Betrachten wir Dreieck (1), so erkennen wir:

$\alpha^* = \alpha,\ \beta^* = \beta,\quad \alpha^* + \beta^* + \gamma = 180° \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180°$

(1)



Jeder Außenwinkel im Dreieck ist gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.

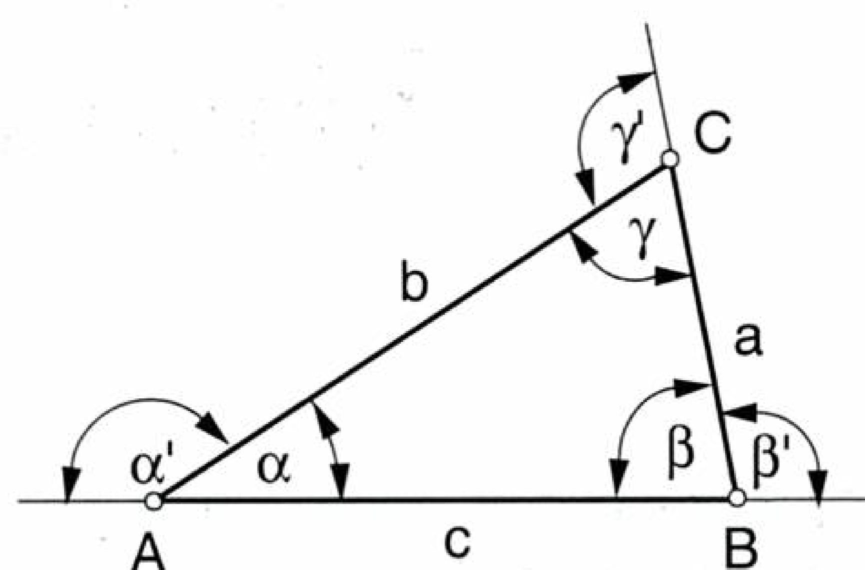
Beweis:

Im Hinblick auf das Dreieck (2) gilt:

$$\left.\begin{aligned}\alpha + \alpha' &= 180°\\ \alpha + \beta + \gamma &= 180°\end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha' = \beta + \gamma \qquad \left.\begin{aligned}\beta + \beta' &= 180°\\ \beta + \alpha + \gamma &= 180°\end{aligned}\right\} \Rightarrow \beta' = \alpha + \gamma$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma + \gamma' &= 180°\\ \gamma + \alpha + \beta &= 180°\end{aligned}\right\} \Rightarrow \gamma' = \alpha + \beta$$

(2)



Die Summe der Außenwinkel ist in jedem Dreieck 360°.

$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$

Beweis:

Unter Verwendung des Dreiecks (2) gilt:

$$\left.\begin{aligned}\alpha + \alpha' &= 180°\\ \beta + \beta' &= 180°\\ \gamma + \gamma' &= 180°\end{aligned}\right\}$$

Durch Addition erhält man: $\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = 3 \cdot 180°$.

Aus $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ folgt: $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$.

Dreiecksungleichung

Im Dreieck ist die Summe der Längen zweier Seiten stets größer als die Länge der dritten Seite. Im Dreieck ist die Länge einer Seite stets größer als die Differenz der Längen der beiden anderen Seiten.

$a + b > c$
$b + c > a$
$a + c > b$

Um diesen Zusammenhang zu beweisen, braucht man nur die in der Außenspalte gegebenen Ungleichungen umzuformen:

$a > c - b \qquad b > a - c \qquad c > b - a$

$b > c - a \qquad c > a - b \qquad a > b - c$

Kongruenz und Ähnlichkeit

Zwei Dreiecke sind **kongruent**, wenn sie
(1) in den drei Seiten überein stimmen (SSS-Satz) oder
(2) in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel überein stimmen (SWS-Satz) oder
(3) in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüber liegenden Winkel überein stimmen (SSW-Satz) oder
(4) in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln überein stimmen (WSW-Satz).

Zwei Dreiecke sind **ähnlich**, wenn sie
(1) in dem Verhältnis der drei Seiten überein stimmen (SSS-Satz) oder
(2) im Verhältnis zweier Seiten und in dem von ihnen eingeschlossenen Winkel überein stimmen (SWS-Satz) oder
(3) im Verhältnis zweier Seiten und in dem der jeweils größeren Seite gegenüber liegenden Winkel überein stimmen (SSW-Satz) oder
(4) in ihren Winkeln überein stimmen.

Wie kann man sich die Kongruenz- und Ähnlichkeitssätze leicht merken?

Bei den Kongruenzsätzen em-pfiehlt sich eine Ordnung, die von drei Seiten ausgeht und über zwei Seiten zu einer Seite fortschreitet, analog zur Gepflogenheit, Polynome nach Potenzen zu ordnen.

Die Ähnlichkeitssätze sind sprachlich schwieriger. Es ist aber günstiger, sie ganz an die Kongruenzsätze anzulehnen, also sie
a) gleich zu ordnen und
b) gleichartig zu formulieren.
Hierbei muss bloß die „Seitengleichheit" durch die „Verhältnisgleichheit der Seiten" ersetzt werden.

Die Kongruenzsätze haben zweierlei Bedeutung:

— Sie geben Auskunft über die grundlegenden Arten von Angaben, mit deren Hilfe ein Dreieck bestimmt ist, d. h. konstruiert oder berechnet werden kann. Der erste Kongruenzsatz könnte demnach auch lauten: Ein Dreieck ist durch die Angabe der drei Seiten eindeutig festgelegt. Analog können auch die anderen Sätze umformuliert werden.

— Die Kongruenzsätze gestatten, aus der Übereinstimmung dreier Größen auf Kongruenzen zu schließen und von da aus auf die Gleichheit weiterer Größen, über die anfangs keine Information vorlag. Eine so gewonnene Kenntnis kann dann als entscheidender Teil einer Beweisführung dienen.

Analog ist die Bedeutung der Ähnlichkeitssätze.

Bei den meisten Anwendungen kann man auf Grund gleicher Winkel auf Ähnlichkeit schließen und damit eine Aussage über Seitenverhältnisse machen.

Einige merkwürdige Punkte

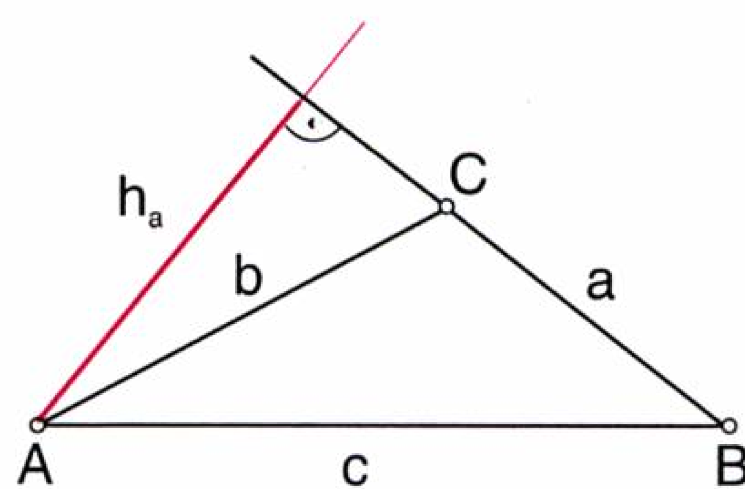
Höhenlinien sind Gerade, die auf eine Dreieckseite normal stehen und durch den gegenüber liegenden Eckpunkt verlaufen.

Die **Höhen** h_a, h_b, h_c sind der Normalabstand von einer Seite zum gegenüberliegenden Eckpunkt.

In der Praxis wird zwischen Höhen und Höhenlinien oftmals nicht unterschieden.

Beispiel:
Gegeben ist das Dreieck a = 1,5 cm, b = 2 cm, c = 3 cm.
Man zeichne die Höhenlinien h_a, h_b und h_c!

Lösung:

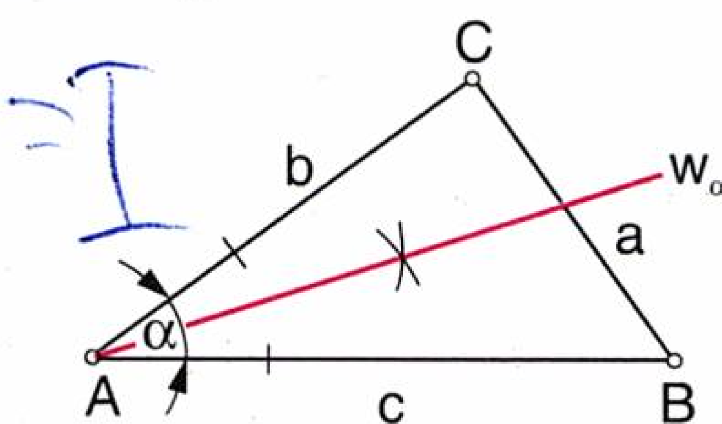


Der Konstruktionsgang ist aus der Zeichnung ersichtlich.

Die **Winkelsymmetralen** w_α, w_β, w_γ sind Gerade, die die Innenwinkel des Dreiecks halbieren.

Beispiel:
Gegeben ist das Dreieck a = 1,5 cm, b = 2 cm, c = 2,5 cm.
Man zeichne die Winkelsymmetralen w_α, w_β und w_γ!

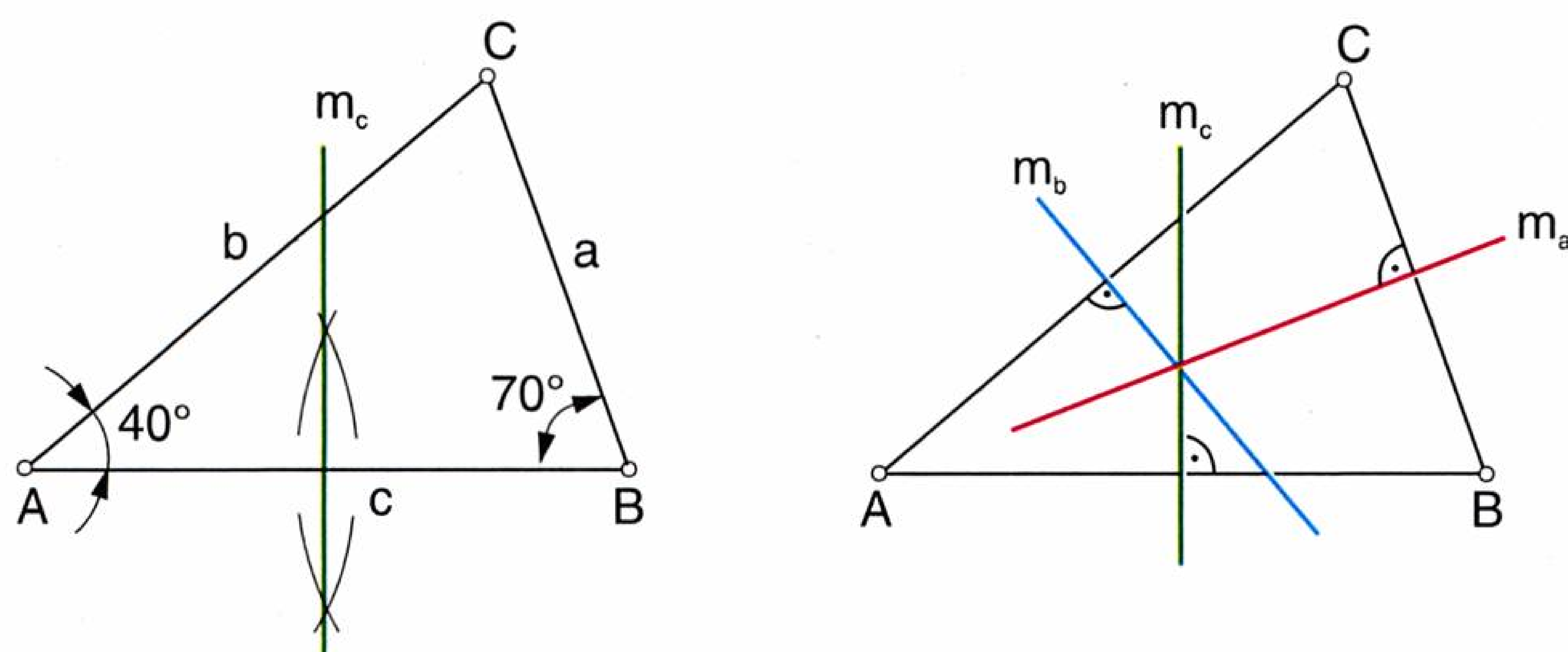
Lösung:



Der Konstruktionsgang ist aus der Zeichnung ersichtlich.

Beispiel:
Gegeben ist das Dreieck $c = 3$ cm, $\alpha = 40°$, $\beta = 70°$.
Man zeichne die Seitensymmetralen m_a, m_b, und m_c!

Lösung:

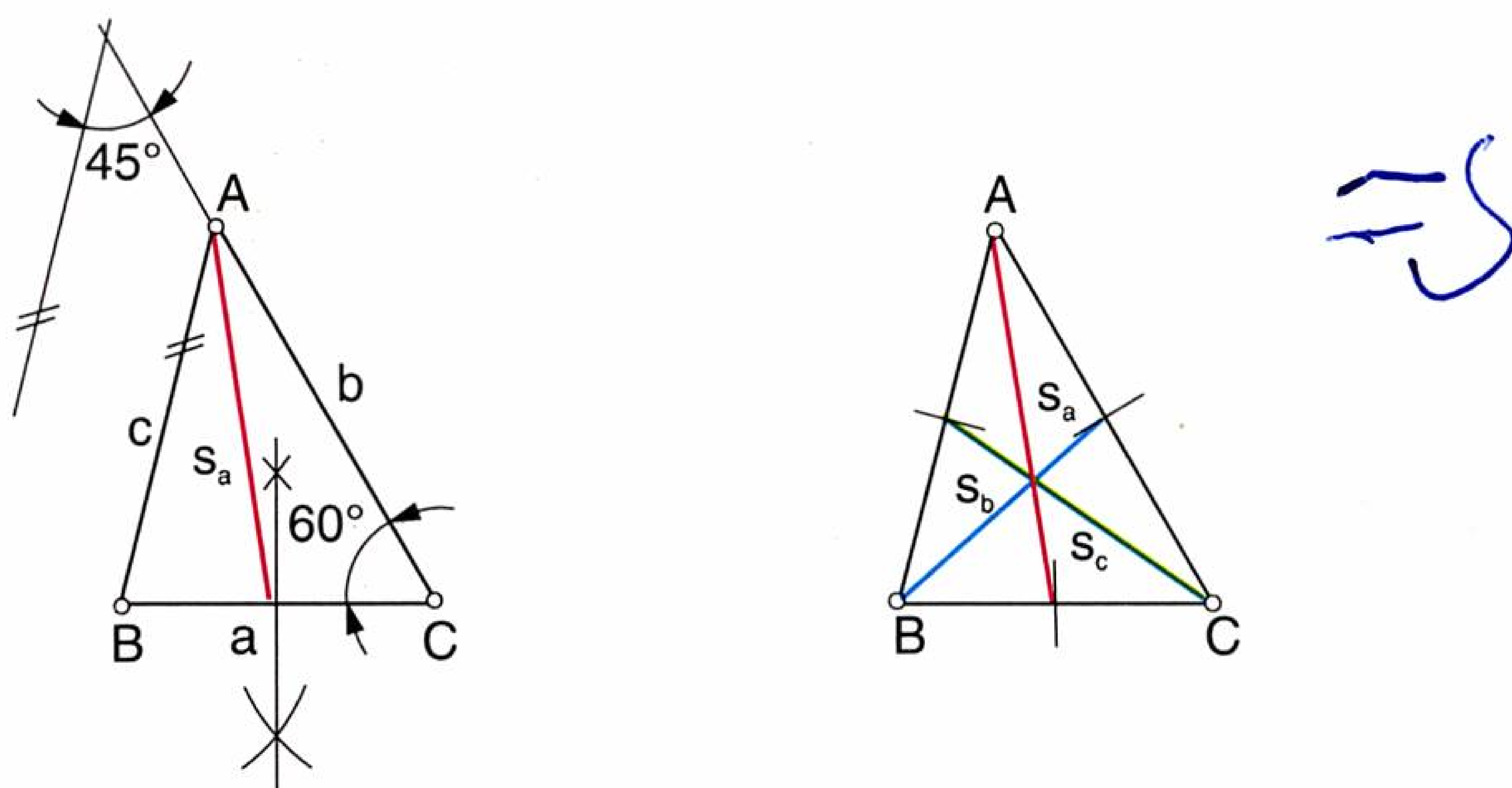


Der Konstruktionsgang ist aus der Zeichnung ersichtlich.

Die **Seitensymmetralen** m_a, m_b, m_c sind die Normalen durch den Mittelpunkt einer Seite.

Beispiel:
Gegeben ist das Dreieck $a = 1{,}5$ cm, $\alpha = 45°$, $\gamma = 60°$.
Man zeichne die Schwerlinien s_a, s_b, und s_c!

Lösung:



Der Konstruktionsgang ist aus der Zeichnung ersichtlich.

Die **Schwerlinien** s_a, s_b, s_c sind Gerade, die den Mittelpunkt einer Seite mit dem gegenüber liegenden Eckpunkt verbinden.

Ohne Beweis seien vier merkwürdige Punkte am Dreieck angeführt:
Im Dreieck schneiden einander die drei

(1) Höhenlinien in einem Punkt, dem **Höhenschnittpunkt H**.
(2) Winkelsymmetralen in einem Punkt, dem **Inkreismittelpunkt I**.
(3) Seitensymmetralen in einem Punkt, dem **Umkreismittelpunkt U**.
(4) Schwerlinien in einem Punkt, dem **Schwerpunkt S**.
(Der Schwerpunkt teilt die Schwerlinien im Verhältnis 2 : 1.)

Höhenschnittpunkt
Inkreismittelpunkt
Umkreismittelpunkt
Schwerpunkt

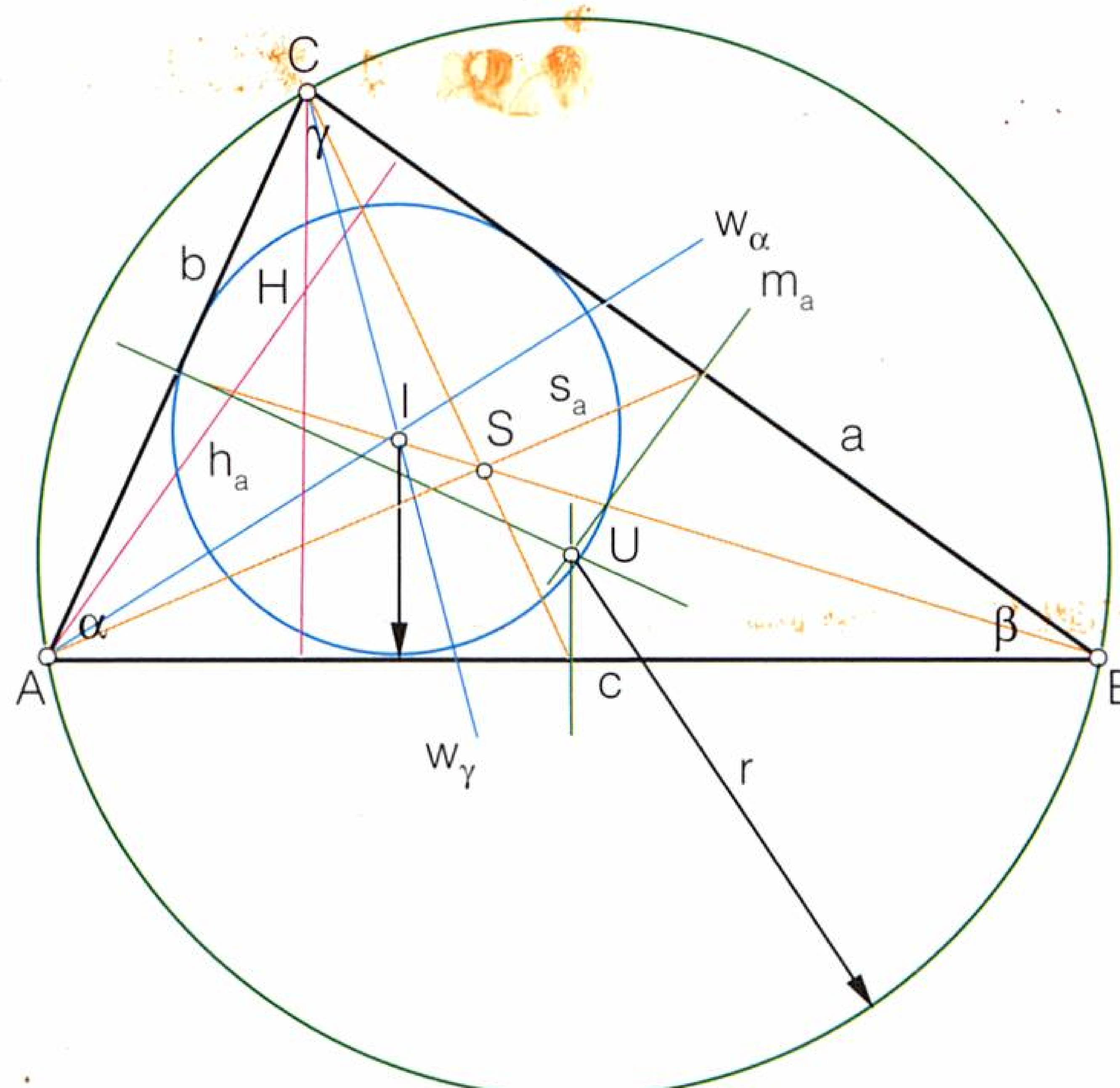
Wie viele Schnittpunkte haben „normalerweise“ drei nicht parallele Gerade? Richtig: drei Schnittpunkte!

Es mag merkwürdig erscheinen, dass einander die Höhen, Winkelsymmetralen, Seitensymmetralen und Schwerlinien eines Dreiecks jeweils in genau einem Punkt schneiden. Dies sei als mögliche Erklärung für die gewählte Bezeichnung („Einige merkwürdige Punkte“) angeführt.

Beispiel:

Gegeben ist das Dreieck a = 50 mm, b = 32 mm, c = 54 mm.
Man zeichne den **a)** Höhenschnittpunkt **b)** Inkreis **c)** Umkreis **d)** Schwerpunkt in eine Zeichnung ein!

Lösung:



Umfang- und Flächenberechnung

Bezeichnungen:
u ..... Umfang, A ..... Flächeninhalt

$$u = a + b + c$$
$$A = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

HERONsche Flächenformel: $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ für $s = \frac{u}{2}$ [1)]

HERON von Alexandria (ca.130 n. Chr.) verfasste ideale Ergänzungen zu EUKLIDs „Elementen", so z. B. Flächen- und Volumsberechnungen diverser Körper. Auf exakte Beweisführung legte er jedoch wenig Wert. Er schrieb vor allem für die Praktiker: Arbeiten über Vermessungslehre, Optik, Mechanik. HERONs Werke waren für die spätere Zeit von großer Bedeutung. Auf ihnen beruht ein wesentlicher Teil der Anwendungen der Mathematik. Die HERONsche Dreiecksformel stammt allerdings von ARCHIMEDES.

Beispiel:

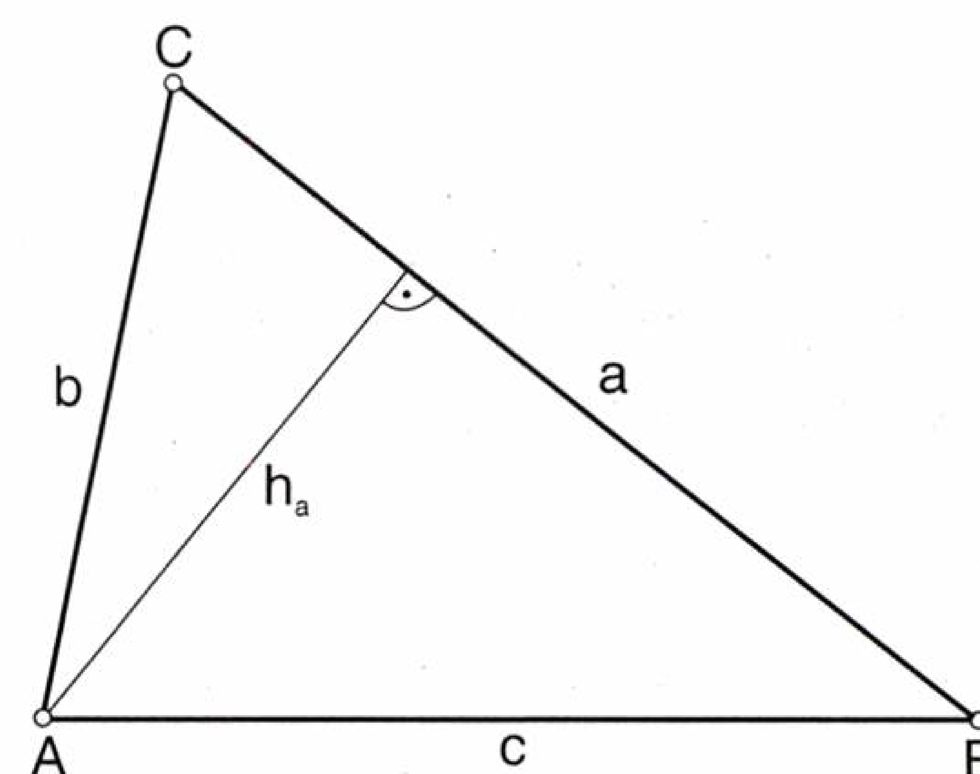
Man berechne den Flächeninhalt A und die Höhe h_a des Dreiecks mit den Seiten a = 5,6 cm, b = 3,4 cm und c = 5 cm.

Lösung:

$u = a + b + c = 5{,}6 + 3{,}4 + 5 = 14$ $\quad s = \frac{u}{2} = 7$

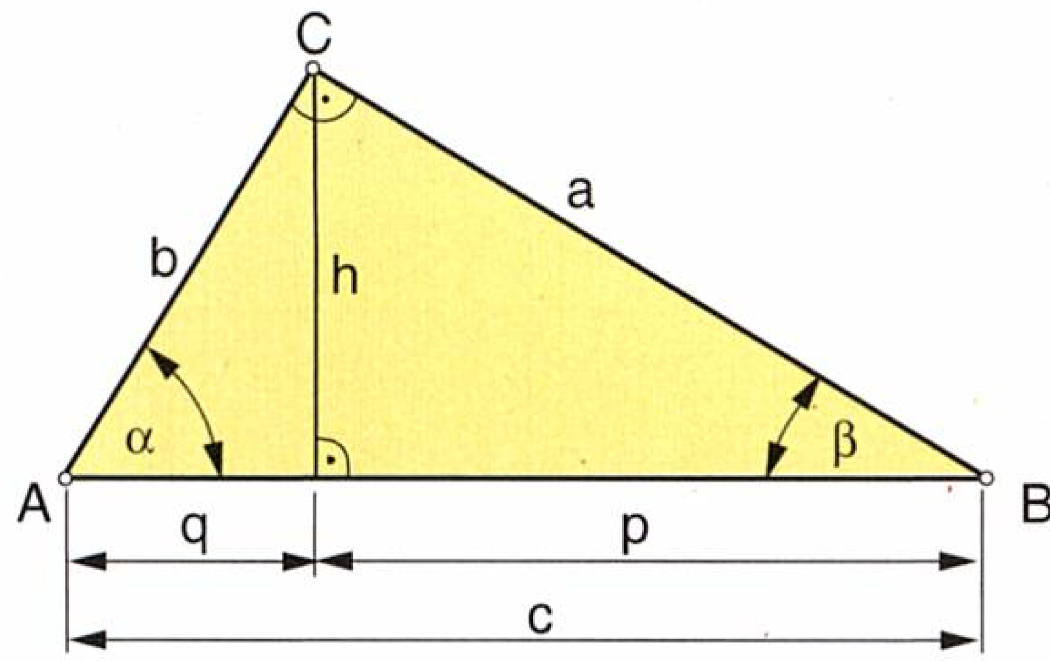
$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{7 \cdot 1{,}4 \cdot 3{,}6 \cdot 2} = \sqrt{70{,}56} = 8{,}4$ $\quad$ **$A = 8{,}4\ \text{cm}^2$**

$A = \frac{ah_a}{2} \Leftrightarrow h_a = \frac{2A}{a} = \frac{2 \cdot 8{,}4}{5{,}6} = 3$ $\quad$ **$h_a = 3\ \text{cm}$**



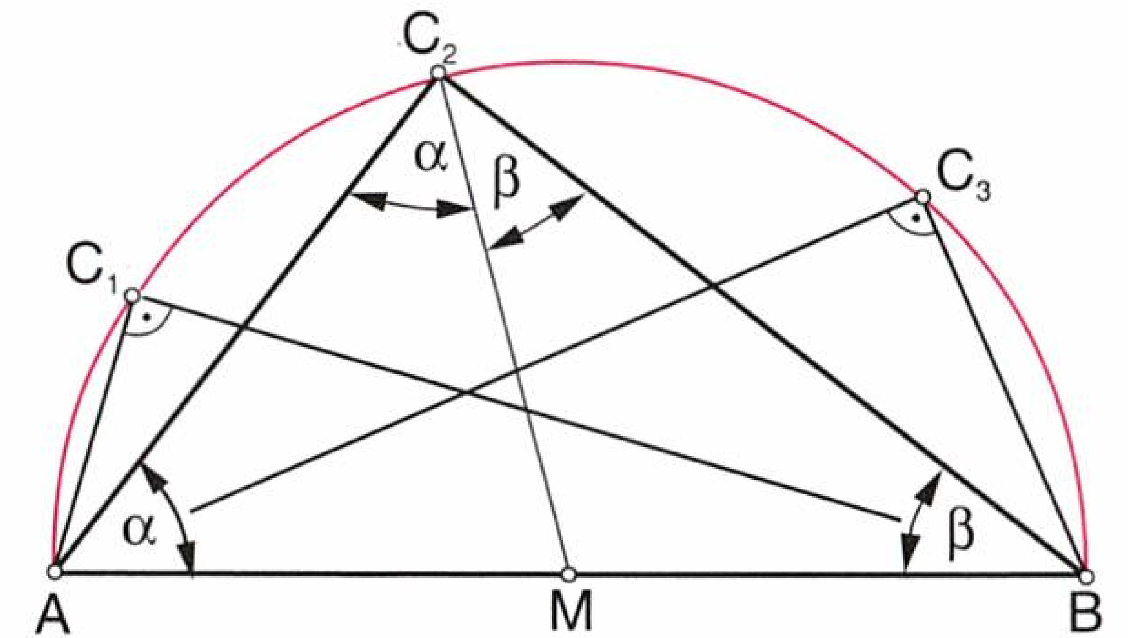
1) Der Beweis folgt drei Seiten später.

5.2 Rechtwinkeliges Dreieck (ein Winkel misst 90°)



Bezeichnungen:

a, b ..... Katheten
c ..... Hypotenuse (längste Seite)
h ..... Höhe auf c
p, q ..... Hypotenusenabschnitte



Flächenberechnung

$$A = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$$

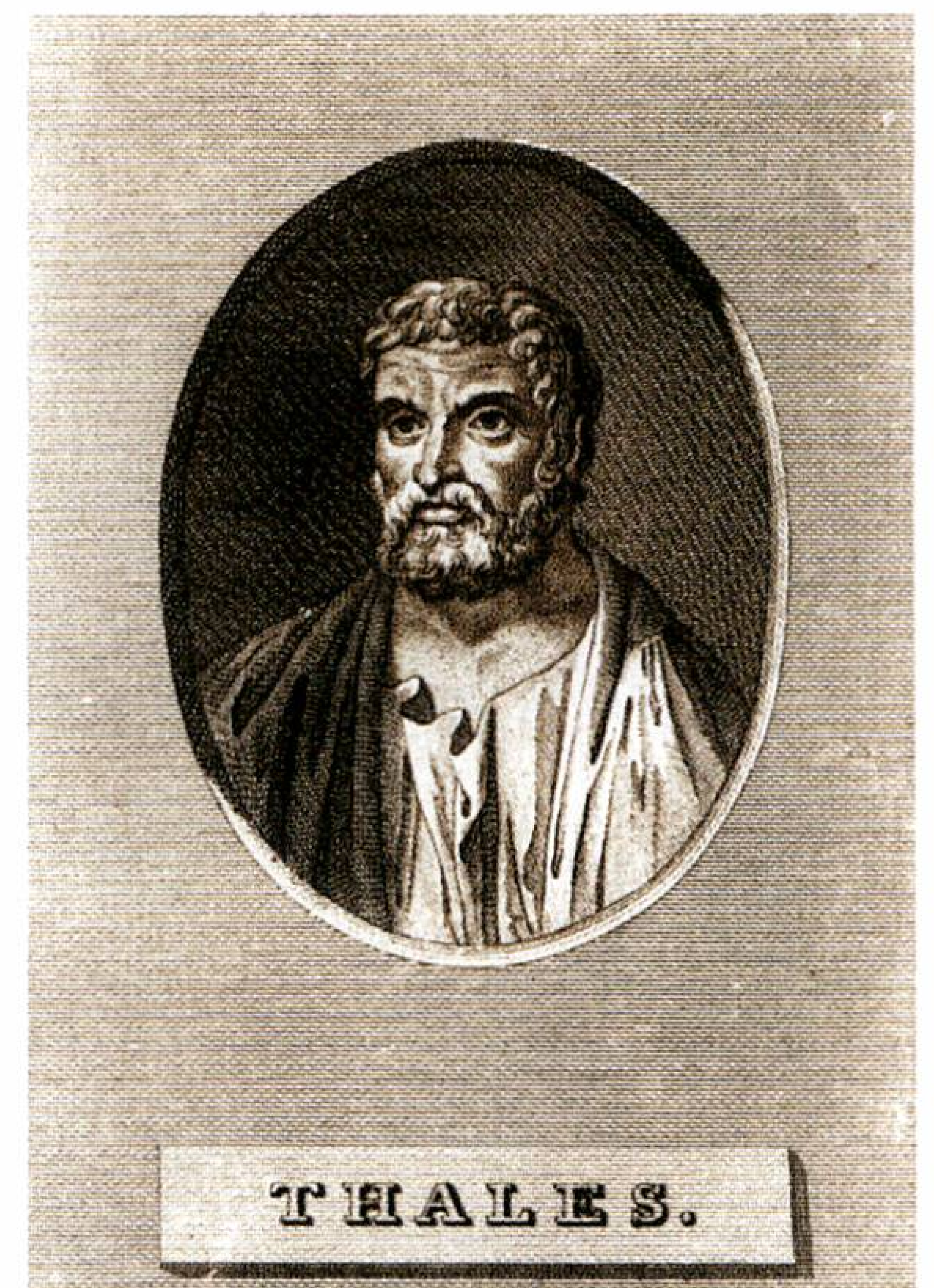
Satz des THALES:

Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel.

Beweis:

Die Dreiecke AMC_2 und MBC_2 sind gleichschenkelig $\Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180°$ bzw. $\alpha + \beta = 90°$

THALES von Milet (624—546 v. Chr.) galt bereits in der Antike als einer der „sieben Weisen“. Er ist der erste namentlich bekannte Mathematiker (und Philosoph). Er wirkte in Kleinasien und unternahm viele große Reisen, auf denen er die Wissenschaft in Ägypten und in Babylonien kennen lernte. Bei ihm finden sich — zum ersten Mal in der Geschichte — Beweise für mathematische Aussagen, wie zum Beispiel, dass ein Kreis durch einen Durchmesser halbiert wird oder dass Winkel im Halbkreis rechte Winkel sind. Er soll die Sonnenfinsternis am 8. Mai 585 v. Chr. voraus gesagt haben. Außerdem berechnete er die Höhe von Pyramiden aus der Schattenlänge und die Entfernung von Schiffen von der Küste aus der Masthöhe. THALES starb als angesehener und reicher Mann, als Begründer einer Philosophenschule in seiner Heimatstadt. Auch als Kaufmann war er sehr geschickt: Er mietete rechtzeitig vor einer großen Olivenernte sämtliche Ölpressen und zwang dadurch alle Bauern, bei ihm um viel Geld ihre Oliven zu Öl pressen zu lassen.



Sätze am rechtwinkeligen Dreieck

Im rechtwinkeligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.

Pythagoräischer Lehrsatz:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

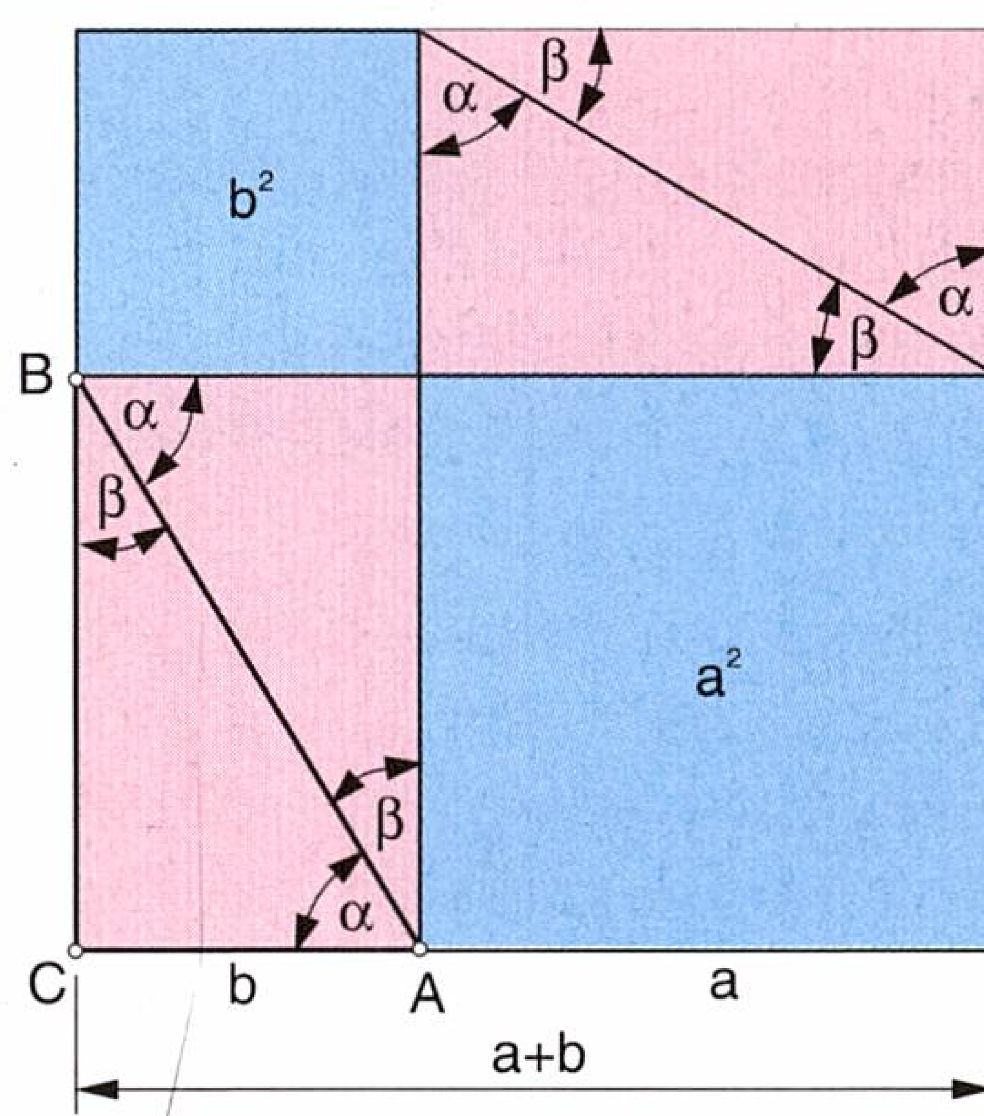
Für diesen Satz sind mehr als 100 Beweise bekannt. Einer der einfachsten ist der folgende

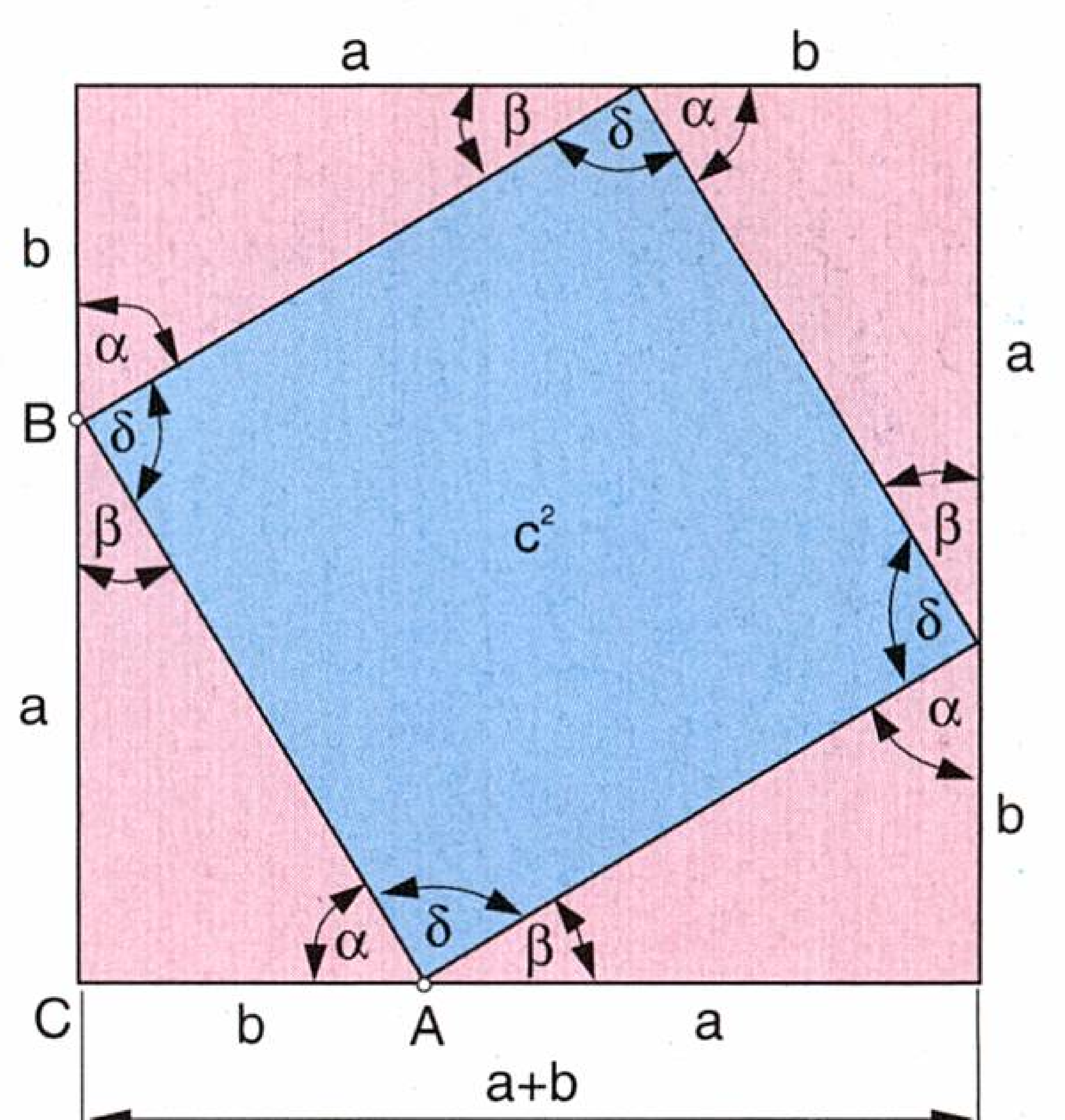
Beweis:

Wenn man — vgl. nebenstehende Figur — bedenkt, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC offensichtlich $\frac{ab}{2}$ beträgt und der Flächeninhalt eines Quadrats mit dem Quadrat der Seitenlänge übereinstimmt, ergibt sich:

$$\frac{4ab}{2} + c^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2ab + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$





Man beachte, dass die Winkelsumme in jedem Dreieck 180° beträgt und dass daher für jedes rechtwinkelige Dreieck gilt: $\alpha + \beta = 90°$, somit ist δ je ein rechter Winkel. Die „Mittelfigur“ muss daher ein Quadrat sein!

Kathetensatz:

$a^2 = cp \quad b^2 = cq$

Im rechtwinkeligen Dreieck ist das Quadrat einer Kathete gleich dem Produkt aus der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Hypotenusenabschnitt.

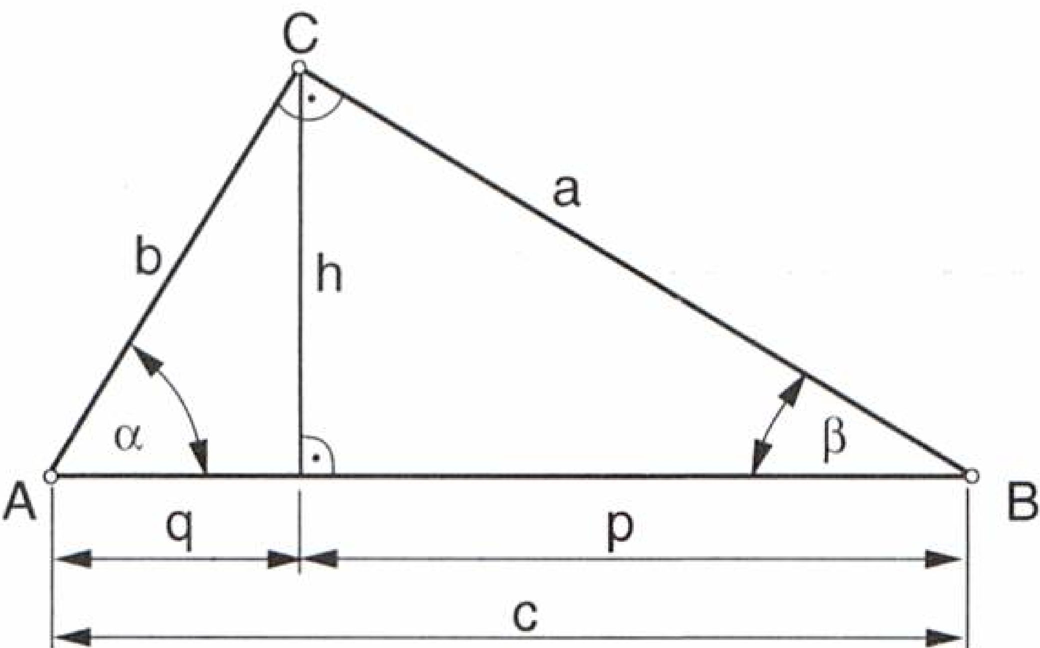
(Beweis vgl. Aufgabe **1108**.)

Höhensatz:

$h^2 = pq$

Im rechtwinkeligen Dreieck ist das Quadrat der Höhe gleich dem Produkt der beiden Hypotenusenabschnitte.

(Beweis vgl. Aufgabe **1109**.)



Beispiel:

a) Von einem rechtwinkeligen Dreieck sind die Längen der Katheten $a = 35$ mm, $b = 120$ mm bekannt. Man berechne die Länge der Hypotenuse c und die Höhe h[1].

b) Von einem rechtwinkeligen Dreieck sind die Hypotenuse $c = 10$ cm und eine Kathete $a = 8$ cm gegeben. Man berechne:

(1) den Umfang u

(2) die Hypotenusenabschnitte p und q

(3) die Höhe h

(4) den Flächeninhalt A des Dreiecks.

Lösung:

a) $c^2 = a^2 + b^2 = 35^2 + 120^2 = 15625$ $\qquad c = 125\text{ mm}$

$A = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2} \Leftrightarrow ab = ch \Leftrightarrow h = \frac{ab}{c} = \frac{35 \cdot 120}{125} = 33{,}6$ $\qquad h = 33{,}6\text{ mm}$

b) (1) $b^2 = c^2 - a^2 = 10^2 - 8^2 = 36$ $\qquad b = 6\text{ cm}$

$u = a + b + c = 8 + 6 + 10 = 24$ $\qquad u = 24\text{ cm}$

(2) $a^2 = cp \Leftrightarrow p = \frac{a^2}{c} = \frac{64}{10} = 6{,}4$ $\qquad p = 6{,}4\text{ cm}$

$q = c - p = 10 - 6{,}4 = 3{,}6$ $\qquad q = 3{,}6\text{ cm}$

(3) $h^2 = pq = 6{,}4 \cdot 3{,}6 = 23{,}04$ $\qquad h = 4{,}8\text{ cm}$

(4) $A = \frac{ab}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$ $\qquad A = 24\text{ cm}^2$



PYTHAGORAS
(ca. 580–500 v.Chr.)

PYTHAGORAS lernte auf seinen Reisen in den Vorderen Orient die Mysterienkulte kennen. Er gründete in Unteritalien einen Geheimbund, dessen Lehren unter anderem die Ansicht umfassten, dass „Alles Zahl sei", d. h. dass alles durch (natürliche) Zahlen ausdrückbar ist. Besonderes Interesse galt den sogenannten **pythagoräischen Zahlentripeln**, d. s. jeweils drei natürliche Zahlen, die die als „Satz des PYTHAGORAS" bekannte Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen, z. B. $3^2 + 4^2 = 5^2$ oder $5^2 + 12^2 = 13^2$.

Über Jahrhunderte beschäftigten sich Mathematiker mit der Frage, ob es auch ganzzahlige Lösungen für die auf den ersten Blick sehr ähnliche Gleichung $a^3 + b^3 = c^3$ gäbe. **Pierre de FERMAT** stellte im 17. Jahrhundert die Behauptung auf, dass für diese Gleichung keine ganzzahligen Lösungen existieren. Es sollte noch mehr als 350 Jahre dauern, bis diese als „FERMATs letzter Satz" bekannte Behauptung bewiesen werden konnte. Der vom englischen Mathematiker **Andrew WILES** erbrachte Beweis wurde im Mai 1995 in den „Annals of Mathematics" veröffentlicht.



Pierre de FERMAT
(1601–1665)

[1]) Mit h ist im rechtwinkeligen Dreieck stets die Höhe auf c gemeint.

Beispiel:

Man leite die HERONsche Flächenformel für den Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seiten a, b, c mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes ab.

Lösung:

(1) $h^2 = b^2 - x^2$ (2) $h^2 = b^2 - x^2$

$h^2 = a^2 - (c-x)^2$ $h^2 = a^2 - (x-c)^2$

$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$$

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

$$h^2 = b^2 - x^2 = (b+x)(b-x) = \left(b + \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right) =$$

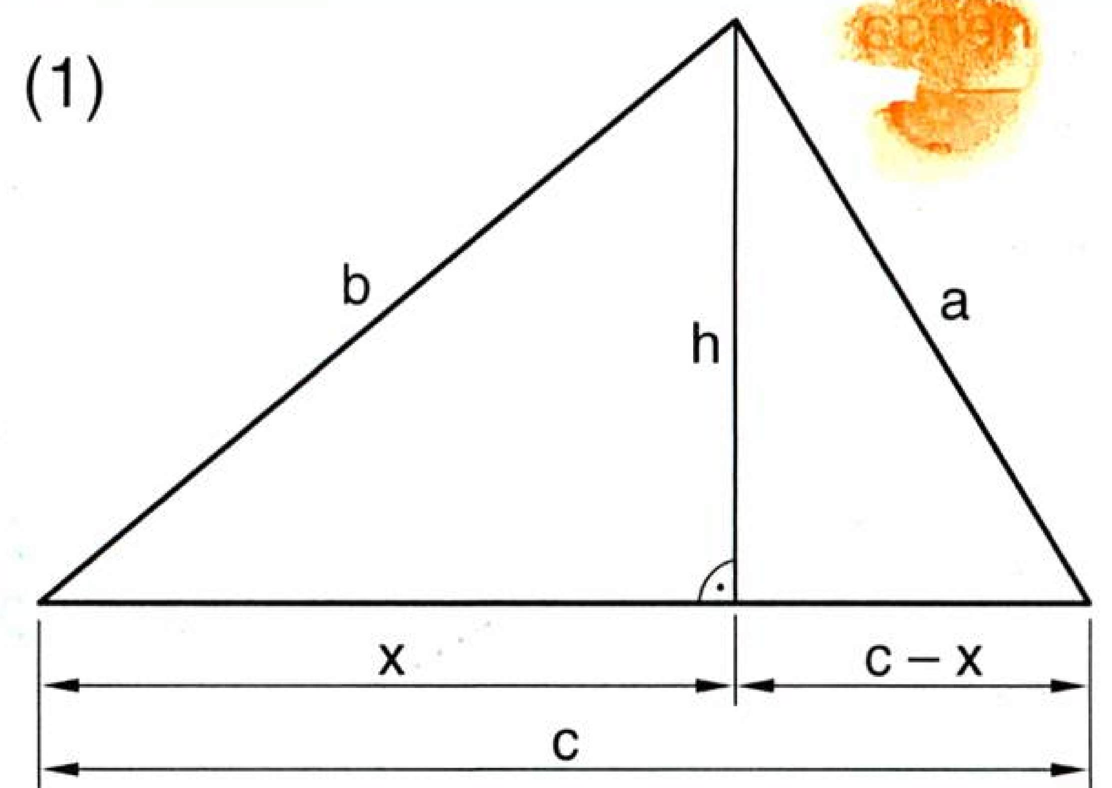
$$= \frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}{2c} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]}}{2c}$$

$$A = \frac{ch}{2} = \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}}{4} =$$

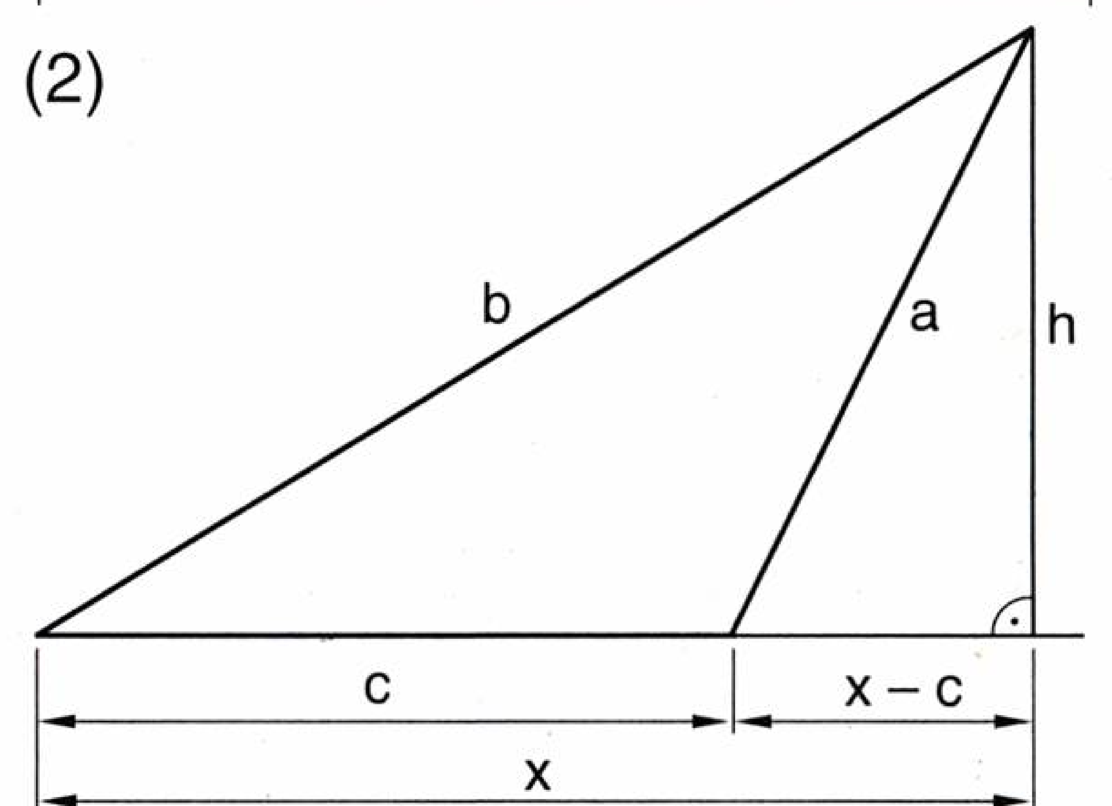
$$= \sqrt{\frac{u}{2} \cdot \frac{u-2a}{2} \cdot \frac{u-2b}{2} \cdot \frac{u-2c}{2}}$$

Wegen $u = a + b + c$ und $s = \frac{u}{2} \Rightarrow A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(1)

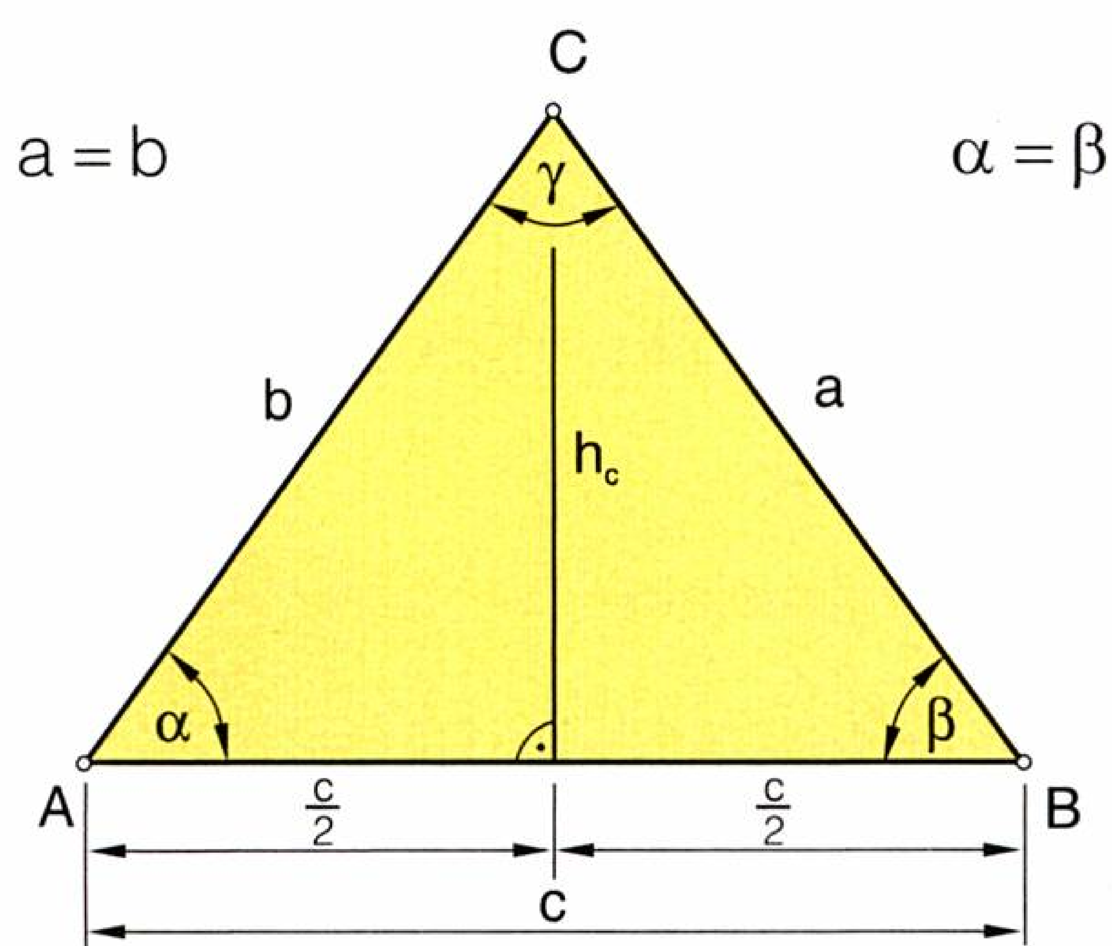


(2)



5.3 Gleichschenkeliges Dreieck (zwei Seiten haben die gleiche Länge)

$a = b$ $\alpha = \beta$



Bezeichnungen:

a, b ..... Schenkel

c ..... Basis (Grundlinie)

α, β ..... Basiswinkel

$$A = \frac{c}{4}\sqrt{4a^2 - c^2}$$

Beispiel:

Man berechne den Umfang u eines gleichschenkeligen Dreiecks mit der Basis $c = 5{,}6$ cm und der Höhe $h_c = 9{,}6$ cm.

Lösung:

$a^2 = h_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 9{,}6^2 + 2{,}8^2 = 100$ $a = 10$ cm

$u = 2a + c = 20 + 5{,}6 = 25{,}6$ $u = 25{,}6$ cm

Beispiel:

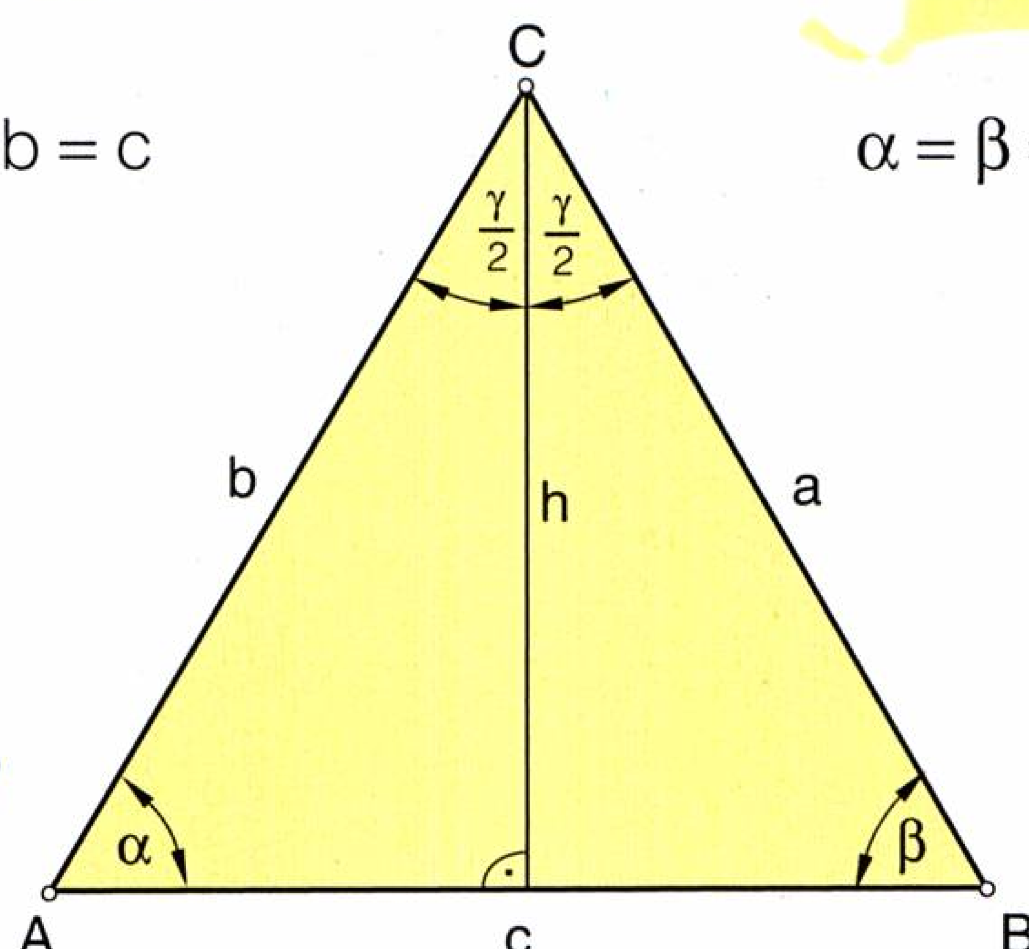
Man zeige, dass für das gleichschenkelige Dreieck $A = \frac{c}{4}\sqrt{4a^2 - c^2}$ gilt.

Lösung:

$$a^2 = h_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow h_c = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2 - c^2}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4a^2 - c^2} \Rightarrow A = \frac{c}{4}\sqrt{4a^2 - c^2}$$

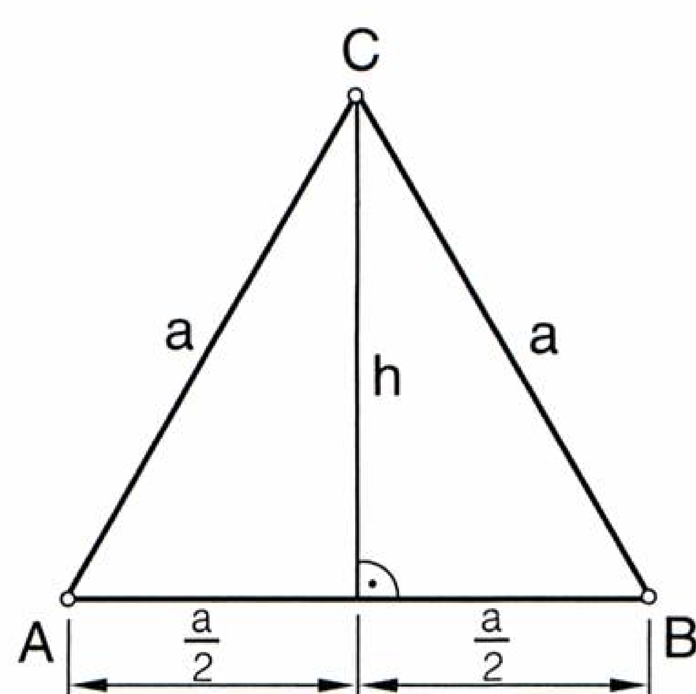
5.4 Gleichseitiges Dreieck (alle drei Seiten haben die gleiche Länge)

$a = b = c$ $\qquad$ $\alpha = \beta = \gamma$



alle Winkel = 60°

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$
$$A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$



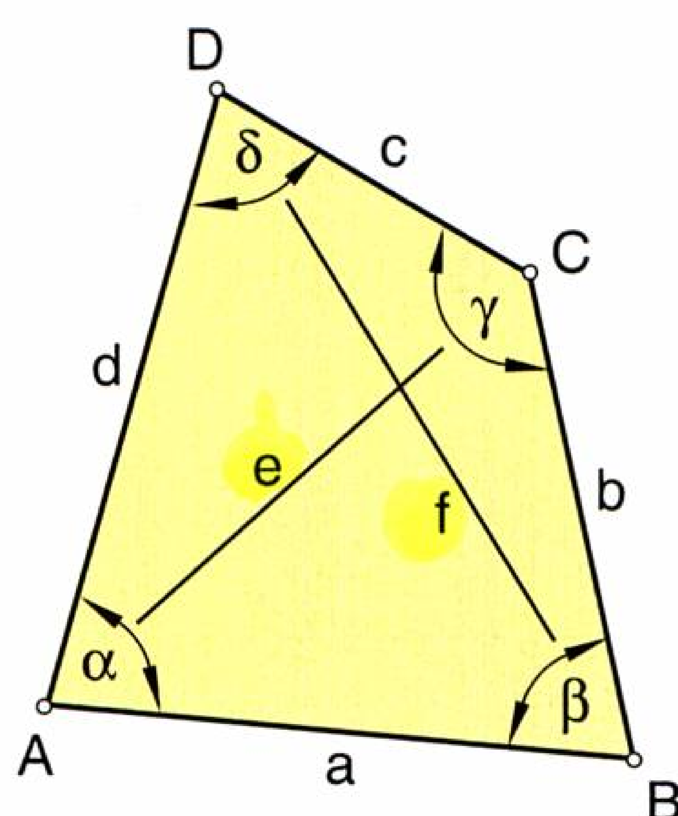
Beispiel:

Man leite die Formel für **a)** die Höhe h **b)** den Flächeninhalt A des gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a ab!

Lösung:

a) $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$ $\quad h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ $\qquad$ **b)** $A = \frac{ah}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$ $\quad A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

6. Viereck



Bezeichnungen:

A, B, C, D ..... Eckpunkte (Ecken)

a, b, c, d ..... Seiten

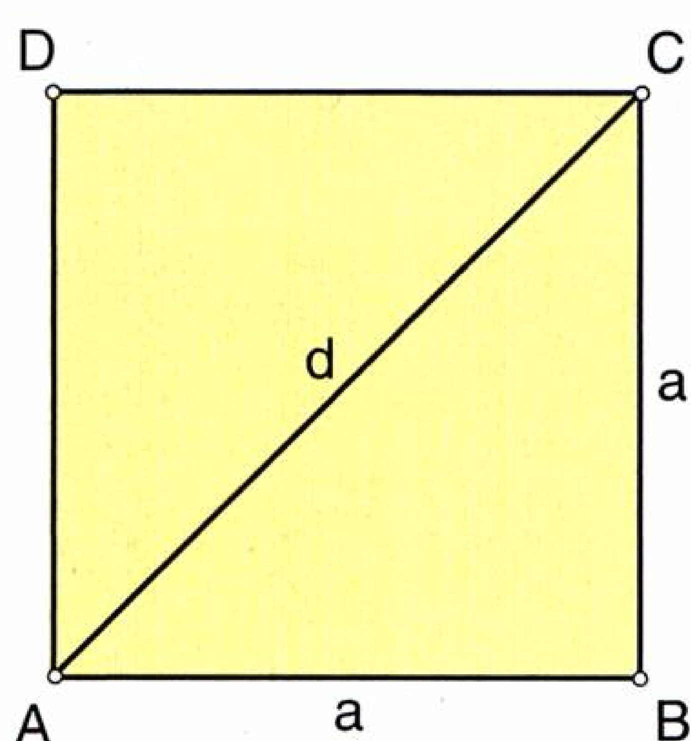
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ..... Innenwinkel

e,f ..... Diagonalen ($\overline{AC} = e$, $\overline{BD} = f$)

Die Bezeichnung wird so gewählt, dass die Eckpunkte alphabetisch entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen werden (Umlaufsinn!).

Da eine Diagonale ein Viereck in zwei Dreiecke zerlegt, beträgt die Summe der Innenwinkel in jedem Viereck 360°.

6.1 Quadrat (vier rechte Innenwinkel, vier gleich lange Seiten)



$$d = a\sqrt{2}$$
$$u = 4a$$
$$A = a^2 = \frac{d^2}{2}$$

Beispiel:

a) Die Diagonale eines Quadrats ist 4,6 cm lang. Man berechne den Flächeninhalt A des Quadrats.

b) Man zeige, dass für das Quadrat $d = a\sqrt{2}$ gilt.

c) Die Diagonale eines Quadrats ist d cm lang. Man drücke den Umfang u des Quadrats durch d aus.

Lösung:

a) $A = a^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{4{,}6^2}{2} = 10{,}58$

$A = 10{,}58\,\text{cm}^2$

b) Aus dem rechtwinkeligen Dreieck ABC ergibt sich:

$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow d = \sqrt{2a^2}$,

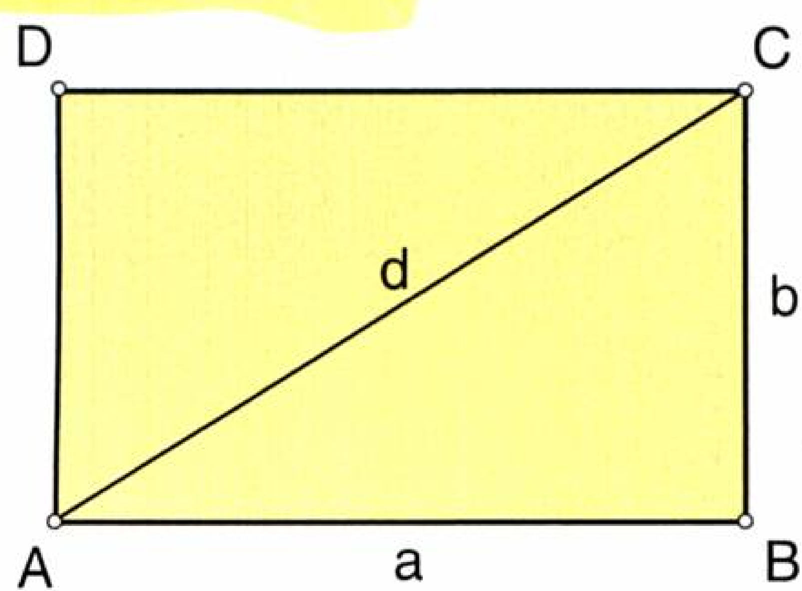
$d = a\sqrt{2}$

c) $d = a\sqrt{2} \Leftrightarrow a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$

$u = 4a = 2d\sqrt{2}$

$u = 2d\sqrt{2}$ cm

6.2 Rechteck (vier rechte Innenwinkel)



$d = \sqrt{a^2 + b^2}$

$u = 2(a + b)$

$A = ab$

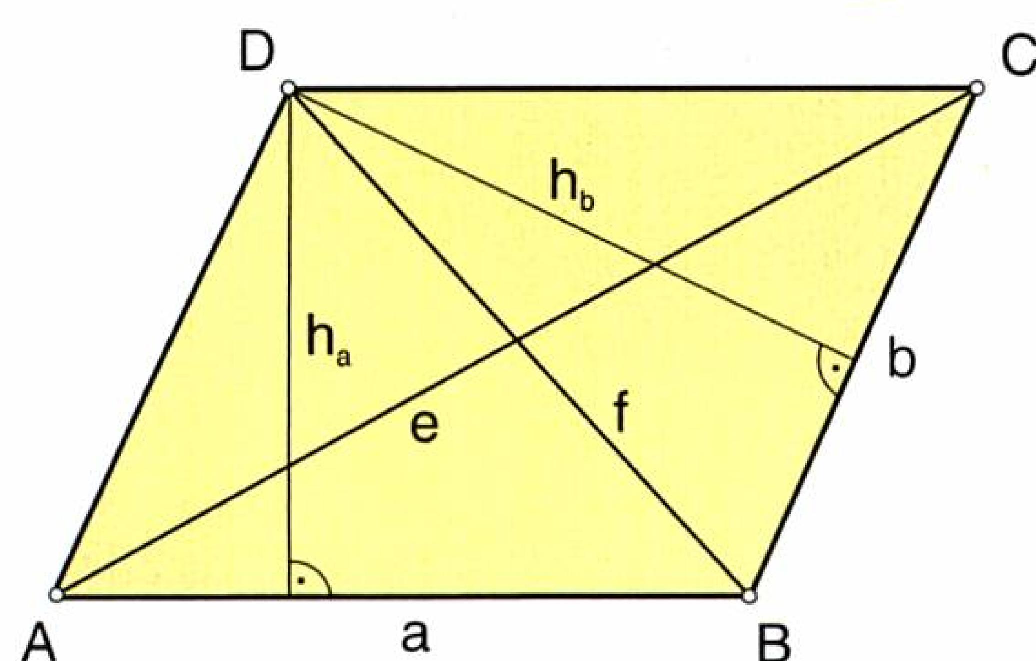
Beispiel:

Man berechne für ein Rechteck mit der Seite a und dem Flächeninhalt A die Diagonale d.

Lösung:

$A = ab \Leftrightarrow b = \frac{A}{a}$ $\quad d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + \frac{A^2}{a^2}}$ $\quad d = \sqrt{a^2 + \frac{A^2}{a^2}}$

6.3 Parallelogramm (zwei Paare paralleler Seiten)



$u = 2(a + b)$

$A = ah_a = bh_b$

Beispiel:

a) Von einem Parallelogramm sind die Seitenlängen $a = 28$ mm, $b = 17$ mm und die Höhe $h_a = 15$ mm gegeben. Man berechne die Länge der Diagonalen!

b) Von einem Parallelogramm sind u, a und h_a gegeben. Man berechne die Höhe h_b des Parallelogramms.

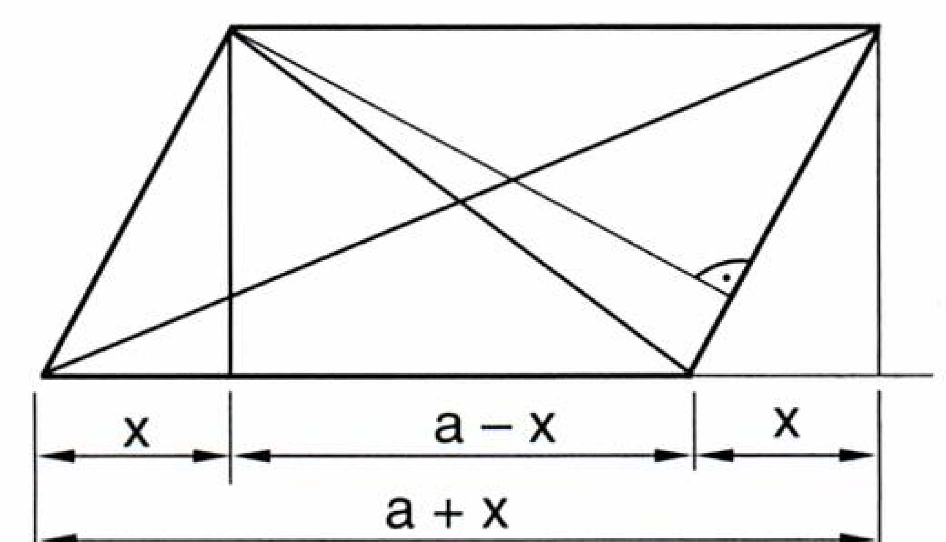
Lösung:

a) $h_a^2 + x^2 = b^2 \Leftrightarrow x^2 = b^2 - h_a^2 = 17^2 - 15^2 = 64$ $\quad x = 8$ mm

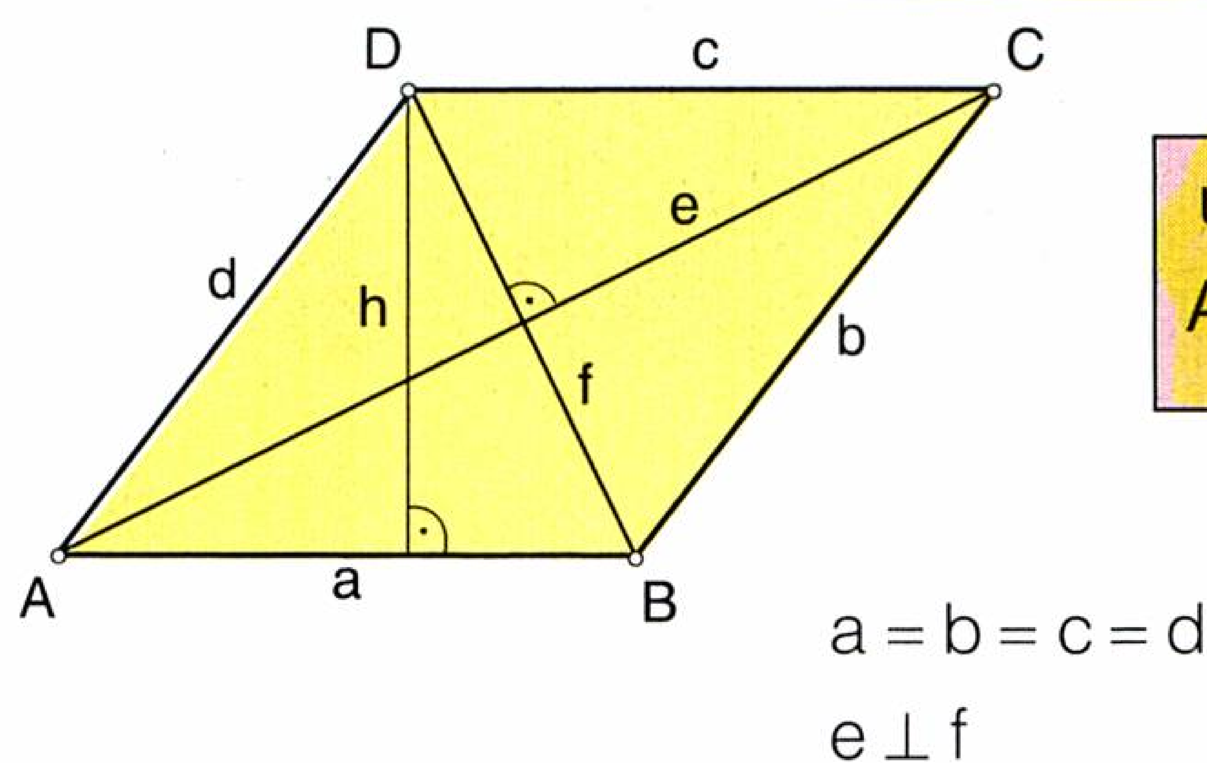
$e^2 = (a + x)^2 + h_a^2 = 36^2 + 15^2 = 1521$ $\quad e = 39$ mm

$f^2 = (a - x)^2 + h_a^2 = 20^2 + 15^2 = 625$ $\quad f = 25$ mm

b) $u = 2(a + b) \Leftrightarrow b = \frac{u - 2a}{2}$ $\quad h_b = \frac{A}{b} = \frac{ah_a}{b} = \frac{2ah_a}{u - 2a}$ $\quad h_b = \frac{2ah_a}{u - 2a}$



6.4 Rhombus[1] (vier gleich lange Seiten)



$u = 4a$

$A = ah = \frac{ef}{2}$

$a = b = c = d$

$e \perp f$

Beispiel:

a) Die Diagonalen eines Rhombus betragen $e = 12\,\text{cm}$ und $f = 9\,\text{cm}$. Man berechne den Umfang u des Rhombus.

b) Man drücke die Höhe h eines Rhombus durch seine Diagonalen e und f aus.

Lösung:

a) $a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = 6^2 + 4{,}5^2 = 56{,}25$ $\quad a = 7{,}5\,\text{cm}$

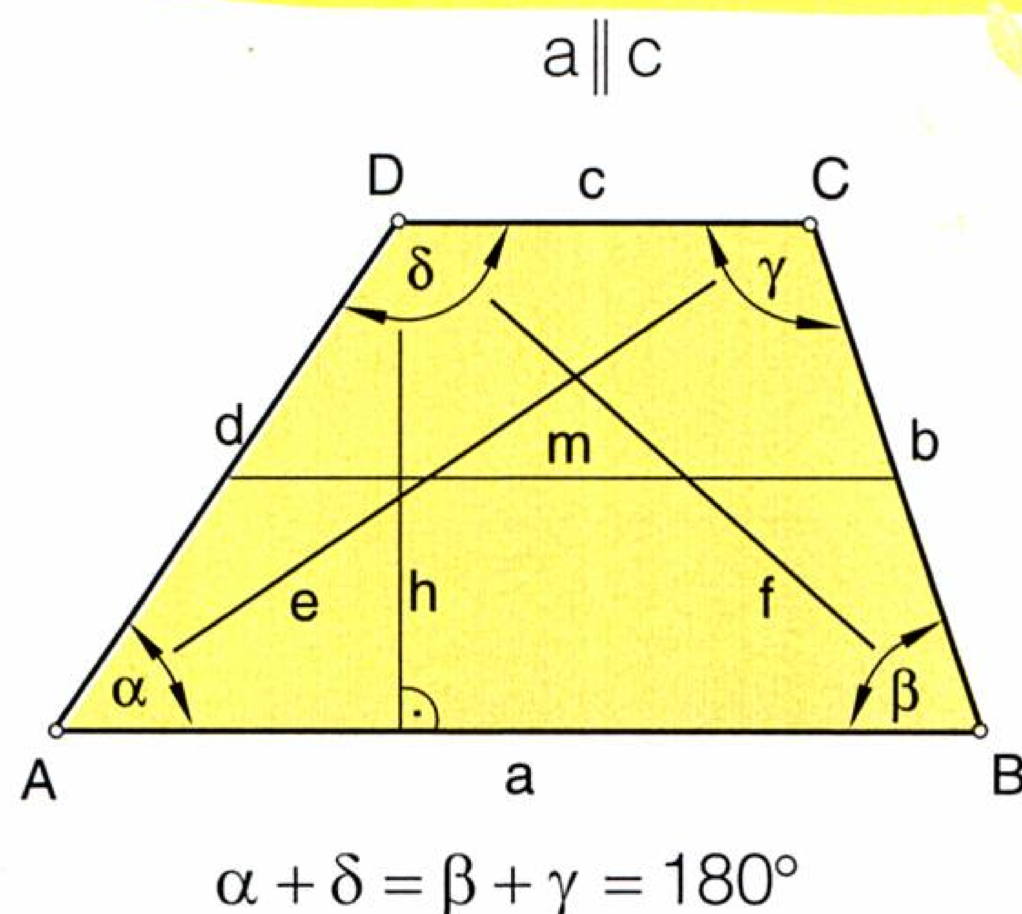
$u = 4a = 4 \cdot 7{,}5 = 30$ $\quad u = 30\,\text{cm}$

b) $a = \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{e^2 + f^2}$

$ah = \frac{ef}{2} \Leftrightarrow h = \frac{ef}{2a} = \frac{ef}{\sqrt{e^2+f^2}}$ $\quad h = \frac{ef}{\sqrt{e^2+f^2}}$

6.5 Trapez (ein Paar paralleler Seiten)

$a \parallel c$



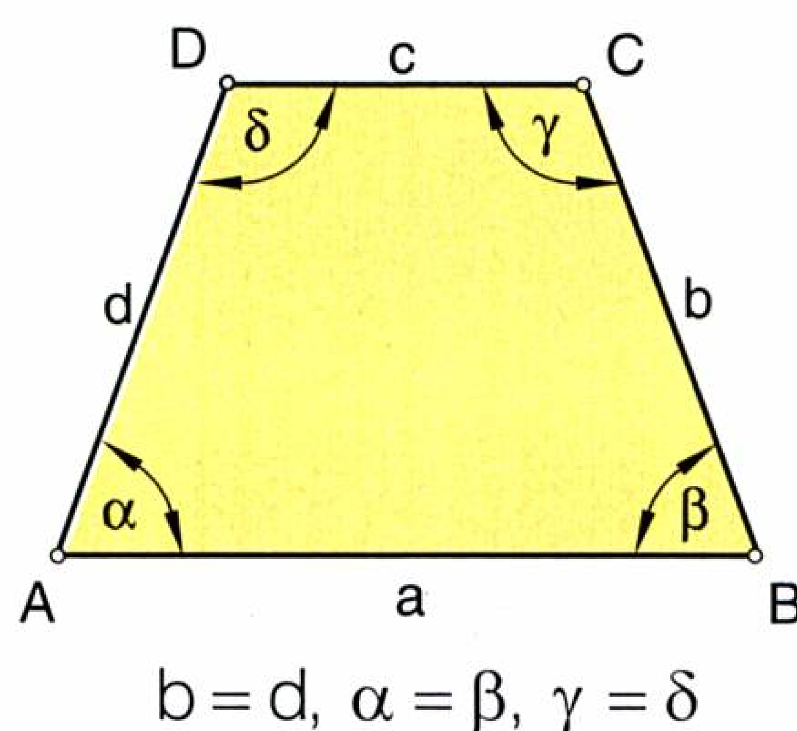
$u = a + b + c + d$

$m = \frac{a+c}{2}$

$A = mh = \frac{a+c}{2}h$

$\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180°$

6.6 Gleichschenkeliges Trapez (ein Paar paralleler und ein Paar gleich langer Seiten)



$u = a + 2b + c$

$m = \frac{a+c}{2}$

$A = mh = \frac{a+c}{2}h$

$b = d,\ \alpha = \beta,\ \gamma = \delta$

[1]) Raute.

Beispiel:

a) Von einem Trapez sind die Parallelseiten $a = 40\,m$, $c = 19\,m$ und die Schenkel $b = 20\,m$, $d = 13\,m$, gegeben. Man berechne den Flächeninhalt A des Trapezes.

b) Von einem gleichschenkeligen Trapez ist die Parallelseite $a = 36\,mm$, die Höhe $h = 20\,mm$ und der Flächeninhalt $A = 420\,mm^2$ gegeben. Man berechne den Umfang u!

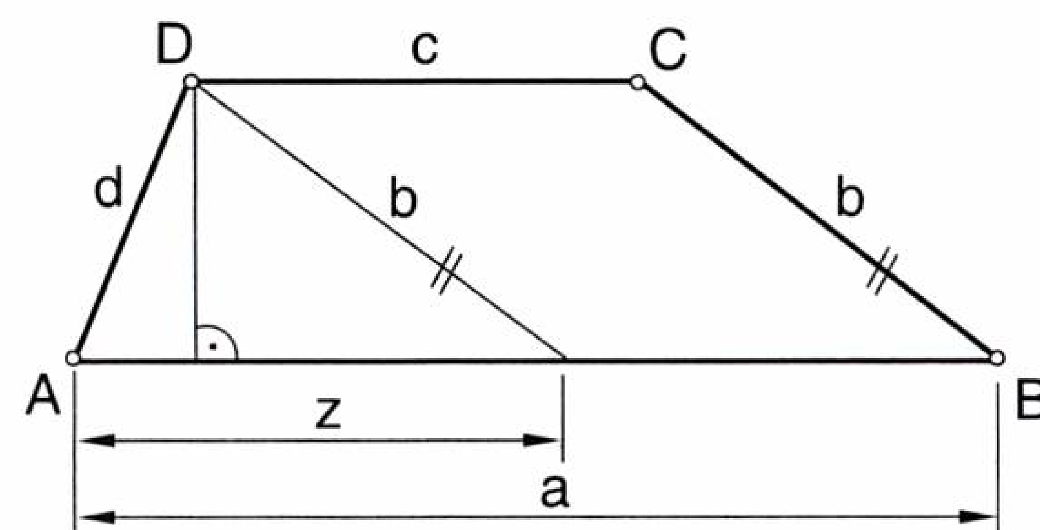
Lösung:

a) $z = a - c = 21,\; s = \frac{z+b+d}{2} = \frac{21+20+13}{2} = 27$

$A_\Delta = \sqrt{s(s-z)(s-b)(s-d)} = \sqrt{27 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 14} = 126$

$\frac{zh}{2} = A_\Delta \Leftrightarrow h = \frac{2A_\Delta}{z} = \frac{2 \cdot 126}{21} = 12$

$A = \frac{a+c}{2} h = \frac{40+19}{2} \cdot 12 = 59 \cdot 6 = 354$ $\qquad A = 354\ m^2$



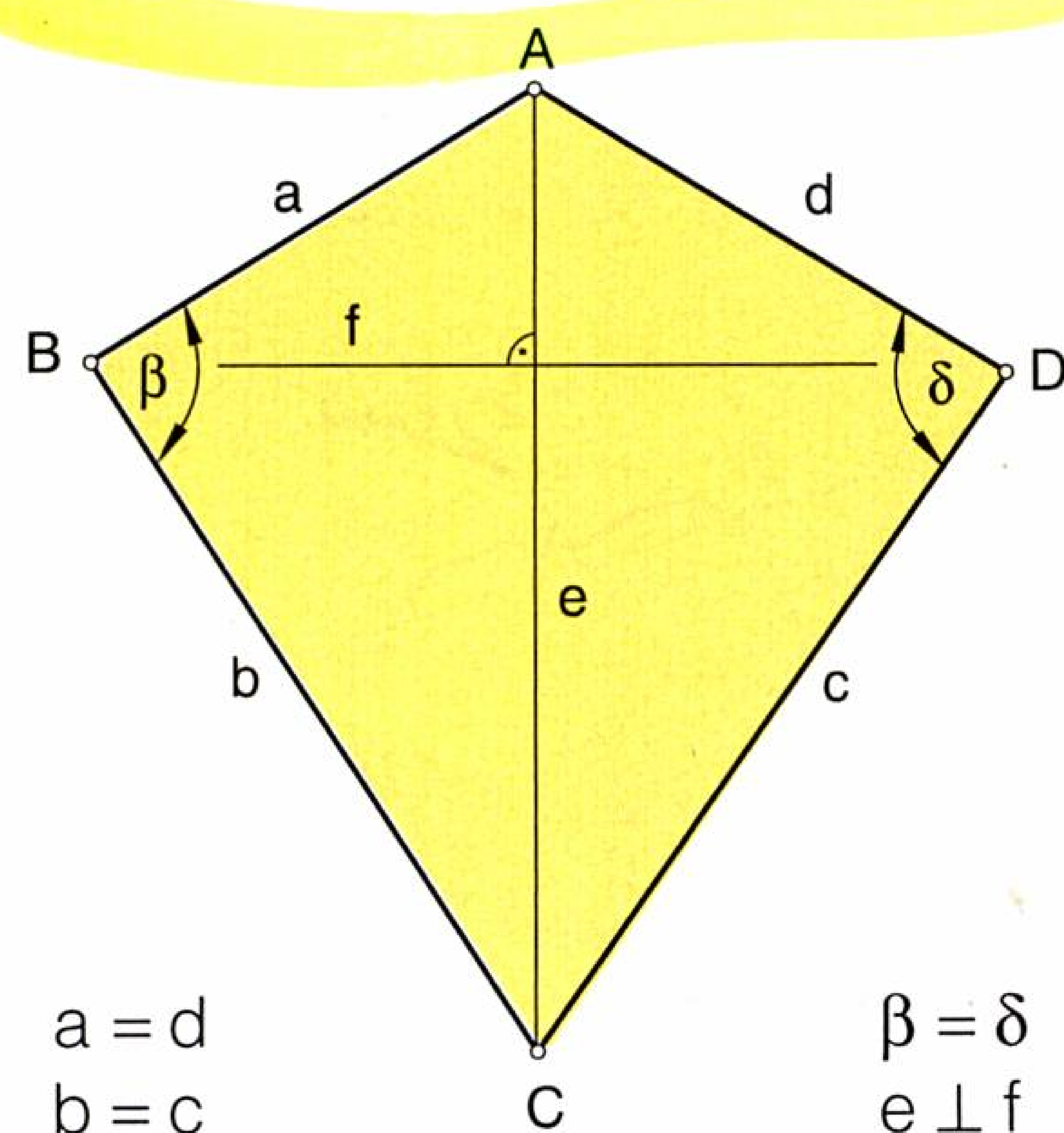
b) $A = \frac{a+c}{2} h \Leftrightarrow c = \frac{2A}{h} - a = \frac{2 \cdot 420}{20} - 36 = 6$ $\qquad c = 6\,mm$

Weiters gilt:

$b^2 = \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + h^2 = 15^2 + 20^2 = 625$ $\qquad b = 25\,mm$

$u = a + 2b + c = 36 + 50 + 6 = 92$ $\qquad u = 92\,mm$

6.7 Deltoid[1] (zwei Paare gleich langer Nachbarseiten)



$a = d$ $\qquad \beta = \delta$

$b = c$ $\qquad e \perp f$

$u = 2(a+b)$

$A = \frac{ef}{2}$

Beispiel:

Von einem Deltoid sind die Seiten $a = 3{,}9\,cm$, $b = 2{,}5\,cm$ und die Diagonale $f = 3\,cm$ gegeben. Man berechne den Flächeninhalt A des Deltoids.

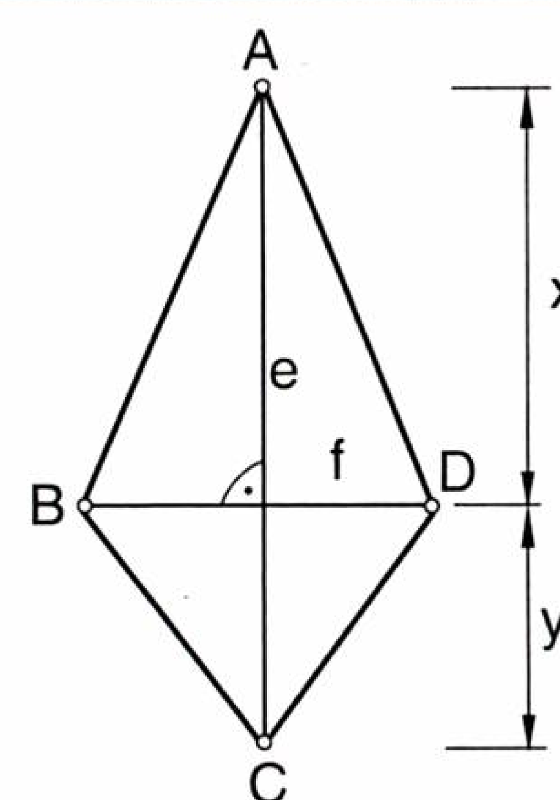
Lösung:

$x^2 = a^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2 = 3{,}9^2 - 1{,}5^2 = 12{,}96$ $\qquad x = 3{,}6\,cm$

$y^2 = b^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2 = 2{,}5^2 - 1{,}5^2 = 4$ $\qquad y = 2\,cm$

$e = x + y = 5{,}6$ $\qquad e = 5{,}6\,cm$

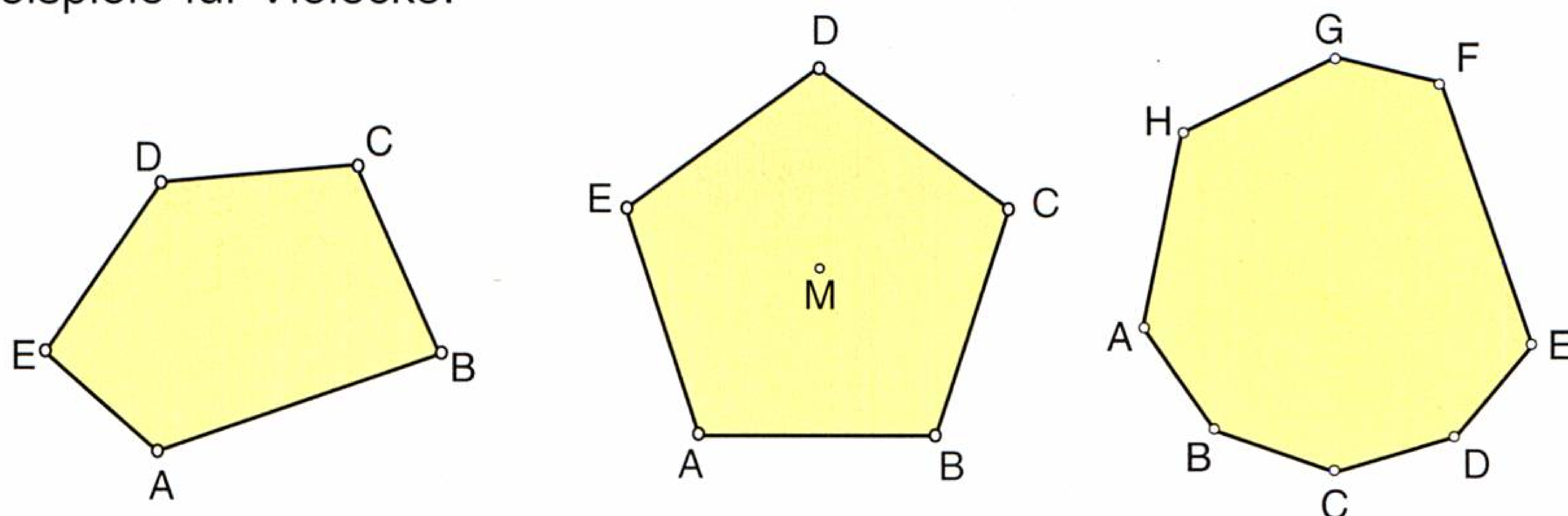
$A = \frac{ef}{2} = \frac{3 \cdot 5{,}6}{2} = 3 \cdot 2{,}8 = 8{,}4$ $\qquad A = 8{,}4\,cm^2$



[1]) Drachenviereck.

7. Vieleck

Beispiele für Vielecke:

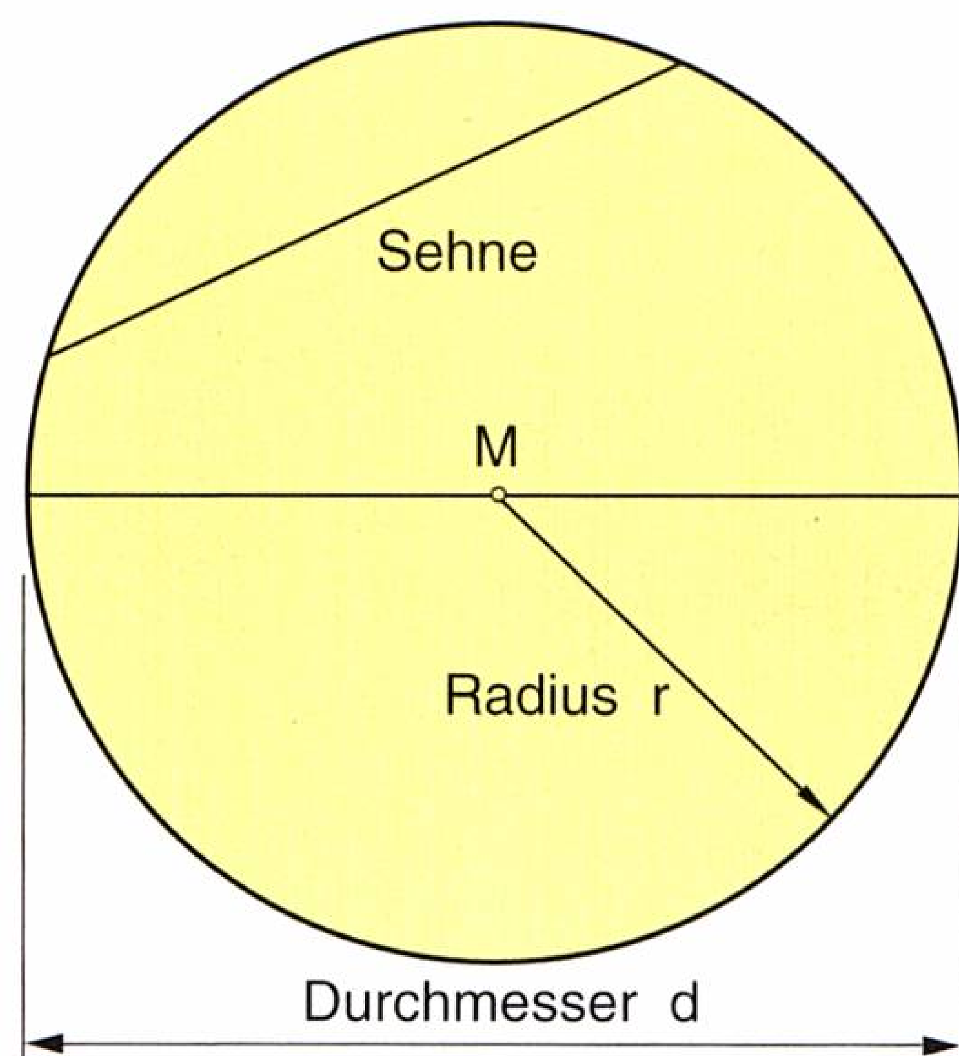


Welche der dargestellten Figuren sind regelmäßige, welche sind unregelmäßige Vielecke?

Wenn **alle** in einem Vieleck vorkommenden Seiten und Winkel gleich groß sind, bezeichnet man es als **regelmäßiges Vieleck**, andernfalls als **unregelmäßiges Vieleck**.



8. Kreis und Kreisteile



Bezeichnungen:

Wie könnte man die Begriffe Sehne, Durchmesser, Radius und Kreisfläche erklären?

Eine Strecke, deren beide Endpunkte auf dem Kreis liegen, heißt Sehne des Kreises.

Eine Sehne, die durch den Mittelpunkt verläuft, heißt .... .

Pi auf 1000 Stellen:
====================

```
3.141 592 653 589 793 238 462 643 383 279
  502 884 197 169 399 375 105 820 974 944
  592 307 816 406 286 208 998 628 034 825
  342 117 067 982 148 086 513 282 306 647
  093 844 609 550 582 231 725 359 408 128
  481 117 450 284 102 701 938 521 105 559
  644 622 948 954 930 381 964 428 810 975
  665 933 446 128 475 648 233 786 783 165
  271 201 909 145 648 566 923 460 348 610
  454 326 648 213 393 607 260 249 141 273
  724 587 006 606 315 588 174 881 520 920
  962 829 254 091 715 364 367 892 590 360
  011 330 530 548 820 466 521 384 146 951
  941 511 609 433 057 270 365 759 591 953
  092 186 117 381 932 611 793 105 118 584
  074 462 379 962 749 567 351 885 752 724
  891 227 938 183 011 949 129 833 673 362
  440 656 643 086 021 394 946 395 224 737
  190 702 179 860 943 702 770 539 217 176
  293 176 752 384 674 818 467 669 405 132
  000 568 127 145 263 560 827 785 771 342
  757 789 609 173 637 178 721 468 440 901
  224 953 430 146 549 585 371 050 792 279
  689 258 923 542 019 956 112 129 021 960
  864 034 418 159 813 629 774 771 309 960
  518 707 211 349 999 998 372 978 049 951
  059 731 732 816 096 318 595 024 459 455
  346 908 302 642 522 308 253 344 685 035
  261 931 188 171 010 003 137 838 752 886
  587 533 208 381 420 617 177 669 147 303
  598 253 490 428 755 468 731 159 562 863
  882 353 787 593 751 957 781 857 780 532
  171 226 806 613 001 927 876 611 195 909
  216 420 198 9
```

Kreis und Gerade können folgende Lagen zueinander haben:

— Die Gerade g schneidet den Kreis k: $g \cap k = (S_1, S_2)$

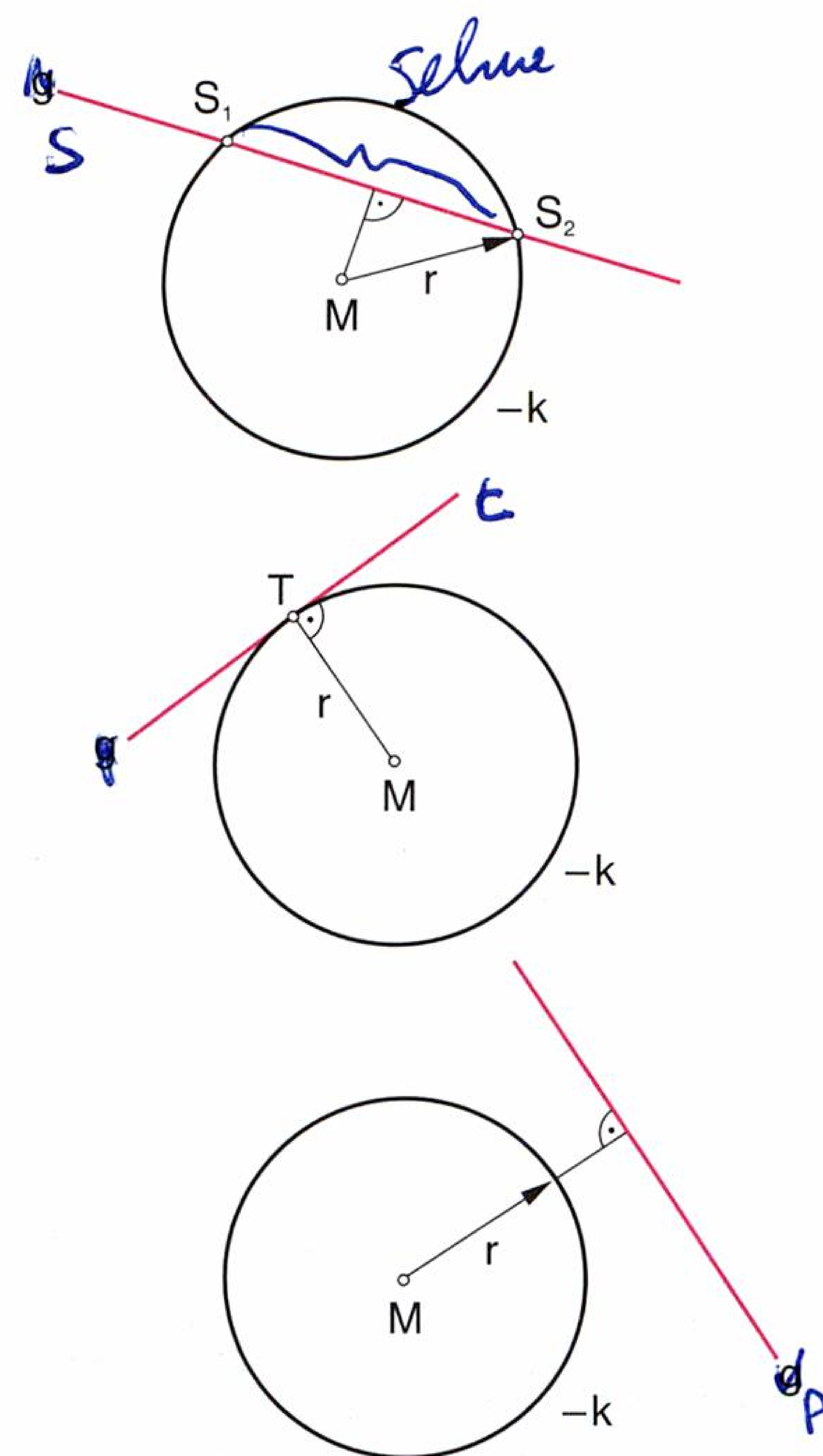
g heißt **Sekante** in Bezug auf k.

— Die Gerade g berührt den Kreis k: $g \cap k = \{T\}$

g heißt **Tangente** in Bezug auf k.

— Die Gerade g läuft am Kreis k vorbei: $g \cap k = \{\,\}$

g heißt **Passante** in Bezug auf k.



$\pi = 3{,}1415926535\ldots$ (Ludolphsche Zahl)[1] wird für die Berechnung von Kreis und Kreisteilen benötigt.

Selbstverständlich wählt man für π einen Näherungswert, z. B. $\pi = \frac{22}{7}$, $\pi = 3{,}14$ usw., d. h. das Gleichheitszeichen wird auch für Näherungswerte verwendet, wenn eine dem Problem angemessene Genauigkeit vorliegt. Beim Einsatz von Taschenrechnern sollte die Genauigkeit des Gerätes genützt, beim Ergebnis jedoch auf eine sinnvolle Stellenzahl gerundet werden.

---

1) π (gesprochen: Pi) ist eine irrationale Zahl, d. h. sie kann nicht durch einen Bruch ganzer Zahlen dargestellt werden. Ferner kann π auch nicht als n-te Wurzel ($n \in \mathbb{N}^*$) einer rationalen Zahl dargestellt werden. In diesem Zusammenhang sagen wir: π ist eine **transzendent irrationale Zahl**.

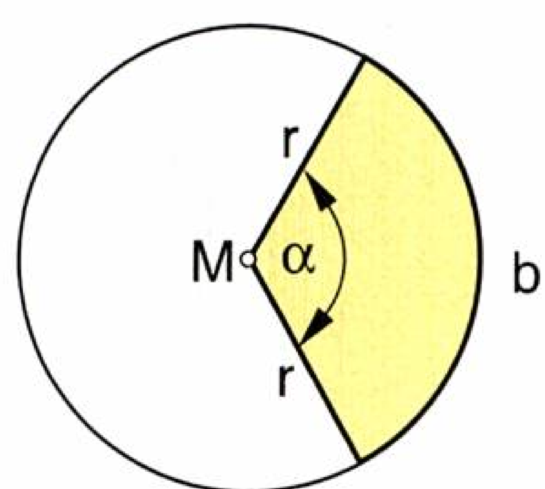
8.1 Kreis

$u = 2\pi r = \pi d \qquad A = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} d^2$

Beispiel:
Man berechne den Flächeninhalt A eines Kreises mit 10 cm Umfang auf zwei Dezimalen.

Lösung:
$u = 2\pi r \Leftrightarrow r = \frac{u}{2\pi} \qquad A = \pi r^2 = \frac{\pi u^2}{4\pi^2} = \frac{u^2}{4\pi} = \frac{100}{4\pi} = 7{,}96 \qquad A = 7{,}96\ \text{cm}^2$

8.2 Kreissektor



Bezeichnungen:

b.....Kreisbogen $\qquad b = \frac{\pi r \alpha}{180°}$

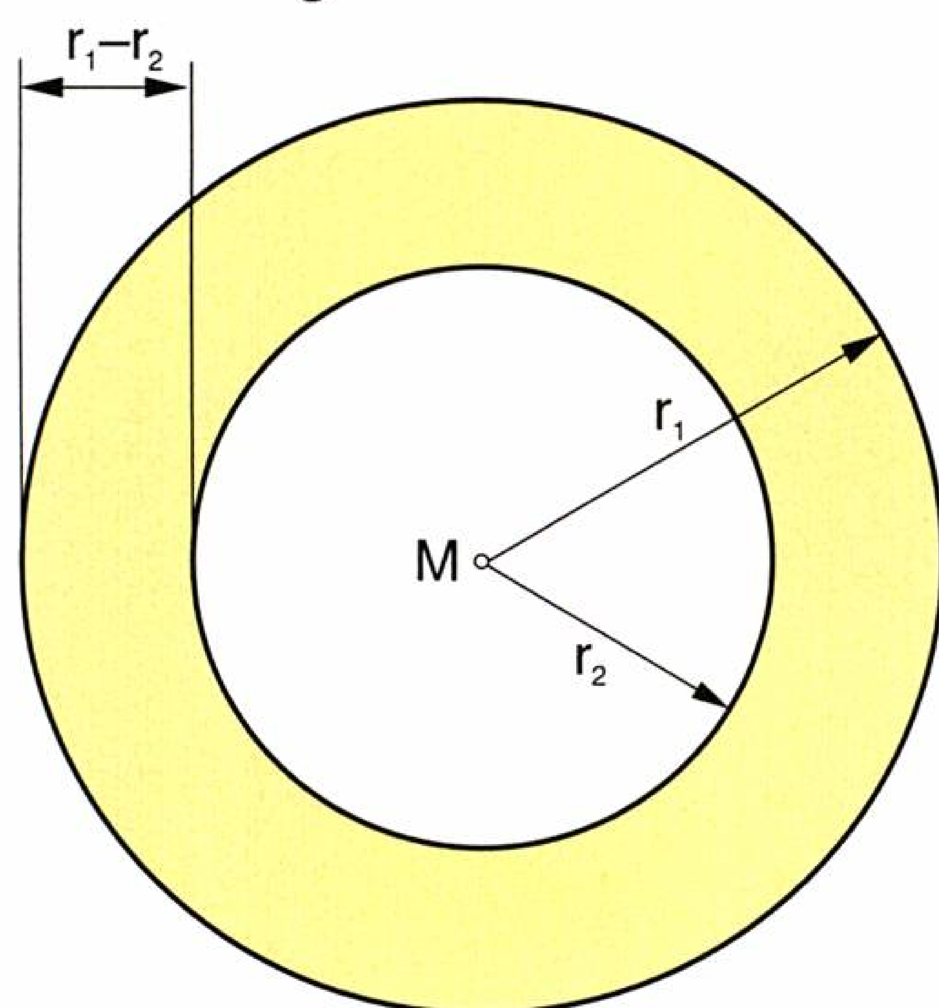
$u = 2r + b \qquad A = \frac{br}{2} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360°}$ (α in Grad)

Beispiel:
Man berechne den **a)** Umfang u **b)** Flächeninhalt A eines Kreissektors mit $\alpha = 5{,}6°$!

Lösung:
a) $b = \frac{\pi r \alpha}{180°} = \frac{\pi \cdot 56 \cdot 5{,}6°}{180°} = 5{,}5 \qquad b = 5{,}5\ \text{mm} \qquad u = 2r + b = 112 + 5{,}5 = 117{,}5 \qquad u = 117{,}5\ \text{mm}$

b) $A = \frac{br}{2} = \frac{5{,}5 \cdot 56}{2} = 154 \qquad A = 154\ \text{mm}^2$

8.3 Kreisring



$u = 2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 2\pi (r_1 + r_2)$

$A = \pi (r_1^2 - r_2^2) = \pi (r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$

Beispiel:
Man berechne den Umfang u eines Kreisringes mit $r_1 = 42$ cm und $A = 5388\ \text{cm}^2$!

Lösung:
$A = \pi (r_1^2 - r_2^2) \Leftrightarrow 5388 = \pi (42^2 - r_2^2) \Leftrightarrow \frac{5388}{\pi} = 42^2 - r_2^2 \Leftrightarrow r_2^2 = 48{,}95 \qquad r_2 = 7\ \text{cm}$

$u = 2\pi (r_1 + r_2) = 2\pi (42 + 7) = 307{,}9 \qquad u = 307{,}9\ \text{cm}$

AUFGABEN

1078. Die nachstehenden Begriffe sind durch bezeichnete Skizzen zu veranschaulichen:
a) Strahl **b)** Strecke **c)** Halbebene **d)** Parallelstreifen **e)** Winkelfeld

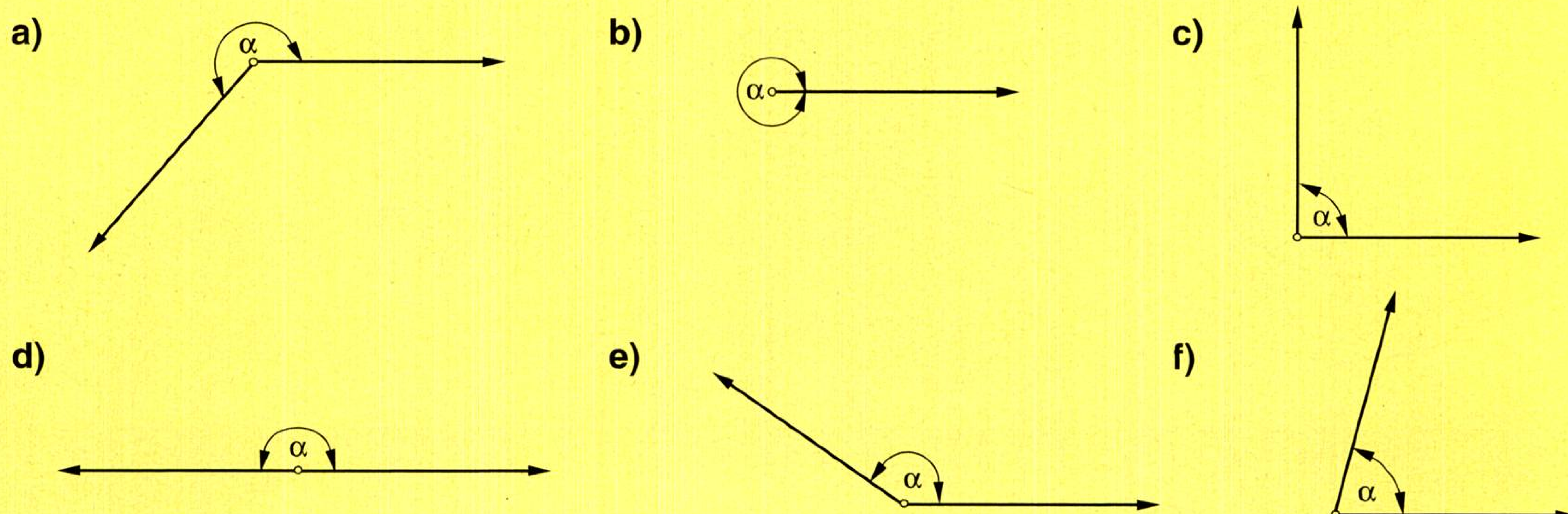
1079. Die folgenden Sachverhalte sind in Symbolen der Mengenlehre auszudrücken und durch Skizzen zu veranschaulichen:
a) Der Punkt P liegt nicht auf der Geraden g. **b)** Der Punkt P liegt in der Ebene E.
c) Die Gerade g liegt in der Ebene E. **d)** Die Gerade g schneidet die Ebene E im Punkt S
e) Der Abstand a der Punkte P_1 und P_2. **f)** Der Abstand c des Punktes P von der Ebene E.
g) Der Abstand d zweier paralleler Geraden g_1 und g_2.

1080. Man zeichne die Gerade g [A(0, 0) B(3, 4)] und die Punkte C(7, 6), D(5, 4) in ein rechtwinkeliges Koordinatensystem. Dort ist weiters einzuzeichnen:
a) Die Parallele durch den Punkt C zur Geraden g.
b) $\{X \mid \overline{XC} = \overline{XD}\}$ **c)** $\{X \mid X \in g \wedge \overline{XC} = \overline{XD}\}$

1081. Gegeben sind die Gerade g und die Punkte A und B. Es ist jener Punkt X von g konstruktiv zu bestimmen, der von A und B gleich weit entfernt ist:
a) g = y-Achse, A(1, 1), B(−3, 2) **b)** g[U(2, 2), V(−3, −3)], A(−2, −1), B(4, −1)
c) Bei welcher Lage der Punkte A, B gibt es **(1)** keine Lösung **(2)** beliebig viele Lösungen?

1082. Gegeben sind die drei Punkte A, B und C. Es ist jener Punkt X zu ermitteln, der von den drei Punkten gleich weit entfernt ist:
a) A(−3, −1), B(4, 2), C(3, −2) **b)** A(0, 5), B(5, 0), C(−4, 3)
c) Welche Lage müssen die Punkte A, B und C zueinander haben, damit es keine Lösung gibt?
Anleitung (Konstruktionsgang): (1) $s_1 = \{X \mid \overline{XA} = \overline{XC}\}$ (2) $s_2 = \{X \mid \overline{XB} = \overline{XC}\}$ (3) $s_1 \cap s_2 = \{X\}$

1083. Winkel lassen sich nach ihrer Größe einteilen:
(1) spitzer Winkel: $0° < \alpha < 90°$ (2) rechter Winkel: $\alpha = 90°$
(3) stumpfer Winkel: $90° < \alpha < 180°$ (4) gestreckter Winkel: $\alpha = 180°$
(5) erhabener Winkel: $180° < \alpha < 360°$ (6) voller Winkel: $\alpha = 360°$
Die folgenden Skizzen sind der obigen Einteilung entsprechend zuzuordnen:

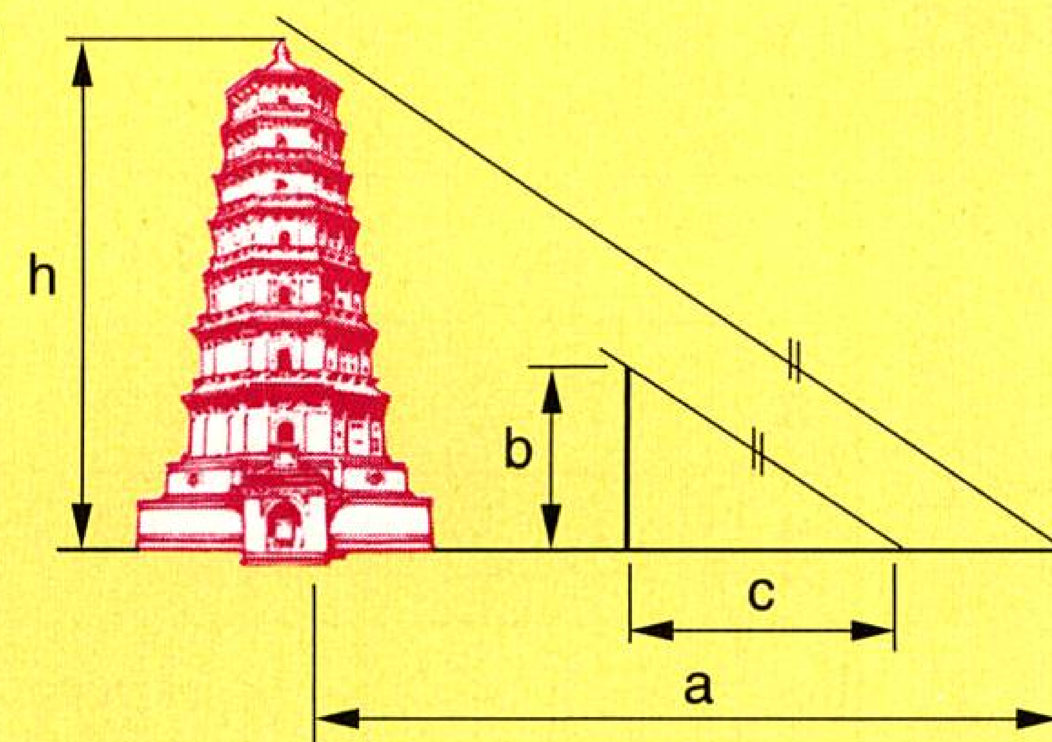


1084. Zwei Winkel heißen **Komplementärwinkel**, wenn sie einander auf 90° ergänzen, z. B.: 70° und 20° oder 40° und 50°. Wie groß ist der Winkel, der doppelt so groß wie sein Komplementärwinkel ist?

1085. Zwei Winkel heißen **Supplementärwinkel**, wenn sie einander auf 180° ergänzen, z. B.: 90° und 90° oder 1° und 179°. Wie groß ist der Winkel, der doppelt so groß wie sein Supplementärwinkel ist?

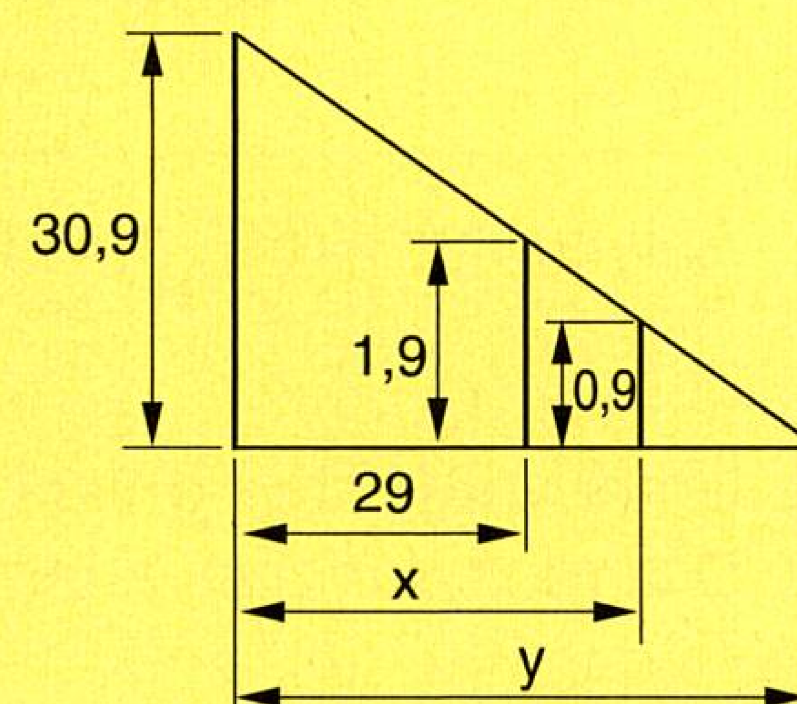
1086.[1] Wie hoch ist ein Turm, der einen Schatten von a m Länge wirft, wenn die Schattenlänge einer b m langen Messlatte c m beträgt?

a) $a = 10$, $b = 1$, $c = 0{,}5$ **b)** $a = 25$, $b = 2$, $c = 0{,}8$



1087.[1] Von einem 30,9 cm hohen Kirchturm sieht man wegen der in der Blickrichtung liegenden 1,9 m hohen und 29 m entfernten Friedhofsmauer nur den oberen Rand eines 0,9 m hohen Grabsteins. Wie weit ist der Grabstein vom Turm entfernt?

Bemerkung: Die nebenstehende Skizze ist nicht maßstabsgetreu.

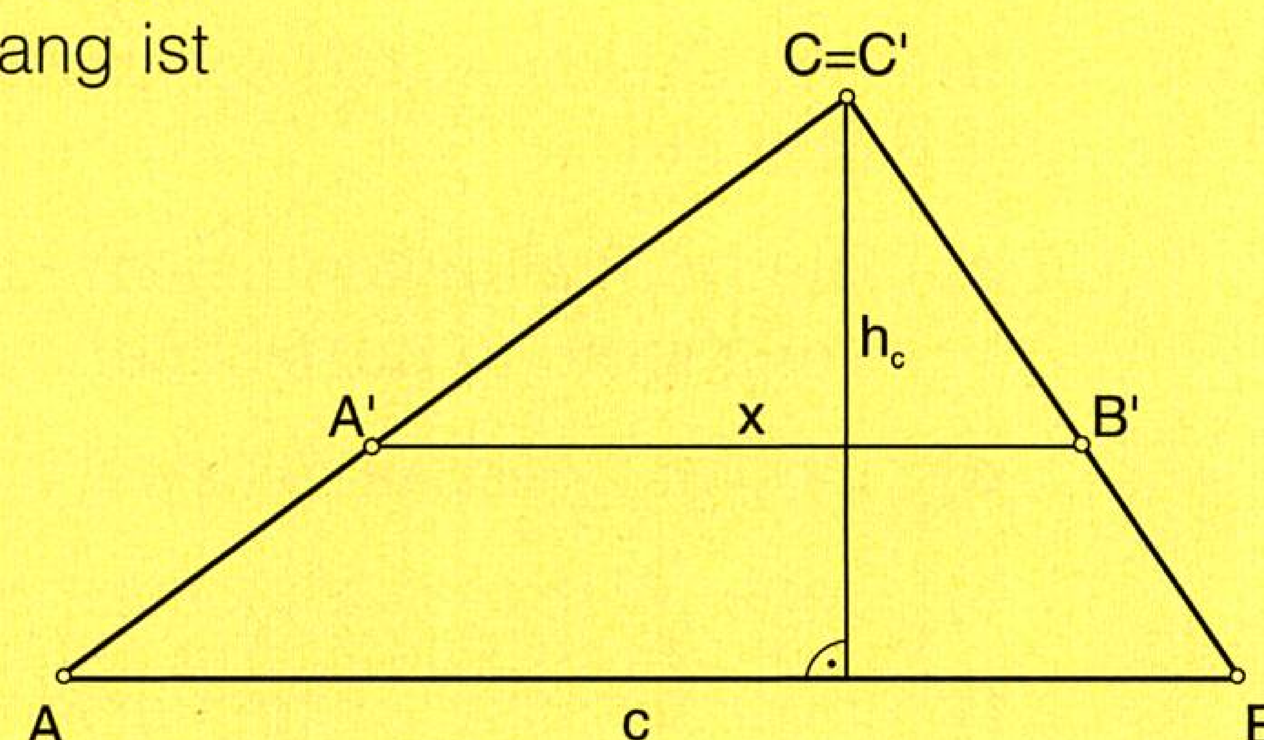


1088. Ein Dreieck mit der Grundlinie c und der Höhe h_c wird in 2 cm Abstand von c durch eine Parallele zu c geschnitten. Wie lang ist die Schnittlinie?

a) $c = 10$ cm, $h_c = 5$ cm **b)** $c = 18$ cm, $h_c = 9$ cm

Anleitung: Man überprüfe, dass $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

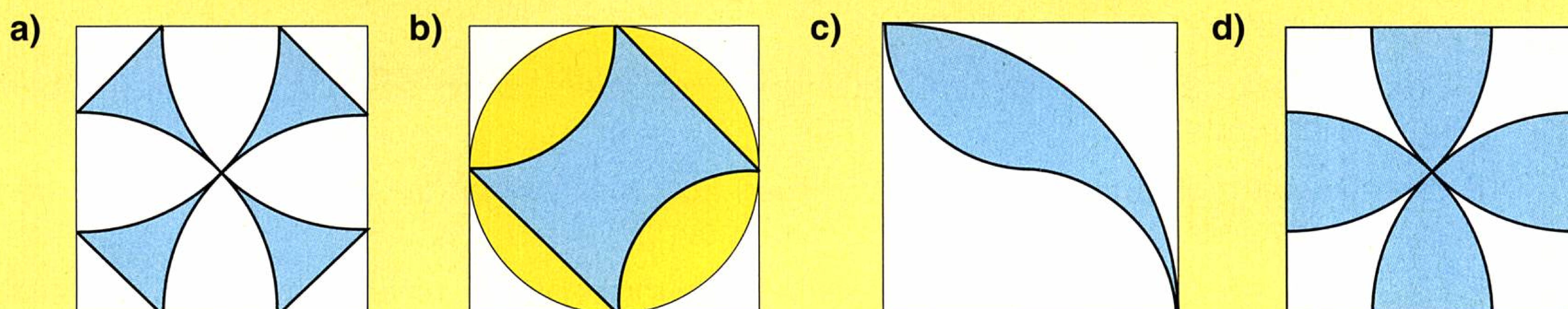
$\Rightarrow c : h_c = x : (h_c - 2)$ usw.



1089. Man vergrößere das Dreieck mit den Seiten $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm im Verhältnis **a)** 3 : 4 **b)** 4 : 5.

1090. Man verkleinere das in Aufgabe **1089.** gegebene Dreieck im Verhältnis **a)** 3 : 2 **b)** 5 : 3.

1091. Wie viele Symmetrieachsen haben die folgenden Ornamente bzw. Fliesenmuster? Man zeichne sämtliche Symmetrieachsen ein!



1092. Ein Dreieck hat folgende Winkel:

a) $\alpha = 25° + \beta$, $\gamma = 76° + \alpha$ **b)** $\beta = 24° + \alpha$, $\gamma = 80° + \alpha$ **c)** $\alpha = 150° - \beta$, $\alpha = 100° + \gamma$

Wie groß sind die Winkel?

[1]) Es wird horizontales Gelände vorausgesetzt.

1093. Die nicht angegebenen Winkel der folgenden Dreiecke sind zu berechnen:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
α	17°12′	32°18′			1°10′13″			
β	63°38′		37°18′					
γ		101°29′		73°12′		70°53′35″		
α'			164°47′			112°22′48″	120°47′44″	
β'				120°29′				161°55′54″
γ'					20°13′53″		108°36′18″	130°23′41″

Anleitung: $1° = 60'$, $1' = 60''$, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, $\alpha' = \beta + \gamma$, $\beta' = \alpha + \gamma$, $\gamma' = \alpha + \beta$; $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$...

1094. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung ist zu beweisen: Im Dreieck ist eine Seite stets größer als die Differenz der zwei anderen Seiten.

1095. Die wahren Aussagen sind anzukreuzen:

○ **a)** Alle Dreiecke, die in den drei Innenwinkeln übereinstimmen, sind kongruent.

○ **b)** Alle Dreiecke, die kongruent sind, stimmen in den sechs Bestimmungsstücken a, b, c, α, β, γ überein.

○ **c)** Die Normalen von einem Eckpunkt eines Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite bzw. deren Verlängerung bezeichnet man als Schwerlinien eines Dreiecks.

○ **d)** Es gibt Dreiecke mit zwei stumpfen Winkeln.

○ **e)** Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel.

○ **f)** Im Dreieck schneiden einander die drei Winkelsymmetralen im Mittelpunkt des Umkreises.

○ **g)** In einem gleichschenkeligen Dreieck stimmt mindestens eine Höhe mit einer Schwerlinie überein.

○ **h)** Der Schwerpunkt teilt jede Schwerlinie im Verhältnis 2 : 1.

1096. Der fehlende Text ist einzusetzen:

a) Zwei Dreiecke sind ..... (immer/nicht immer) kongruent, wenn sie ähnlich sind und in einer Seite überein stimmen. (Begründung?)

b) Zwei Dreiecke sind ..... (immer/nicht immer) kongruent, wenn sie in zwei Winkeln überein stimmen. (Begründung?)

c) Zwei Dreiecke sind ..... (immer/nicht immer) kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein stimmen. (Begründung?)

d) Im Dreieck schneiden einander die drei Seitensymmetralen in einem Punkt, dem ..... (Inkreismittelpunkt/Umkreismittelpunkt/Schwerpunkt).

e) In jedem gleichseitigen Dreieck sind die Innenwinkel gleich groß, nämlich jeweils .....°.

f) Es gibt ..... (ein/kein) rechtwinkeliges Dreieck, bei welchem dem rechten Winkel eine Kathete gegenüber liegt.

g) Jedes gleichschenkelige Dreieck hat gleich große ..... (Innenwinkel/Basiswinkel/Außenwinkel).

h) Wenn von einem allgemeinen Dreieck der Umfang und zwei Seitenlängen gegeben sind, so ist es ..... (möglich/nicht möglich), den Flächeninhalt des Dreiecks mit Hilfe der HERONschen Flächenformel zu berechnen.

Die folgenden Tabellen sind zu vervollständigen:

1097. Allgemeines Dreieck

	a	b	c	h_a	h_b	h_c	A
a)	13	14	15				
b)	21	28	35				
c)	21	85	104				

Bemerkung: Einige Seiten vorher — im Kapitel **5. Dreieck** — gibt es ein analoges Lehrbeispiel.

1098. Rechtwinkeliges Dreieck

	a	b	c	h	p	q	A		a	b	c	h	p	q	A
a)	3	4						**b)**	5		13				
c)	6			4,8				**d)**	4				3,2		
e)		70				66,216		**f)**	18						720
g)		99					990	**h)**				32,612		69,753	

1099. Gleichschenkeliges Dreieck

	a	c	h_a	h_c	A	u		a	c	h_a	h_c	A	u
a)	6	4					**b)**	32,5			31,5		
c)		6		4			**d)**		8			12	
e)	8					22	**f)**		6				20
g)			202,42		20748		**h)**			22,703	35		

1100. Gleichseitiges Dreieck

	a	h	A
a)	6		
b)		2,5	
c)			30

1101. Von einem Dreieck sind der Flächeninhalt und eine Seite bzw. eine Höhe gegeben. Die zugehörige Höhe bzw. Seite des Dreiecks ist zu berechnen: **a)** $A = 56\ cm^2$, $a = 2{,}8\ dm$ **b)** $A = 2522\ dm^2$, $h_a = 5{,}2\ m$

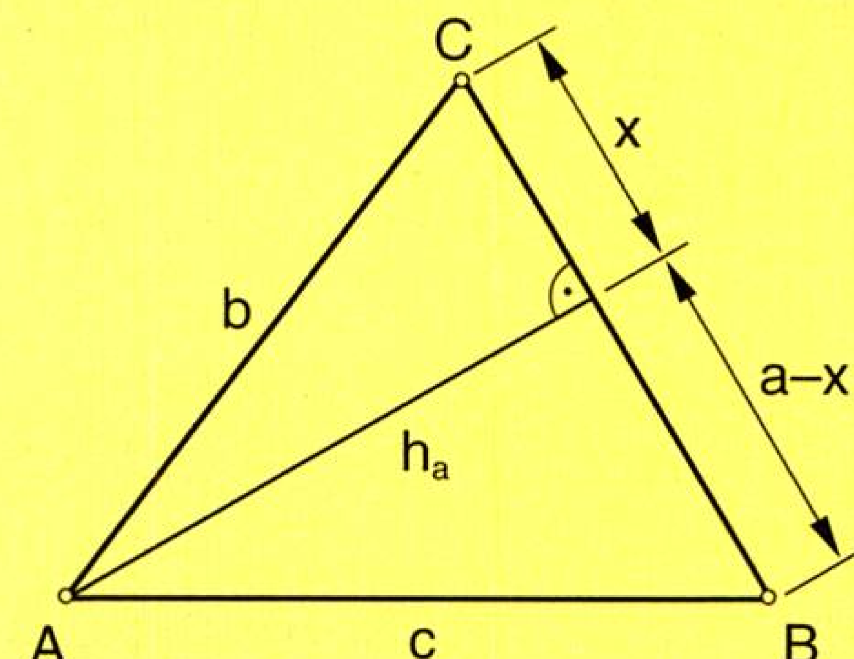
1102. In einem Dreieck verhalten sich die Winkel ihrer Größe nach wie **a)** 1:2:3 **b)** 2:3:4. Es sind die Winkel die diesen Anforderungen entsprechen in dezimaler Schreibweise anzugeben!

1103. Von einem Dreieck sind die Seitenlänge $a = 4\ cm$ und die Höhe $h_a = 3\ cm$ gegeben. Die Fläche des dazu ähnlichen Dreiecks mit dem Bestimmungsstück **a)** $a' = 6\ cm$ **b)** $h'_a = 15\ cm$ ist zu berechnen.

1104. Von einem Dreieck sind die Seitenlängen $a = 3\ cm$, $b = 5\ cm$, $c = 6\ cm$ gegeben. Man berechne den Flächeninhalt jenes dazu ähnlichen Dreiecks, das den Umfang **a)** $u' = 35\ cm$ **b)** $u' = 42\ cm$ hat!

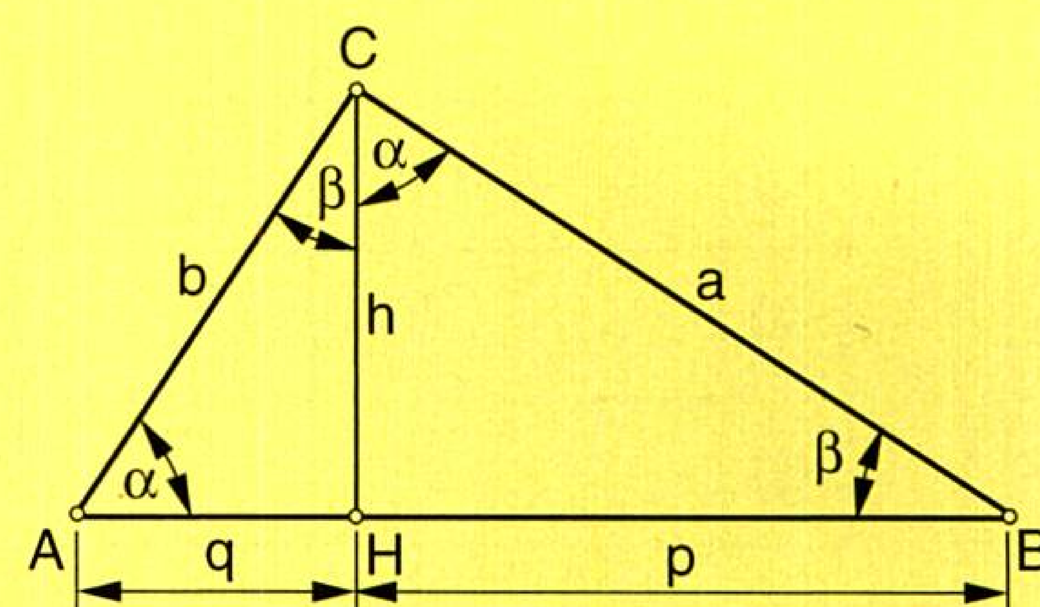
1105. Von einem Dreieck sind die Seitenlängen $a = 7$ cm, $b = 4$ cm und der Umfang $u = 19$ cm gegeben. Man berechne den Umfang jenes dazu ähnlichen Dreiecks, das durch die Seitenlänge **a)** $a' = 3$ cm **b)** $c' = 2{,}625$ cm festgelegt ist!

1106. Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie 84 : 3549. Man berechne den Flächeninhalt des ersten Dreiecks, wenn das zweite Dreieck durch die Grundlinie $c = 15$ cm und die Höhe $h_c = 72{,}8$ cm bestimmt ist!



1107. Von einem Dreieck sind die Seitenlängen $a = 26$ cm, $b = 28$ cm und die Höhe $h_a = 25{,}85$ cm gegeben. Es ist **a)** h_b **b)** h_c zu berechnen.

Anleitung zu b): Die Länge der Seite c kann durch zweimalige Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes bestimmt werden.



1108. Der Kathetensatz ist mit Hilfe der Ähnlichkeit zu beweisen!

Anleitung: Δ ABC ~ Δ CHB

1109. Der Höhensatz ist mit Hilfe der Ähnlichkeit zu beweisen!

Anleitung: Δ CHB ~ Δ AHC

1110. Der pythagoräische Lehrsatz ist mit Hilfe der Kathetensätze zu beweisen!

Anleitung: Man addiere die Kathetensätze.

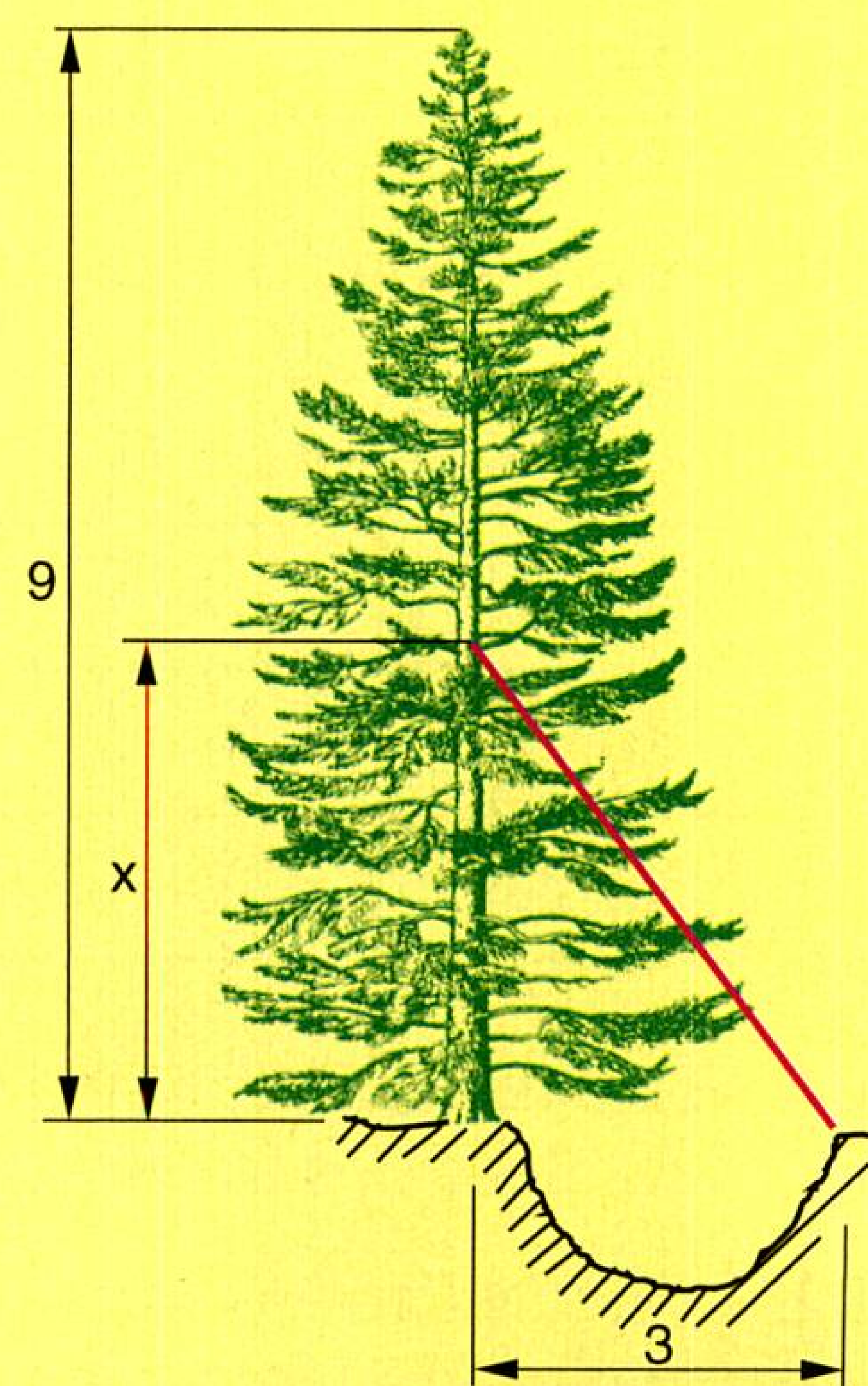
1111. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist der Flächeninhalt $A = 120\ \text{cm}^2$, die Seitenlänge $a = 24$ cm. Es ist die Seitenlänge c zu berechnen.

1112. Die Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks sind 12 m und 16 m. Wie groß ist der Flächeninhalt A und die Höhe h des Dreiecks?

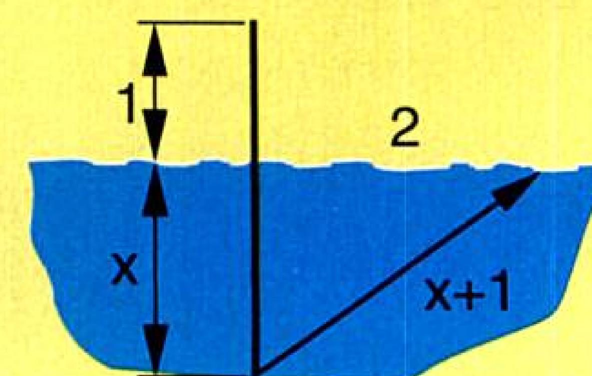
1113. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist der Winkel α **a)** doppelt **b)** dreimal so groß wie der Winkel β. Man berechne den Winkel α und den Winkel β!

1114. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist die Kathete a um 17 mm kürzer als die Kathete b. Wenn a um 8 mm verlängert und b um 4 mm verkürzt wird, so bleibt die Hypotenusenlänge unverändert. Man berechne den **a)** Umfang **b)** Flächeninhalt der beiden Dreiecke!

1115. Von einem rechtwinkeligen Dreieck sind die Seitenlängen $a = 16$ cm und $b = 30$ cm gegeben. Die Fläche des ähnlichen Dreiecks mit dem Bestimmungsstück **a)** $a' = 32$ cm **b)** $b' = 90$ cm ist zu berechnen.



1116. Am Rande eines 3 m breiten Grabens steht ein 9 m hoher Baum. Ein Sturm bricht ihn so ab, dass seine Spitze gerade das andere Ufer berührt. Wie hoch liegt die Bruchstelle?



1117. 2 m vom Ufer eines Teiches entfernt ragt ein Schilfrohr 1 m über das Wasser. Wenn man es ans Ufer zieht, reicht es gerade bis zum Wasserspiegel. Wie tief ist der Teich?

1118. In einem gleichschenkeligen Dreieck ist der Winkel γ **a)** doppelt **b)** 3-mal so groß wie ein Basiswinkel. Man berechne die Winkel des Dreiecks.

1119. In einem gleichschenkeligen Dreieck ist der Winkel α **a)** doppelt **b)** 3-mal so groß wie der Winkel an der Spitze. Es sind die Winkel des Dreiecks zu berechnen.

1120. In einem gleichschenkeligen Dreieck ist **a)** der Winkel an der Spitze um 52° kleiner als das Doppelte eines Basiswinkels **b)** ein Basiswinkel um 50° kleiner als das Doppelte des Winkels an der Spitze. Man berechne die Winkel.

1121. In einem gleichschenkeligen Dreieck mit dem Umfang $u = 420$ cm ist die Basis **a)** doppelt **b)** 3-mal so lang wie ein Schenkel. In welchem Verhältnis stehen die Dreiecksseiten?

1122. In einem gleichschenkeligen Dreieck ist die Basis um 5 cm kleiner als der doppelte Schenkel. Man berechne den Flächeninhalt des Dreiecks, wenn $h_c = 3{,}5$ cm.

1123. Die Seitenlängen eines gleichschenkeligen Dreiecks mit dem Flächeninhalt $A = 168\ cm^2$ stehen im Verhältnis 14 : 25. Es sind die Höhe h_c, der Schenkel a und die Grundlinie c zu berechnen.

1124. Die Seitenlängen a und a′ zweier gleichseitiger Dreiecke verhalten sich wie **a)** 2 : 3 **b)** 7 : 6. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte beider Dreiecke?

1125. Die nicht angegebenen Winkel der folgenden Vierecke sind zu berechnen:

	a)	**b)**	**c)**	**d)**	**e)**	**f)**	**g)**	**h)**
α	112° 5′		133°52′	55°10′	39°28′10″	179°12′47″		15° 2′31″
β	66° 7′	119°59′		108°39′	47°13′14″		179°6′30″	175° 2′ 1″
γ	88°13′	48°18′	100°47′			61° 5′19″	48°45′ 7″	151°22′57″
δ		135° 4′	51°19′	121°56′	117° 4′23″	74°22′35″	114°15′21″	

1126. Welche Eigenschaften gelten für welche Figuren?

(1) Alle Winkel sind gleich.

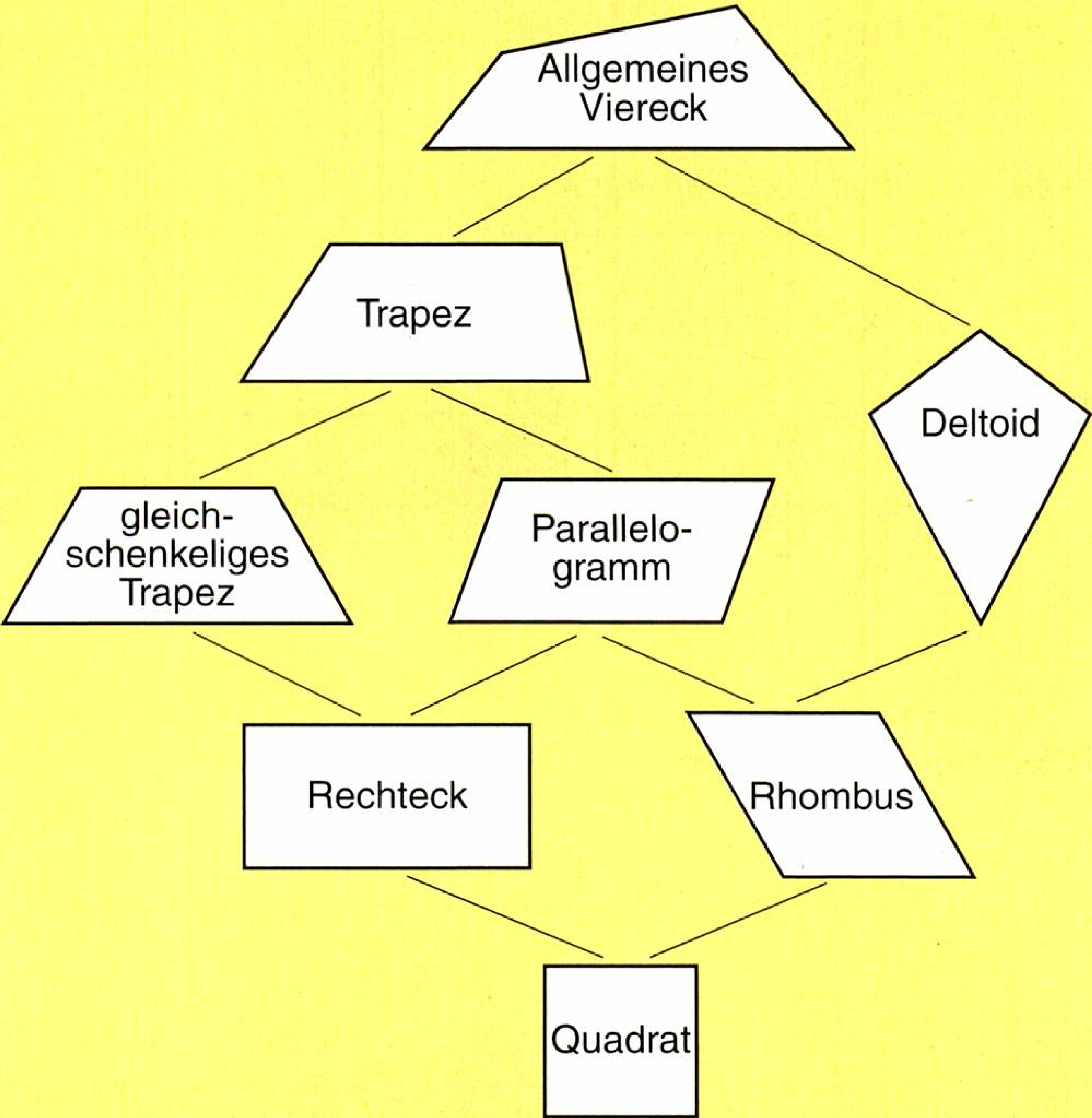
(2) Eine Diagonale ist Symmetrieachse[1)], je zwei Nachbarseiten sind gleich lang.

(3) Alle Winkel und alle Seiten sind gleich.

(4) Ein Paar paralleler (Gegen)seiten.

(5) Zwei Paar paralleler (Gegen)-seiten, gegenüber liegende Seiten sind gleich lang, gegenüber liegende Winkel sind gleich.

(6) Zwei Diagonalen sind Symmetrieachsen[1)], alle Seiten sind gleich lang.



[1)] Eine ebene Figur heißt **achsensymmetrisch**, wenn sie durch eine Gerade in zwei spiegelbildlich gleiche Hälften zerlegt werden kann. Die Gerade heißt **Symmetrieachse** — vgl. Kapitel **4. Symmetrie.**

1127. Die wahren Aussagen sind anzukreuzen:

○ **a)** In einem Parallelogramm sind die gegenüber liegenden Winkel gleich groß und die gegenüber liegenden Seiten gleich lang.

○ **b)** Die Summe der Innenwinkel eines Trapezes ist 180°.

○ **c)** Die Diagonalen eines gleichschenkeligen Trapezes sind verschieden lang und schneiden einander.

○ **d)** Die Diagonalen einer Raute halbieren einander und die Diagonalen eines Rechtecks sind gleich lang.

○ **e)** Die Diagonalen eines Quadrats halbieren einander, sind gleich lang, stehen aufeinander normal und halbieren die Innenwinkel.

○ **f)** Die Diagonalen eines Parallelogramms stehen aufeinander normal.

○ **g)** Die Diagonalen eines Drachenvierecks stehen aufeinander normal und sind gleich lang.

○ **h)** Im Deltoid liegen die Schnittpunkte gleich langer Seiten einander gegenüber.

1128. Der fehlende Text ist einzusetzen:

a) Die Summe der Innenwinkel einer Raute ist .....°.

b) Ein Viereck mit mindestens einem parallelen Seitenpaar heißt ......

c) Die Diagonalen eines Deltoids stehen ..... (immer/niemals/nur in Sonderfällen) aufeinander normal.

d) Die Mittellinie eines Trapezes ist ..... (halb/doppelt/genau) so lang wie die Summe der Länge der beiden parallelen Seiten.

e) Wenn in einem Viereck die Diagonalen aufeinander normal stehen, dann ist das Viereck .... (immer/niemals/nur in Sonderfällen) ein Rhombus.

f) Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, sind die Seiten ..... (immer/manchmal/niemals) gleich lang.

g) Es ist ..... (möglich/unmöglich), dass alle vier Winkel eines Vierecks spitze Winkel sind.

h) Im regelmäßigen Sechseck gehen alle Diagonalen ..... (immer/niemals/nur in Sonderfällen) durch einen Punkt.

Die folgenden Tabellen sind zu vervollständigen:

1129. Quadrat und Rechteck

	a	b	d	A	u		a	b	d	A	u
a)	10	10				**b)**	10	8			
c)	5			25		**d)**		5		20	
e)	23				92	**f)**		17			50
g)	12		16,971			**h)**		36	85		

1130. Parallelogramm

	a	b	e	f	h_a	h_b	A		a	b	e	f	h_a	h_b	A
a)	30	28			22,4			**b)**	3	5					12
c)	17	10				16,8		**d)**	56	34					1680
e)		10	8		6,6144			**f)**		13		24,331	11,2		
g)	45					36	1800	**h)**	97	328		292,85			

1131. Rhombus

	a	e	f	h	A	u		a	e	f	h	A	u
a)		6	8				**b)**	52	40				
c)	13		24				**d)**	85			65,224		
e)	25				336		**f)**		40			600	
g)		60		28,235			**h)**					1350	150

1132. Trapez

	a	b	c	d	e	f	h	A
a)	195	52	120	73				
b)	50	13		37		19,209		
c)	80		5	65		23,345		
d)	84		40	26,5	58,5			
e)	40		1			25,298		492
f)	250		10	197			28	
g)		68	5	257		72,45		
h)	131			45		110,055		2844

1133. Gleichschenkeliges Trapez

	a	b	c	e	h	A	u		a	b	c	e	h	A	u
a)	20	5			4			**b)**	12	13	2				
c)	24	10					52	**d)**	50		20			280	
e)		25	8		24			**f)**			25	33,526	17,656		
g)	44			39	15			**h)**	84	52		80			

1134. Deltoid

	a	b	e	f	A	u		a	b	e	f	A	u
a)	39	25		30			**b)**	5,3		8,8	9		
c)		82	104	36			**d)**	26		28			112
e)		257		64	10080		**f)**		226	240		7200	
g)	85			154	23100		**h)**	40		175		4200	

1135. Die Summe der Flächeninhalte zweier Quadrate beträgt $4432\,mm^2$. Wie groß ist die Summe ihrer Umfänge, wenn die Seite des ersten Quadrats **a)** doppelt **b)** 3-mal so groß ist wie die des zweiten Quadrats?

1136. Ein Rechteck, dessen Seiten sich wie $4:3$ verhalten, soll einem Quadrat mit der Seite $a = 2\sqrt{3}$ cm flächengleich sein. Man berechne die Diagonale des Rechtecks!

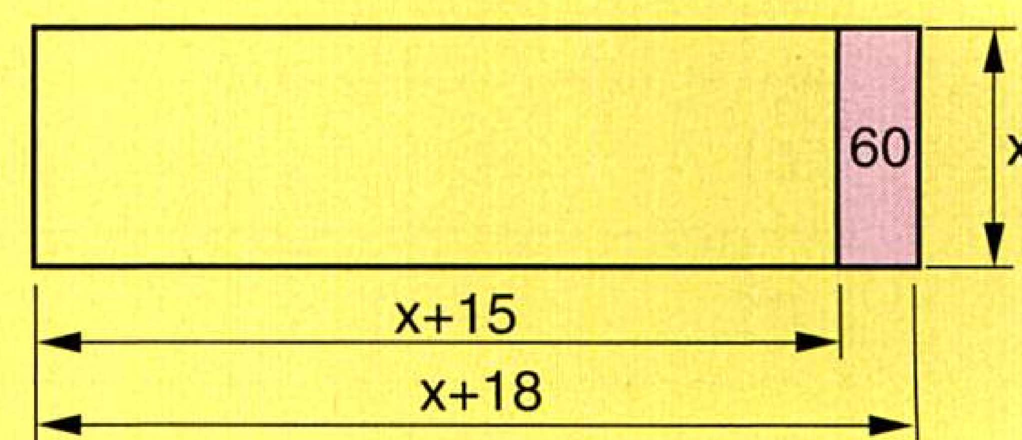
1137. Die Differenz der Seiten eines Rechtecks, das den gleichen Umfang wie ein Quadrat mit der Diagonale $164\sqrt{2}$ cm besitzt, beträgt 48 cm. Man berechne den Flächeninhalt des Rechtecks!

1138. Von einem Rechteck ist die Diagonale $d = 20$ cm gegeben. Man berechne Flächeninhalt und Umfang, wenn sich die Seiten $a:b$ wie $3:4$ verhalten!

1139. Von einem Rechteck ist der Umfang $u = 94$ cm gegeben. Man berechne — unter der Voraussetzung, dass die eine Seite um 17 cm länger ist als die andere — den Flächeninhalt und die Diagonale des Rechtecks!

1140. Von einem Rechteck ist der Umfang $u = 94$ cm gegeben. Man berechne — unter der Voraussetzung, dass die Länge um 1 cm kleiner als das Dreifache der Breite ist — den Flächeninhalt und die Diagonale des Rechtecks!

1141. In einem Rechteck ist die eine Seite um 15 cm länger als die andere. Vergrößert man die längere Seite um 3 cm, so ist der Flächeninhalt des neuen Rechtecks um $60\,cm^2$ größer als der des ersten Rechtecks. Man berechne den Flächeninhalt des ursprünglichen Rechtecks!



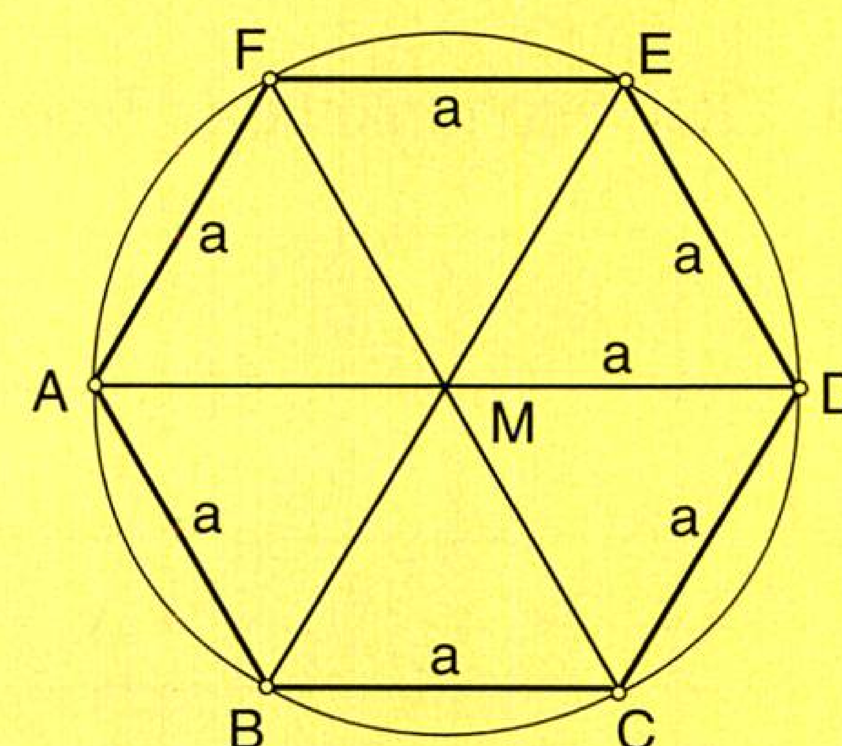
1142. In einem Rechteck ist die eine Seite um 36 cm länger als die andere. Verkürzt man die kürzere Seite um 7 cm, so ist der Flächeninhalt des neuen Rechtecks um $595\,cm^2$ kleiner als der des ersten Rechtecks. Man berechne den Flächeninhalt des ursprünglichen Rechtecks!

1143. Von einem Viereck sind die Seitenlängen $a = 5$ dm, $b = 4$ dm, $c = 2$ dm, $d = 5$ dm gegeben. Ein ähnliches Viereck hat den Umfang **a)** $u' = 33$ dm **b)** $u' = 10$ dm. Man berechne die Seitenlängen des ähnlichen Vierecks!

1144. Es ist zu zeigen, dass für das regelmäßige Sechseck gilt:

$$A = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$$

Anleitung: Das regelmäßige Sechseck ist aus 6 gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt.



1145. Der Abstand der Gegenseiten eines regelmäßigen Sechsecks ist 34,64 m. Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Sechsecks?

1146. Die wahren Aussagen sind anzukreuzen:

- ○ **a)** Kreisflächen mit gleichen Radien sind kongruent.
- ○ **b)** Gleich lange Sehnen im selben Kreis haben gleichen Abstand vom Mittelpunkt und gleich weit vom Mittelpunkt eines Kreises entfernte Sehnen sind gleich lang.
- ○ **c)** Das Lot vom Mittelpunkt eines Kreises auf die Tangente geht durch den Berührungspunkt der Tangente.
- ○ **d)** Ein Kreisbogen ist kürzer als die zugehörige Kreissehne.
- ○ **e)** Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem halben Produkt aus dem Umfang und dem Radius des Kreises.
- ○ **f)** Zwischen dem Radius r und dem Durchmesser d eines Kreises besteht folgender Zusammenhang: $r = 2d$.
- ○ **g)** Jener Punkt, von dem die Menge aller Punkte eines Kreises gleichen Abstand haben, heißt Kreismittelpunkt oder Mittelpunkt des Kreises.
- ○ **h)** Kreisflächen mit verschiedenen Radien sind ähnlich.

1147. Der fehlende Text ist einzusetzen:

a) Gleich lange Sehnen eines Kreises haben ..... (immer/nicht immer) den gleichen Abstand vom Mittelpunkt.

b) Eine Sehne, die durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft, heißt ..... (Passante/Tangente/Durchmesser).

c) Eine Gerade, die mit dem Kreis keinen gemeinsamen Punkt hat, heißt ..... (Sekante/Tangente/Passante) des Kreises.

d) Eine Strecke, die zwei beliebige Punkte des Kreises verbindet, heißt ..... (Tangente/Sehne/Passante) des Kreises.

e) Eine Gerade, die mit einem Kreis zwei gemeinsame Punkte hat, heißt ..... (Sekante/Tangente/Passante) des Kreises.

f) Eine Gerade, die mit einem Kreis genau einen gemeinsamen Punkt hat, heißt ..... (Sekante/Tangente/Passante) des Kreises.

g) Der Flächeninhalt eines Kreissektors ist gleich dem Inhalt eines Dreiecks, dessen Basis gleich dem Kreisbogen des Kreissektors und dessen Höhe gleich dem ..... (Radius/Durchmesser/Winkel α) ist.

h) Von jedem Punkt des Kreisbogens über der Sehne AB erscheint die Sehne ..... (immer/niemals/nur in Sonderfällen) unter gleichem Winkel.
(Sonderfall: $\overline{AB} = 2r$, dann ist ω = ...°, Satz von .....)

ω
ω
ω
A
B

Die folgenden Tabellen sind zu vervollständigen:

1148. Kreis

	r	d	A	u		r	d	A	u
a)	10				**b)**	23			
c)		17			**d)**		30		
e)			45,84		**f)**			225	
g)				112	**h)**				24

1149. Kreissektor

	r	α	b	A	u		r	α	b	A	u
a)	70	18°				**b)**	42		22		
c)	36			792		**d)**	252				570
e)		77°	242			**f)**		63°		3520	
g)		21°			213	**h)**			26		116

1150. Kreisring

	r_1	r_2	A	u		r_1	r_2	A	u
a)	49	42			**b)**	0,85	0,64		
c)	4		22		**d)**		2,1	10,78	
e)	56			660	**f)**		63		836
g)			770	220	**h)**			3696	528

1151. Es ist die Länge der längsten Sehne eines Kreises mit dem Flächeninhalt **a)** $100\,cm^2$ **b)** $200\,cm^2$ zu berechnen!

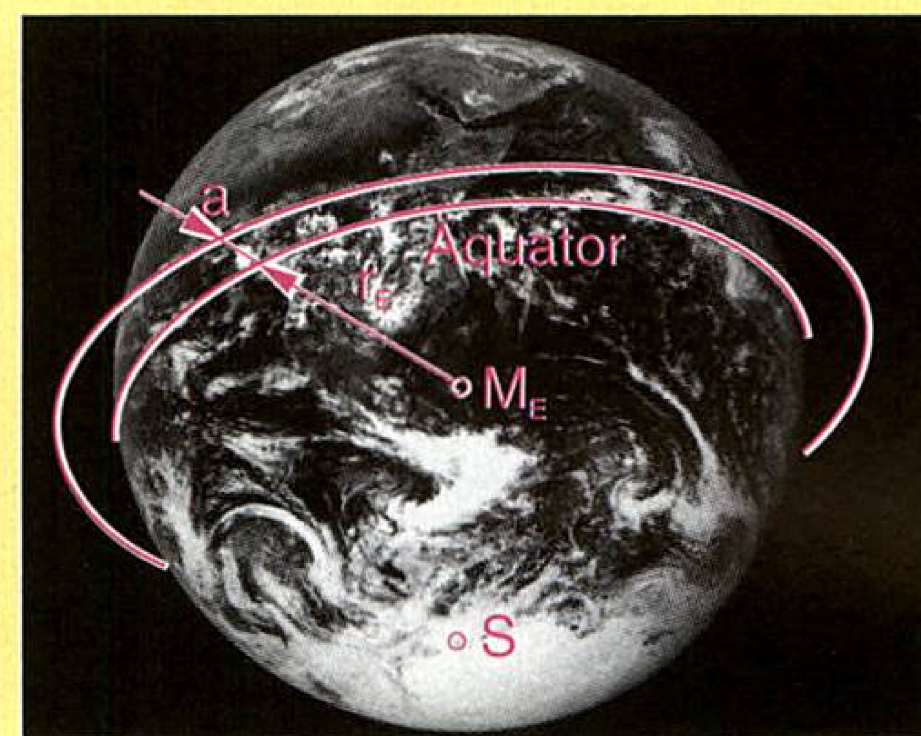
1152. Welche Länge hat die Sehne, die einen Kreis vom Umfang **a)** $u = 10\,cm$ **b)** $u = 25\,cm$ in zwei flächengleiche Teile zerlegt?

1153. Die Differenz der Flächeninhalte zweier Kreise, deren Radien sich wie 1:2 verhalten, beträgt 27π. Die Summe der Flächeninhalte der beiden Kreise ist zu ermitteln.

1154. Von einem Kreis ist der Radius **a)** $r = 7\,dm$ **b)** $r = 10\,dm$ gegeben. Man berechne den Radius jenes kleineren konzentrischen[1)] Kreises, durch den der Flächeninhalt des entstandenen Kreisringes die Hälfte der Kreisfläche des gegebenen Kreises beträgt.

1155. Ein Kreis vom Radius **a)** $r = 4\sqrt{2}\,m$ **b)** $r = 8\,m$ soll durch einen konzentrischen[1)] Kreis in zwei flächengleiche Teile geteilt werden. Wie groß ist die Breite des Kreisrings?

1156. Wir legen — natürlich nur in Gedanken — einen Ring um den Erdäquator, der anschließend um 1 m verlängert wird. Der durch die Verlängerung entstandene Abstand zwischen dem Erdäquator und dem Ring soll überall gleich lang sein. Wie groß ist dieser Abstand?

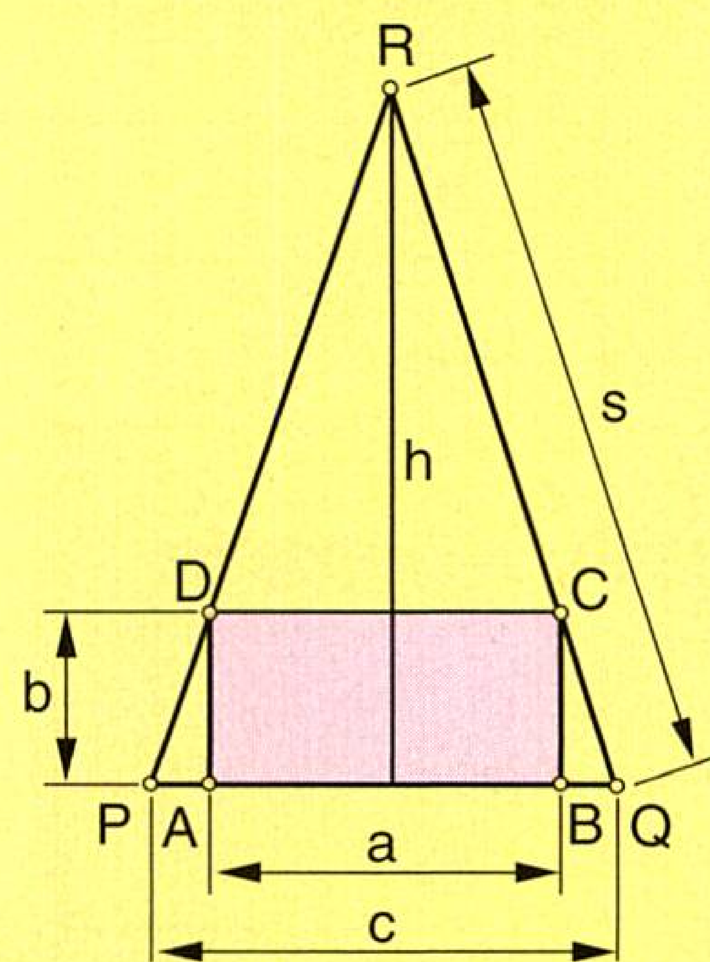


Vermischte Aufgaben

1157. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte eines gleichseitigen Dreiecks und eines Quadrats, wenn deren Umfänge gleich groß sind?

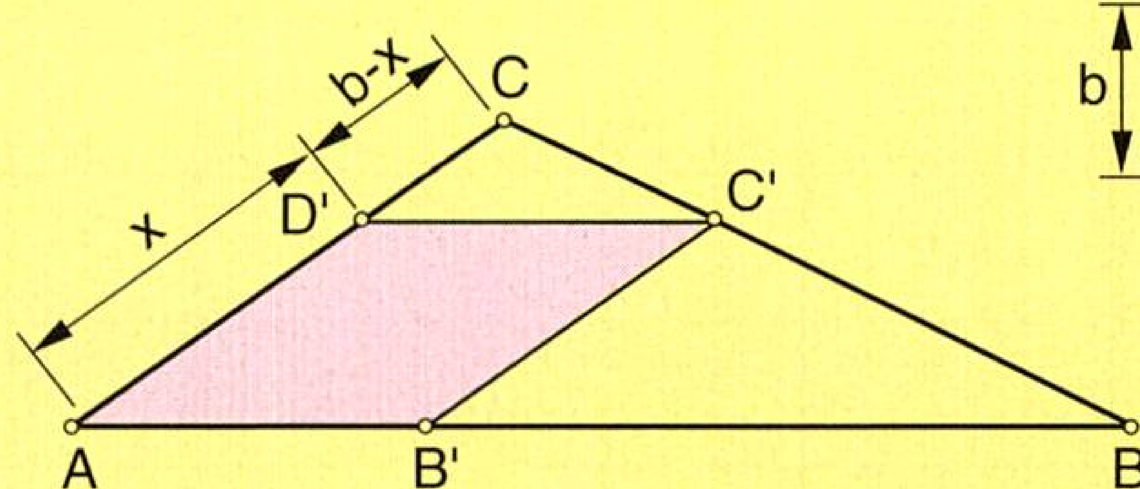
1158. In welchem Verhältnis stehen die Umfänge eines gleichseitigen Dreiecks und eines Quadrats, wenn deren Flächeninhalte gleich groß sind?

1159. Wie groß ist der Schenkel s eines gleichschenkeligen Dreiecks ($c = 8\,cm$), dem ein Rechteck ($a = 6\,cm$, $b = 3\,cm$) eingeschrieben wird?



1160. Einem Dreieck mit den Seiten $a = 4\,cm$, $b = 3\,cm$, $c = 6\,cm$ wird eine Raute eingeschrieben, die mit zwei Seiten auf b bzw. c liegt. Man berechne die Seitenlänge der Raute.

Anleitung: $\Delta\, ABC \sim \Delta\, D'C'C$; $c : b = x : (b - x)$



1161. Ein gleichschenkeliges Trapez mit den Seitenlängen $a = 38\,mm$, $b = 6\,mm$ und $c = 34\,mm$ hat den gleichen Flächeninhalt wie ein gleichschenkeliges Dreieck mit der Grundlinie $c' = 22\,mm$. Man berechne die Differenz der Umfänge der beiden Figuren!

1162. Jenes rechtwinkelige Dreieck, dessen Katheten sich um 7 cm unterscheiden und dessen Hypotenuse um 7 cm länger ist als die längere Kathete, soll einem Deltoid mit der Diagonale $e = 10\,cm$ flächengleich sein. Man berechne die zweite Diagonale des Deltoids.

Anleitung: Man wähle die längere Kathete als Variable.

1163. Ein Quadrat mit der Seite **a)** $a = 3\,cm$ **b)** $a = 12\,cm$ soll einem regelmäßigen Sechseck flächengleich sein. Der Umfang des Sechsecks ist zu ermitteln!

1164. Die Fläche eines Kreises mit dem Radius $r = 6\,cm$ soll durch zwei konzentrische[1)] Kreise im Verhältnis 1:3:5 geteilt werden. Wie groß sind die Radien der Kreise?

---

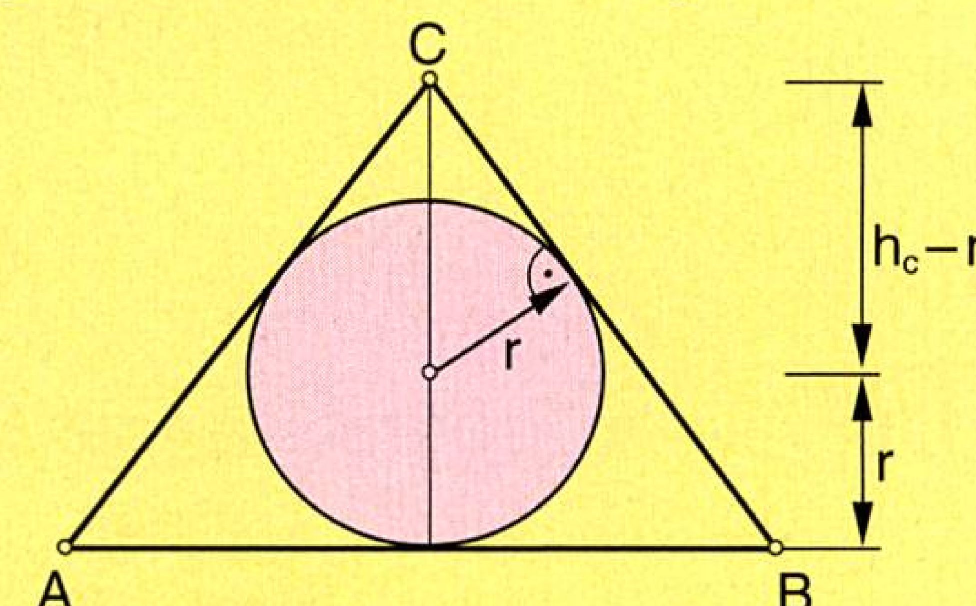
1) Wenn mehrere Kreise den gleichen Mittelpunkt haben, so nennt man diese Kreise **konzentrisch**.

1165. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte eines Kreises, Quadrats und gleichseitigen Dreiecks zueinander, wenn deren Umfänge gleich groß sind?

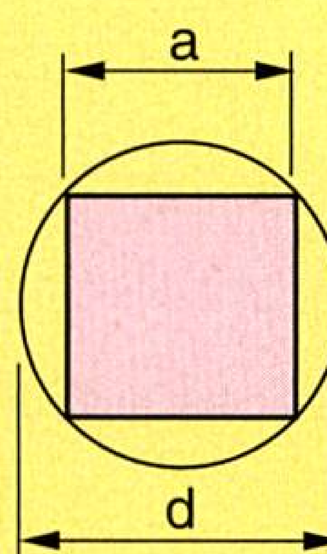
1166. In welchem Verhältnis stehen die Umfänge eines Kreises, Quadrats und gleichseitigen Dreiecks zueinander, wenn deren Flächeninhalte gleich groß sind?

1167. Ein Kreis vom Radius **a)** $r = 7$ cm **b)** $r = 10$ cm ist einem gleichseitigen Dreieck flächengleich. Die Differenz der Umfänge der beiden Figuren ist zu ermitteln.

1168. Wie groß ist der Radius r des einem gleichschenkeligen Dreieck ($a = b = 10$ cm, $c = 12$ cm) eingeschriebenen Kreises?
Anleitung: $\frac{c}{2} : a = r : (h_c - r)$



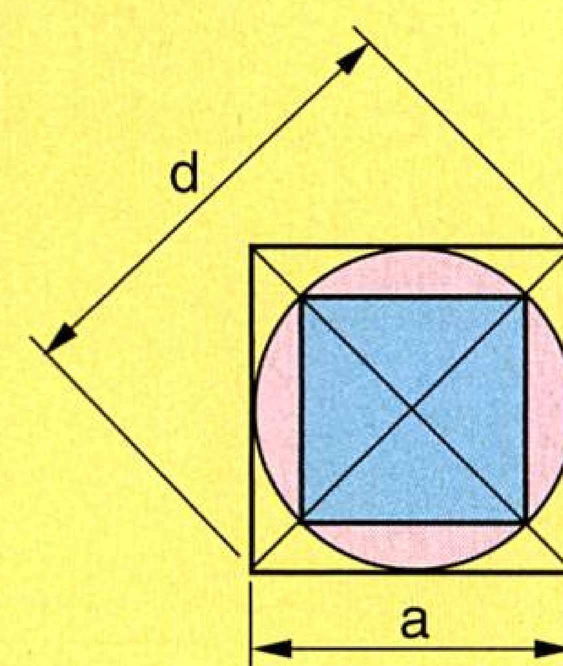
1169. Aus einem Baumstamm mit kreisförmigem Querschnitt soll ein Balken von quadratischem Querschnitt heraus geschnitten werden. Man berechne den Flächeninhalt des Balkenquerschnitts, wenn der Durchmesser d des Baumstammes **a)** $6\sqrt{2}$ dm **b)** 14,142 dm beträgt.



1170. Dem Inkreis eines Quadrats mit der Seitenlänge $a = 4$ m wird ein Quadrat eingeschrieben.

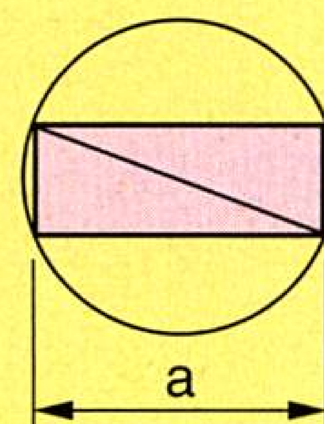
a) In welchem Verhältnis stehen die Seiten beider Quadrate?

b) Wie groß ist der Flächeninhalt des eingeschriebenen Quadrats?



1171. Einem Kreis vom Radius **a)** $r = 5\sqrt{2}$ cm **b)** $r = 9\sqrt{2}$ cm wird ein Quadrat eingeschrieben. Dem Quadrat wird ein Kreis eingeschrieben. Man berechne den Flächeninhalt des entstandenen Kreisrings. Außerdem ist das Verhältnis der Umfänge der dem Quadrat ein- und umgeschriebenen Kreise zu ermitteln.

1172. Einem Kreis vom Radius r mm soll ein Rechteck mit der Seitenlänge a mm eingeschrieben werden. Wie groß ist der Flächeninhalt des Rechtecks? **a)** $r = 25$, $a = 48$ **b)** $r = 17$, $a = 30$

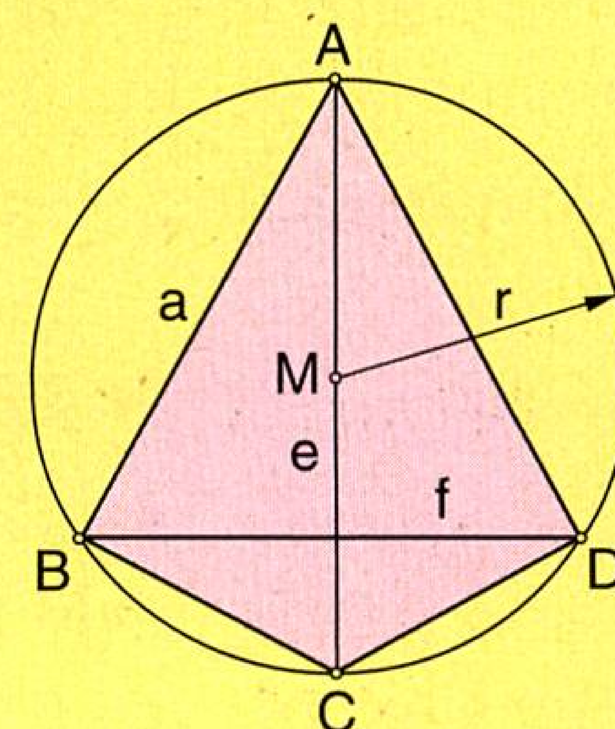


1173. Einem Kreis vom Radius **a)** $r = 7{,}5$ cm **b)** $r = 20$ cm soll ein Rechteck eingeschrieben werden, dessen Seitenlängen sich wie 3 : 4 verhalten. Wie groß ist der Flächeninhalt des Rechtecks?

1174. Einem Kreis mit dem Radius $r = 17$ cm ist ein Deltoid eingeschrieben, dessen eine Seite $a = 30$ cm beträgt.

a) Wie groß sind die Diagonalen und der Flächeninhalt des Deltoids?
Anleitung: Satz von THALES

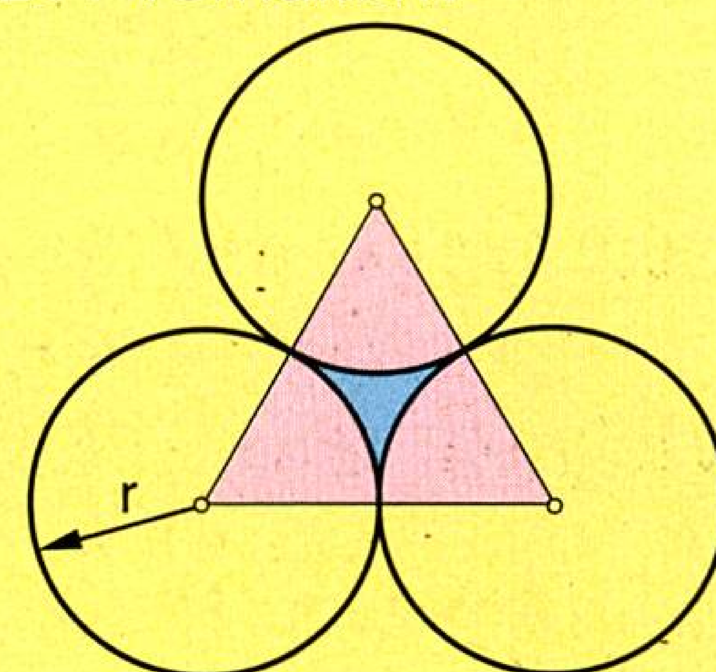
b) Welchen Umfang und welchen Flächeninhalt hat der Kreis?



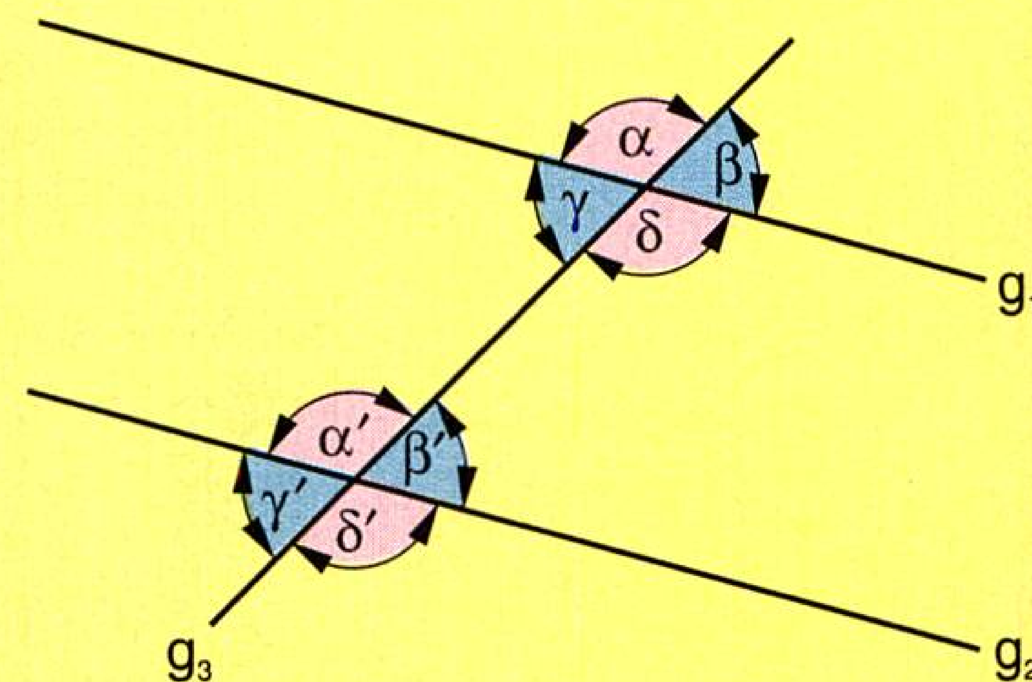
1175. Ein Viertelkreis vom Radius **a)** $r = 49$ mm **b)** $r = 20$ cm soll einem Quadrat flächengleich sein. Seitenlänge des Quadrats?

1176. Von einem Kreissektor ist der Radius $r = 42$ cm und der Winkel **a)** $\alpha = 30°$ **b)** $\alpha = 60°$ gegeben. Welchen Umfang hat das flächengleiche Rechteck, dessen Seiten sich wie 2 : 1 verhalten?

1177. Man berechne den (1) Flächeninhalt (2) Umfang der Figur, welche zwischen drei kongruenten, einander von außen berührenden Kreisen gelegen ist, wenn der Radius eines Kreises **a)** 3,2 mm **b)** 12,7 mm beträgt.

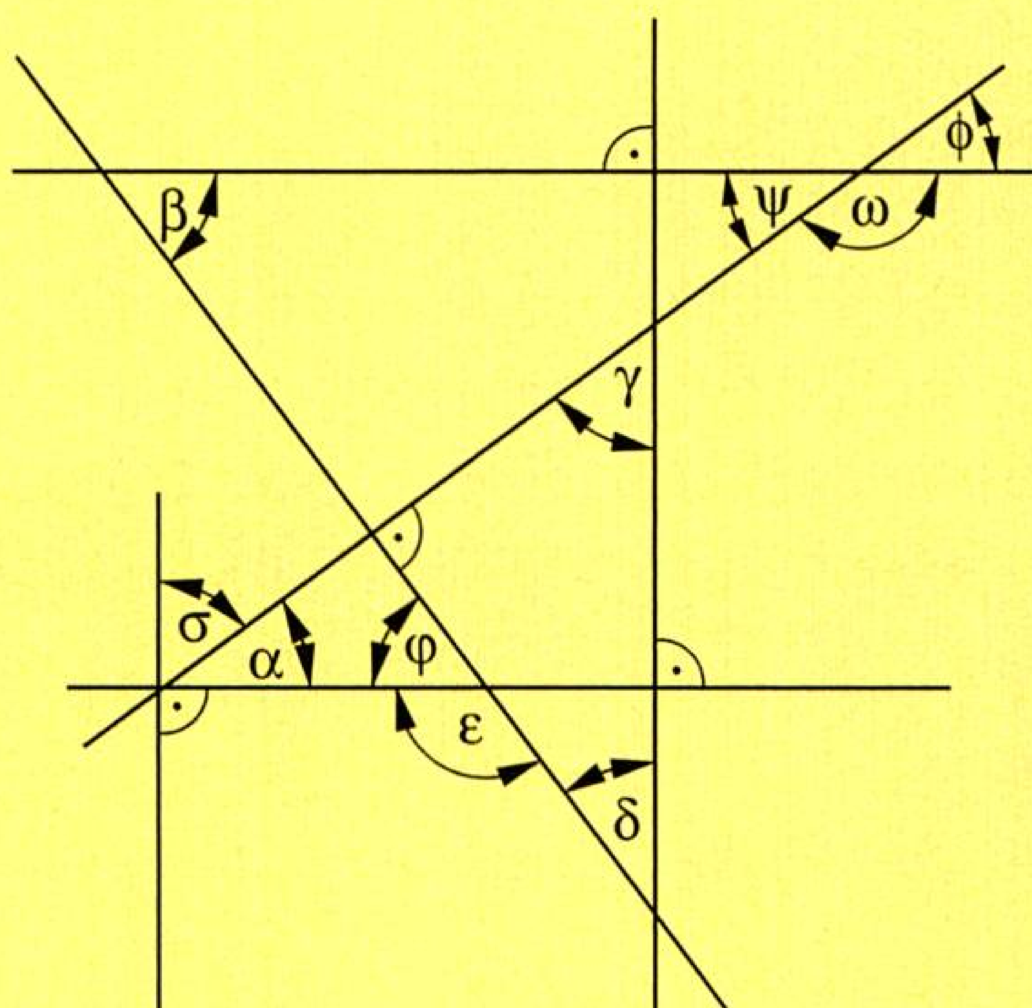


Werden zwei parallele Gerade g_1 und g_2 von einer dritten Geraden g_3 geschnitten, dann entstehen um die beiden Schnittpunkte insgesamt acht Winkel, von denen die Winkel $\left\{\begin{matrix}\gamma \text{ und } \beta' \\ \delta \text{ und } \alpha' \\ \alpha \text{ und } \delta' \\ \beta \text{ und } \gamma'\end{matrix}\right\}$ **Wechselwinkel** genannt werden.



Wechselwinkel sind gleich groß!

1178. Alle in nebenstehender Figur bezeichneten Winkel sind nach ihrer Größe einzuteilen.
Welche Winkel sind
a) Wechselwinkel?
b) Komplementärwinkel zu α?
c) Supplementärwinkel zu α?



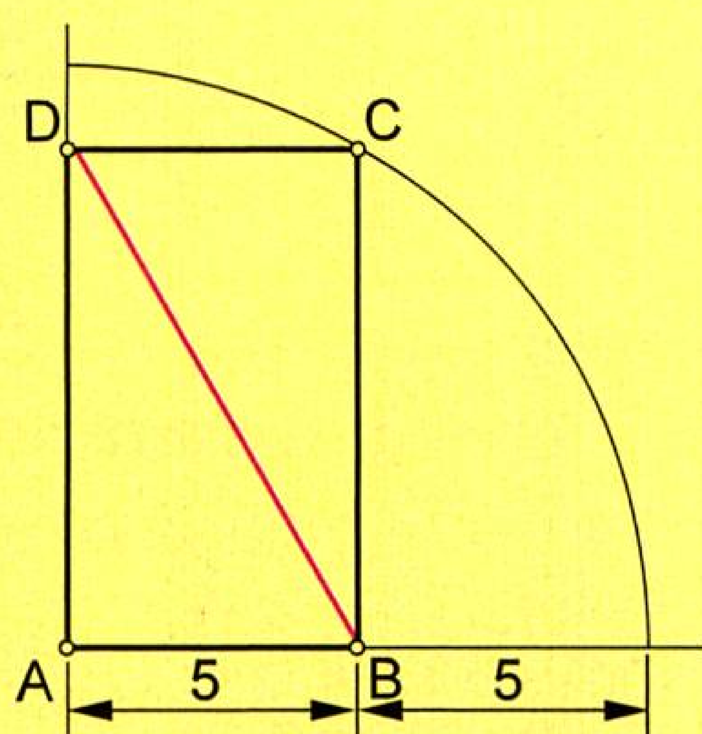
Zwei Winkel heißen **Komplementärwinkel**, wenn sie einander auf 90° ergänzen.

Z. B.: 70° und 20°, 30° und 60° usw.

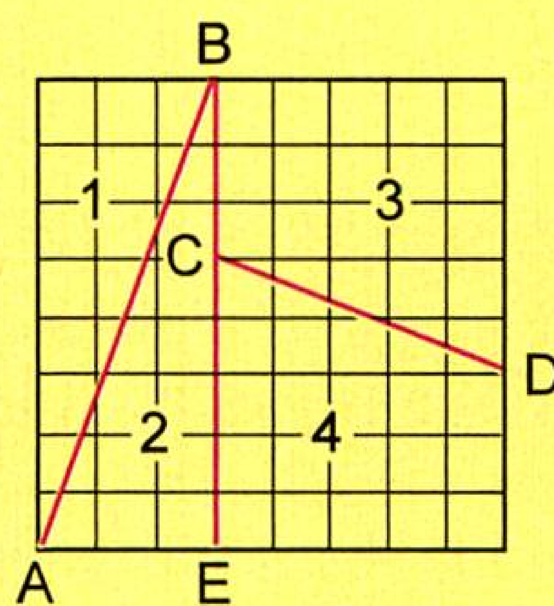
Zwei Winkel heißen **Supplementärwinkel**, wenn sie einander auf 180° ergänzen.

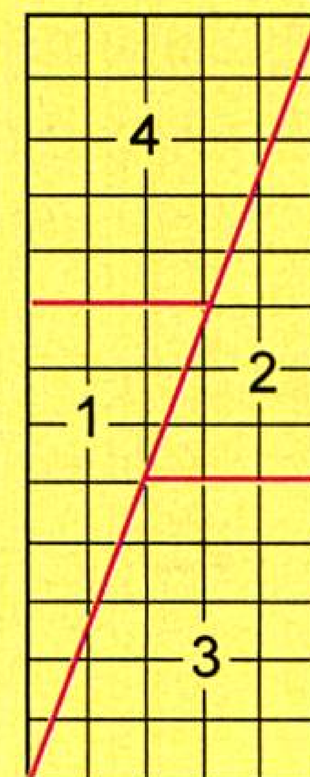
Z. B.: 90° und 90°, 1° und 179° usw.

1179.



Wie groß ist $\overline{BD}$?





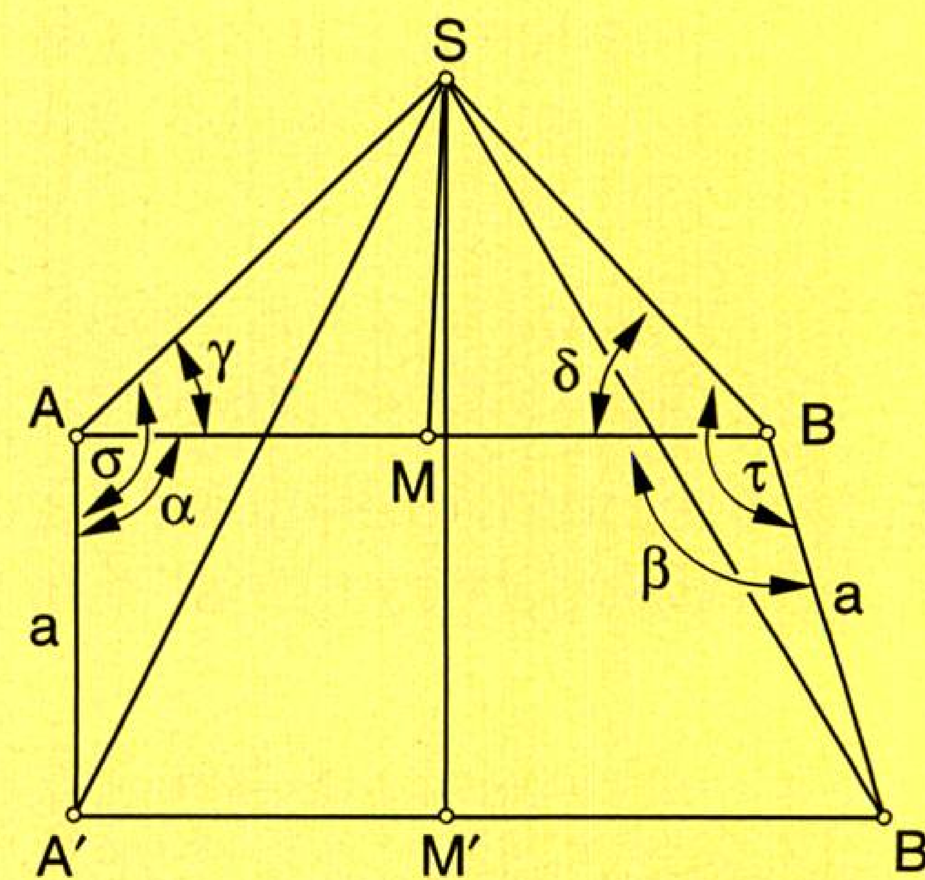
1180. Wundersame Flächenvermehrung
Das Quadrat (vgl. Figur rechts oben) enthält $8 \cdot 8 = 64$ Flächeneinheiten. Wir zerschneiden es an den eingezeichneten Linien $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ und $\overline{BE}$ in 4 Teile. Diese Teile sind nun so zu legen, wie es die nebenstehende Figur zeigt. Es entsteht ein Rechteck mit $5 \cdot 13 = 65$ Flächeneinheiten! Wieso?

1181. Wie vorsichtig man bei Schlussfolgerungen sein muss zeigt der folgende „Beweis", in dem wohl irgendwo ein Trugschluss stecken muss. Aber wo — das ist die Frage!

Voraussetzung: $\alpha = 90°$
$\beta > \alpha$ (hier speziell = 107°)
$\overline{AA'} = \overline{BB'}$
MS ..... Streckensymmetrale von AB
M'S ..... Streckensymmetrale von A'B'

Behauptung: $\alpha = \beta$

Beweis:
$\overline{AS} = \overline{BS}$ (Streckensymmetrale auf AB)
$\overline{A'S} = \overline{B'S}$ (Streckensymmetrale auf A'B')
$\overline{AA'} = \overline{BB'}$ (vgl. Voraussetzung)
folglich $\Delta AA'S \cong \Delta BB'S$ (mit verkehrtem Umlaufsinn: SSS-Satz)
$\sigma = \tau$
$\gamma = \delta$ (gleichschenkeliges ΔABS)
$\Rightarrow \alpha = \beta$



Anleitung: Man konstruiere sehr sorgfältig und wähle $\overline{AB}$ viel kleiner und β größer, mindestens 120°.

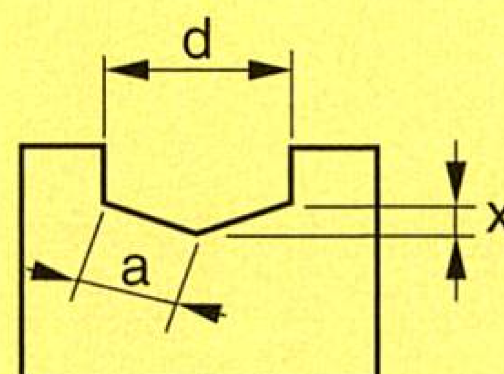
9. Problemstellungen der Technik

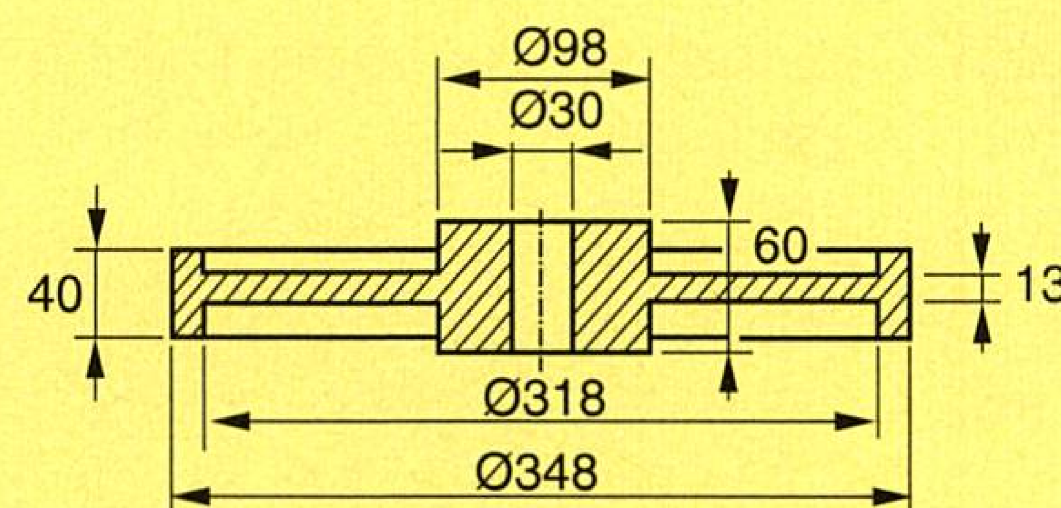
Maschineningenieurwesen/Mechatronik

1182. Die Scheibe einer Holzschleifmaschine hat eine Umlaufgeschwindigkeit $v = 19{,}6$ m/s. Der Durchmesser der Schleifscheibe beträgt 28 cm. Welche Drehzahl ist erforderlich?

1183. Wie groß ist der Umfang u einer Sechskantschraube mit der Schlüsselweite $a = 22$ mm?

1184. Zum Schleifen eines Spiralbohrers mit dem Durchmesser $d = 7$ mm soll eine Lehre nach nebenstehender Figur angefertigt werden. Wie groß ist x zu wählen? ($a = 3{,}7$ mm).

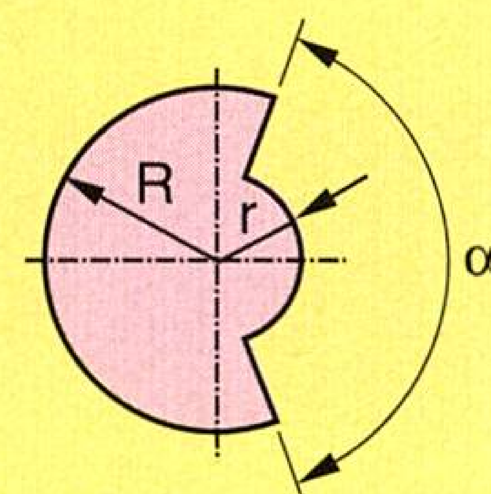




1185. Wie groß ist die (schraffierte) Querschnittsfläche A einer Riemenscheibe, deren Maße in mm sich in nebenstehender Figur ablesen lassen?

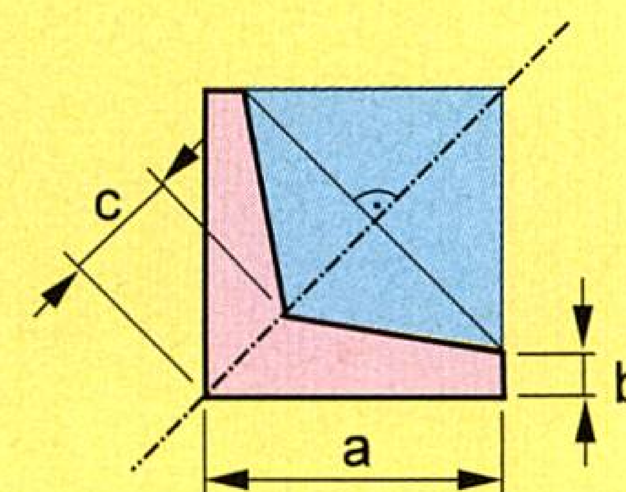
1186. Eine Welle von 66 cm Umfang wird auf einer Drehbank bearbeitet. Wie groß ist der neue Wellenumfang, wenn vom Radius der Welle 7 mm abgedreht werden?

1187. Der Umfang einer Blechschablone ist zu berechnen, wenn folgende Maße bekannt sind: $\alpha = 140°$, $R = 30$ cm, $r = 14$ cm



1188. Ein Guss-Stück von 65,0 cm Länge hat quadratischen Querschnitt. Die Seite des Quadrats misst 8,00 cm. Durch Bearbeitung der Längskanten erhält es einen regelmäßigen achteckigen Querschnitt. Welcher Materialabfall in Prozent ergibt sich durch die Bearbeitung?

1189. Welche Querschnittsfläche A_0 hat ein Winkeleisen, wenn folgende Maße bekannt sind: $a = 26$ cm, $b = 4$ cm, $c = 10$ cm?

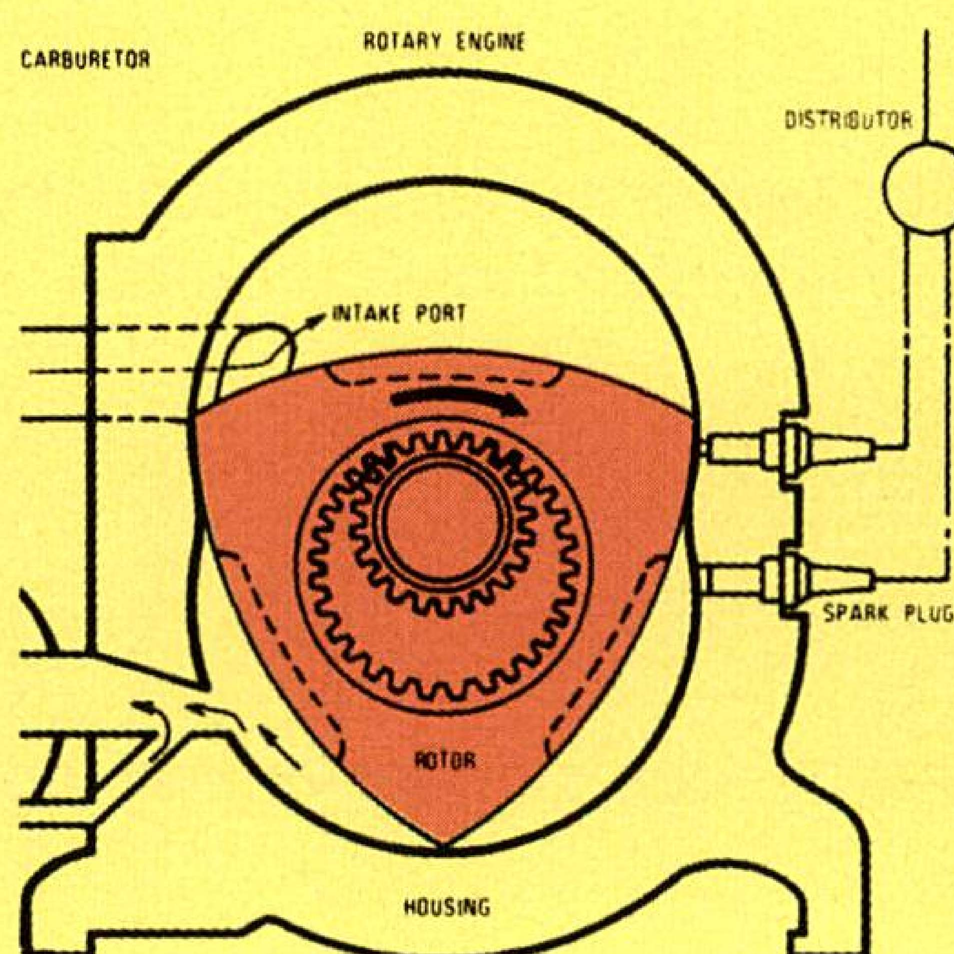


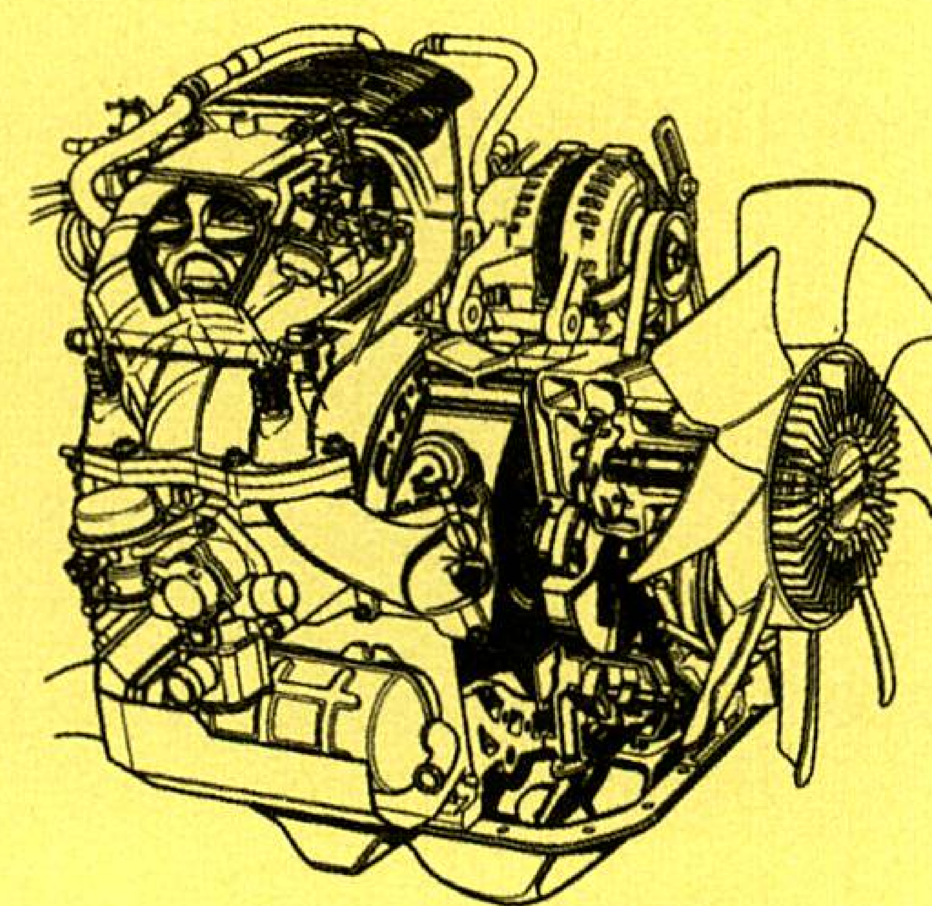
1190. Der Kolben eines Wankelmotors stellt im Querschnitt ein Bogendreieck dar.

a) Wie groß ist der Umfang, wenn $s = 20$ cm?

b) Wie groß ist die Fläche, wenn $s = 20$ cm?

Anleitung: Die Eckpunkte des Bogendreiecks bilden ein gleichseitiges Dreieck (Seitenlänge s), wobei die Seitenlänge s des Dreiecks gleich dem Radius des Bogens ist. Es ist zweckmäßig, die Fläche A zuerst allgemein zu berechnen.





Elektrotechnik/Elektronik

1191. Aus wie vielen Litzendrähten zu je 0,1 mm Durchmesser muss ein Kabel bestehen, damit ein Gesamtquerschnitt von 1 mm^2 zustande kommt?

1192. Ein Kupferdraht mit 4 mm^2 Querschnitt hat eine Isolierschicht, deren Außendurchmesser 3 mm beträgt. Welchen Flächeninhalt hat der Querschnitt der Isolierung?

1193. Zur Kontrolle soll der Isolationsquerschnitt der vorigen Aufgabe wie ein Rechteck behandelt werden, dessen Breite der Dicke der Isolierschicht entspricht und dessen Länge sich als Umfang jenes Kreises ergibt, der in der Mitte zwischen den zwei Kreisen liegt.

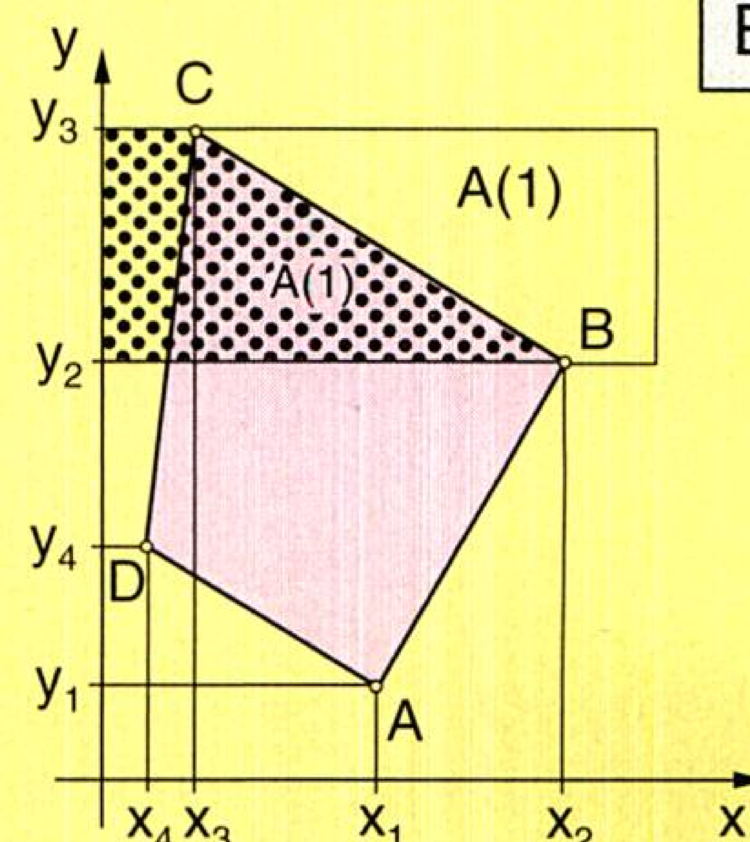
1194. Ein in Europa gefertigtes Kabel zur Übertragung von hochfrequenten Signalen im Bereich 30 MHz bis 450 MHz[1] besitzt einen Querschnitt aus konzentrischen Kreisen mit dem Aufbau

— Innenleiter: Außendurchmesser 4,4 mm
— Isolierung: Schaum-Polyethylen, Außendurchmesser 11,1 mm
— Außenleiter: Kupferfolie, Außendurchmesser 11,4 mm
— Mantel: Polyethylen, Außendurchmesser 15,0 mm.

Wie groß ist die Querschnittsfläche **a)** des Innenleiters **b)** des Außenleiters **c)** der zwischen Außenleiter und Innenleiter liegenden Isolation?

Bautechnik

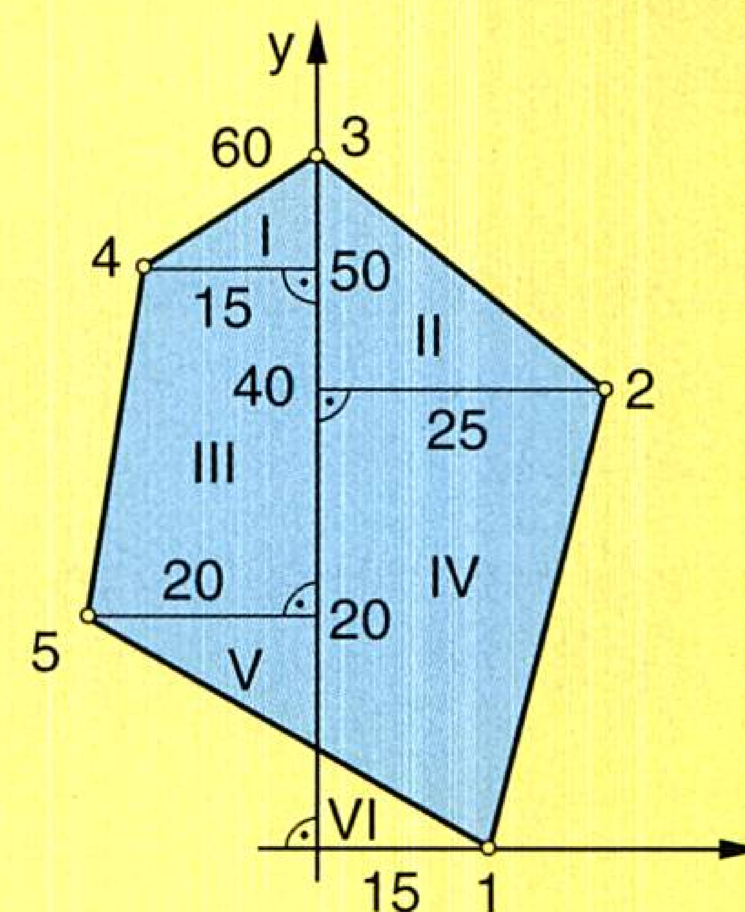
1195. Das nebenstehende Flächenstück ist aus den gegebenen Koordinaten zu berechnen: A(3, 1), B(5, 4,5), C(1, 7), D(0,5, 2,5).



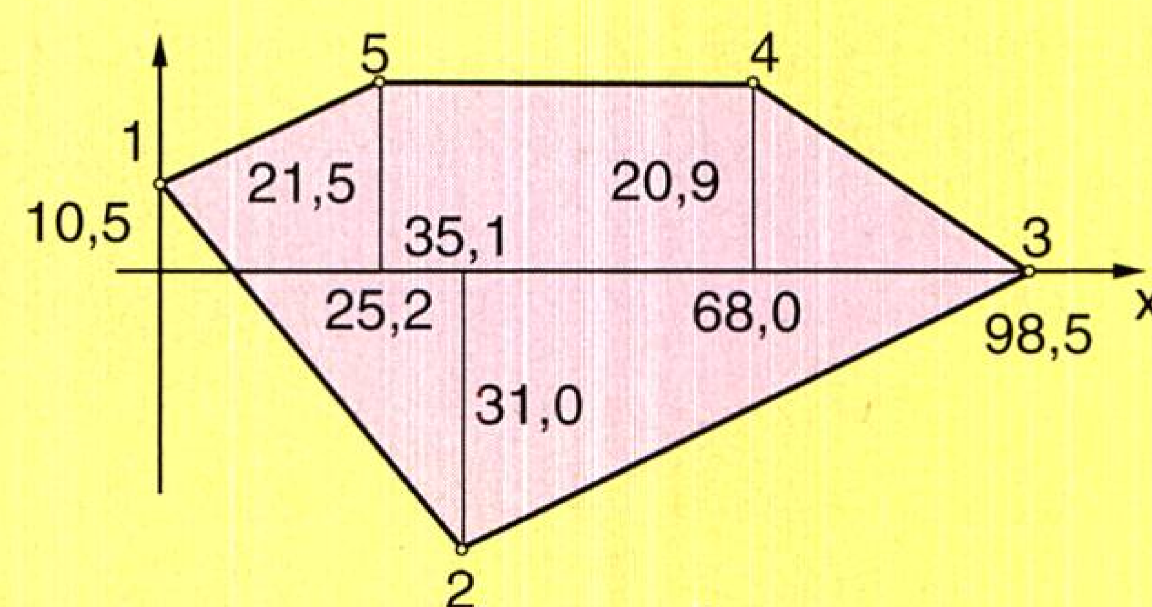
1196. Text wie Aufgabe **1195.**, jedoch mit den Koordinaten: A(17,5, 0,8), B(22,0, 6), C(15,8, 9), D(10,6, 8,8).

1197. Text wie Aufgabe **1195.**, jedoch mit den Koordinaten: A(70, 25,3), B(61,3, 23,4), C(61,3, 17,5), D(75,2, 20,1), E(81,9, 24,0).

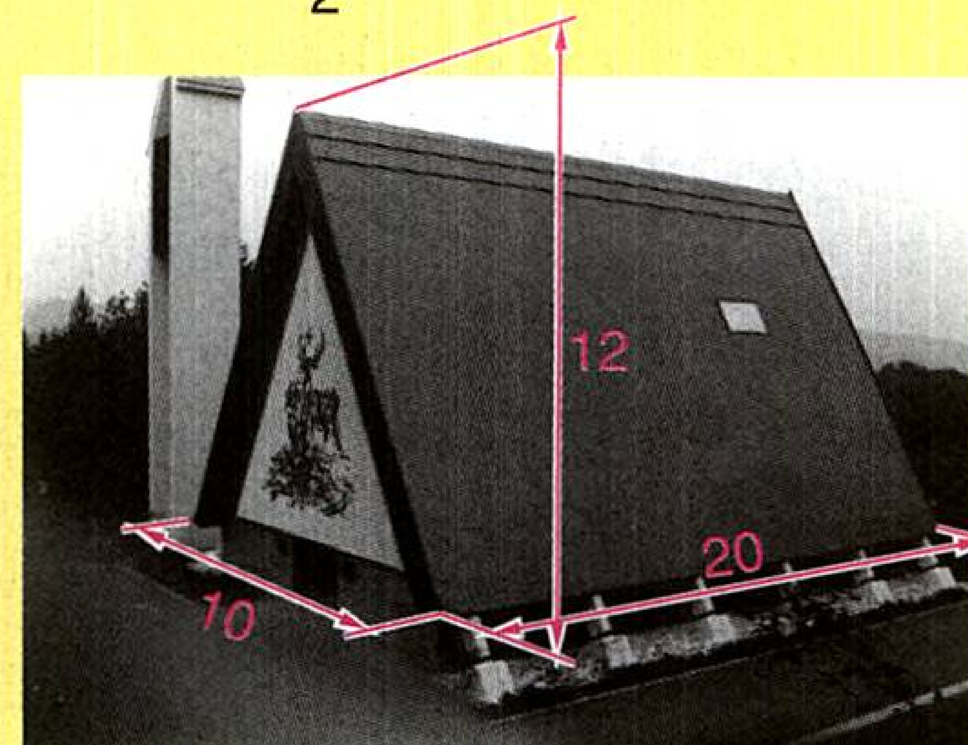
1198. Ein Grundstück wurde örtlich vermessen. Die einzelnen Messwerte sind im Lageplan eingetragen. Der Flächeninhalt des blau unterlegten Grundstücks ist zu berechnen. (Flächenberechnung aus örtlich gemessenen Maßen.)
Anleitung: Im Gegensatz zu den vorhergehenden Aufgaben, wo grundsätzlich mit Trapezen gerechnet wird, sind hier Dreiecke, und Trapeze zu verwenden.



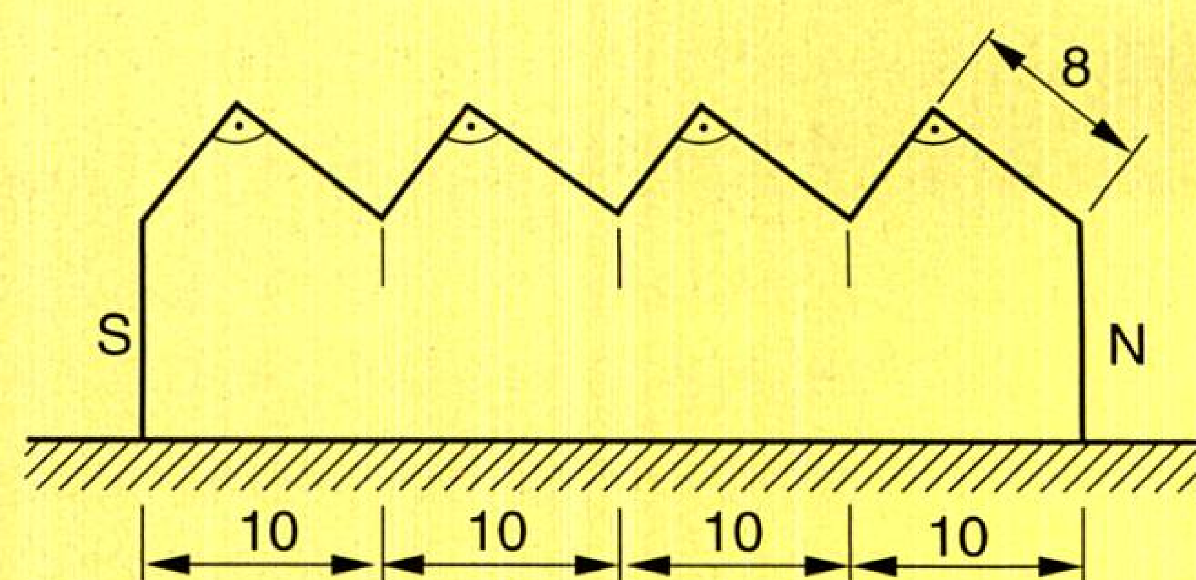
1199. Der Flächeninhalt eines örtlich vermessenen Grundstücks ist unter Verwendung der rosa unterlegten Figur zu berechnen!



1200. Wie groß ist die Dachfläche A des nebenstehend abgebildeten Satteldaches?
Bemerkung: Der Dachüberhang ist zu vernachlässigen.



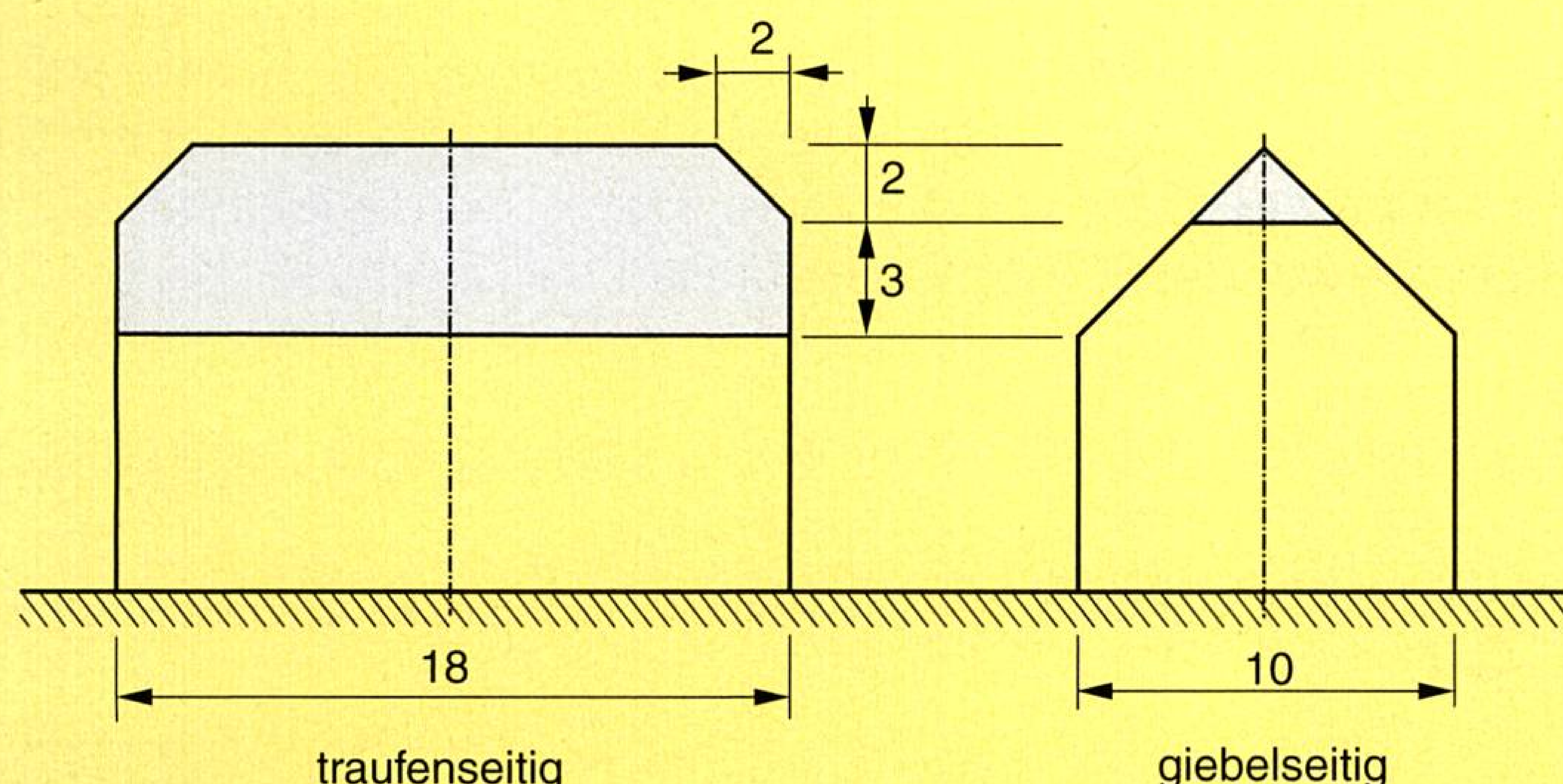
1201. Eine Werkstättenhalle (rechteckiger Grundriss 40 m × 18 m) ist mit einem Dach versehen, wie es aus dem nebenstehenden Aufriss erkennbar wird. Die Südseite der Dachkonstruktion ist zu 80 % verglast. **a)** Wie groß ist die gesamte Dachfläche? **b)** Wie groß ist der Anteil der Verglasung an der gesamten Dachfläche?



[1]) Mit 50 Ω Wellenwiderstand.

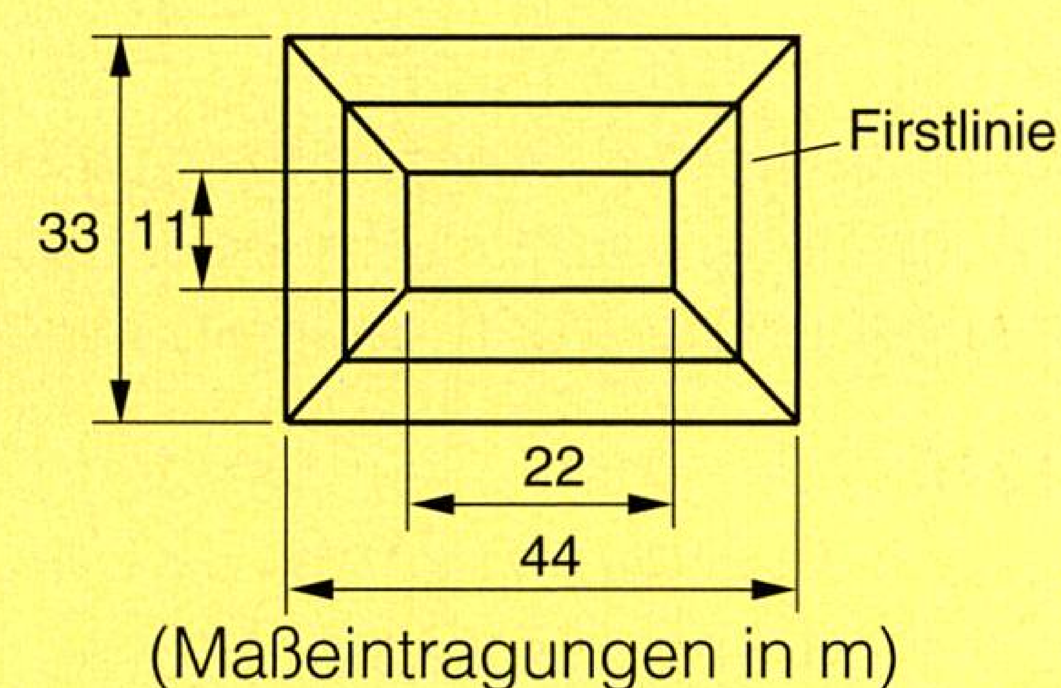
1202. Ein Turm hat den Grundriss eines regelmäßigen Sechsecks mit der Kantenlänge a = 5 m. Er wird mit einem Zeltdach (Turmdach) von 12 m Höhe eingedeckt. Dachfläche?

1203.



Wie groß ist die gesamte Dachfläche?

1204. Ein Vierkanter muss neu eingedeckt werden. Um eine Kostenaufstellung durchführen zu können, benötigt der Dachdecker die Dachfläche (Grundrissmaße vgl. Figur, Firsthöhe 4 m). Dabei ragt das Dach hofseitig und außen je 1 m (waagrecht) über das Gebäude hinaus. Wie groß ist die Dachfläche?

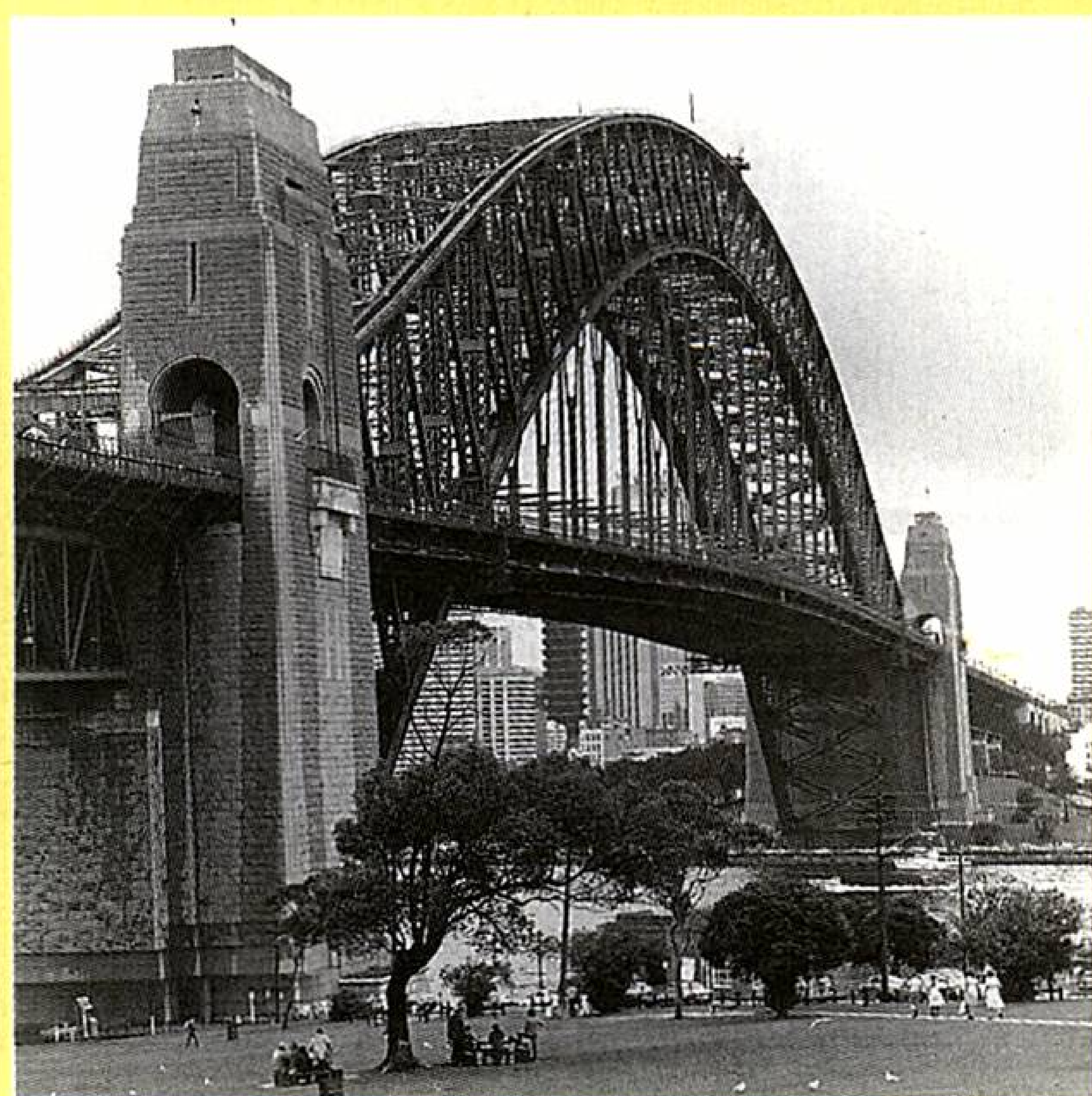


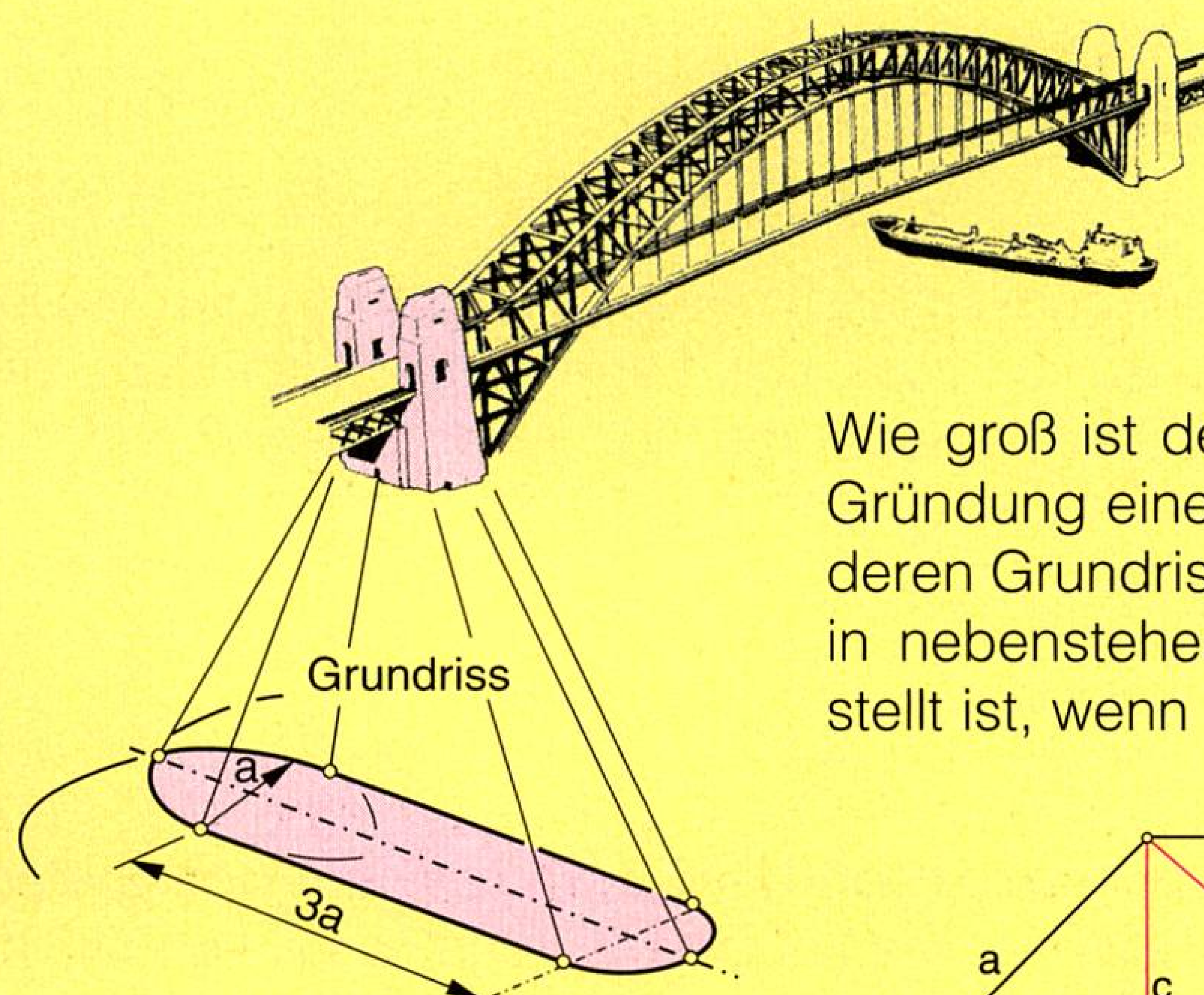
(Maßeintragungen in m)

1205. Wie groß ist der Durchmesser eines Rundstahls zu wählen, wenn das Material eine zulässige Zugspannung $\sigma = 125\,\text{N/mm}^2$ aufweist und der Rundstahl mit einer Zugkraft F = 8,9 kN belastet wird?
Anleitung: Normalspannungen σ (diese wirken senkrecht zur Querschnittsfläche — Zug, Druck, Biegung) sind die auf die Flächeneinheit entfallenden inneren Kräfte.

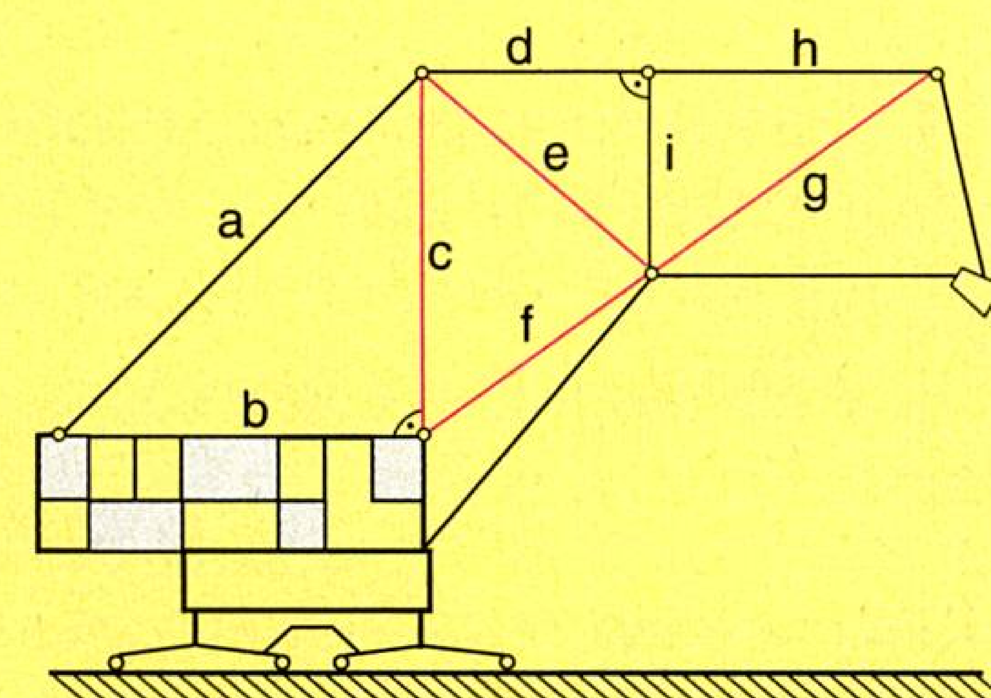
1206. Ein Drahtseil für einen Personenaufzug hat 6 Litzen zu 19 Drähten. Das Drahtmaterial hat eine Zugfestigkeit von $\sigma = 1570\,\text{N/mm}^2$. Mit welcher Kraft darf das Seil belastet werden, wenn jeder Draht einen Durchmesser von 0,7 mm hat und weiters eine 14-fache Sicherheit vorgesehen wird?
Bemerkung: Bei der Berechnung statisch belasteter Bauteile ist die Bruchfestigkeit des Werkstoffs als höchstmögliche Spannung maßgebend. Gegenüber dieser muss eine ausreichende Sicherheit vorhanden sein. Diese kann gewählt oder behördlich vorgeschrieben werden.

1207. Hafenbrücke in Sydney/Australien:





Wie groß ist der Umfang u einer Gründung eines Brückenpfeilers, deren Grundriss näherungsweise in nebenstehender Figur dargestellt ist, wenn a = 2 m ist?



1208. Von einem Löffelbagger sind folgende Maße bekannt: a = 48,4 m, b = 34 m, d = 21,7 m, h = 27,9 m. Die Längen der farbig gekennzeichneten Träger sind zu berechnen.

Wirtschaftsingenieurwesen

1209. Eine rechteckige Fläche von 15 m × 5 m an einem belebten Platz einer Großstadt wird um 4000,— Euro/Monat vermietet. In einer Verbundwerbung gestaltet eine Mineralwasserfirma drei Kreise auf dieser Fläche („Blasen") im Durchmesser von 1 m, 80 cm und 70 cm. Die restliche Fläche steht einem Grafiker von der Fremdenverkehrswerbung zur Verfügung. Das Fremdenverkehrsamt und die Mineralwasserfirma kommen überein, ihre Anteile gemäß der verwendeten Fläche aufzuteilen.

a) Wie groß sind diese Anteile?

b) Gibt es eine andere Figur als den Kreis, die mit möglichst wenig Umfang eine bestimmte Fläche einschließt?

Anleitung: Die Umfänge eines flächengleichen Quadrats, regelmäßigen Sechsecks und Kreises sind zu vergleichen und danach zu entscheiden!

Textiltechnik

Stoffgewichte[1] werden in verschiedenen Formen angeben. Man kann das Quadratmetergewicht[1] g/m^2, das Laufmetergewicht[1] g/lfm oder das Stückgewicht[1] angegeben. Sehr oft ist auch die Angabe von lfm/kg sinnvoll, insbesondere wenn beurteilt werden soll, wie viele lfm auf einem Stoffballen sind.

1210. Aus einem Stoff werden 5 runde Stanzproben zu je 4 cm^2 Fläche entnommen: 31,2 mg, 32,5 mg, 30,9 mg, 31,7 mg, 32,2 mg. Die Stoffbreite beträgt 90 cm.

a) Das Laufmetergewicht ist unter Verwendung des Mittelwerts der Stanzproben zu berechnen!

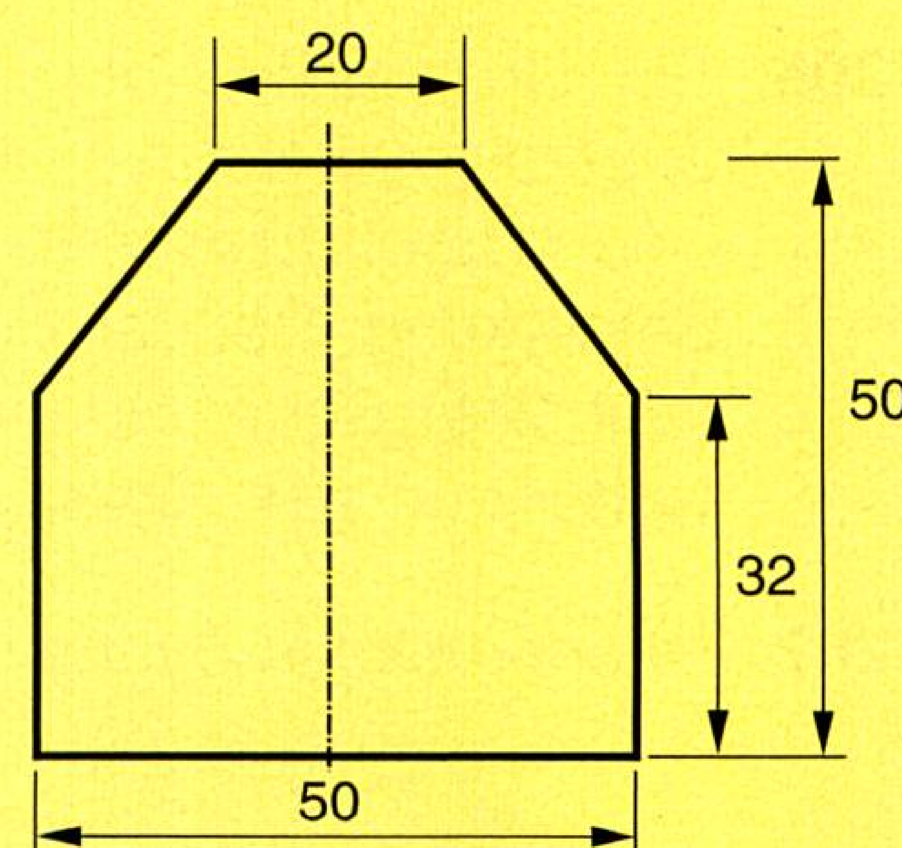
b) Welchen Durchmesser hat die Stanze?

1211. Aus einem 140 cm breiten Stoff werden möglichst große runde Tischtücher geschnitten und verarbeitet. Man näht einen Saum von 1 cm.

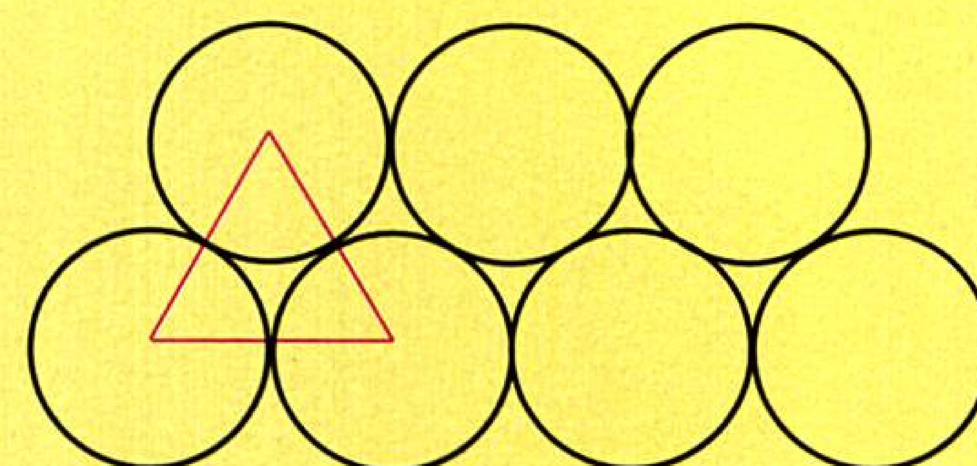
a) Wie viel beträgt der Abfall in Prozent?

b) Wie viel wiegt ein Tischtuch, wenn das Quadratmetergewicht des Stoffes 205,5 g/m^2 beträgt?

c) Wie viel m Spitzenband sind zum Einfassen des Tischtuchs nötig?



1212. Der Vorderteil eines Pullovers hat die in der nebenstehenden Figur angegebene Form. Wie viel Garn wurde verarbeitet, wenn das Quadratmetergewicht 320 g/m^2 beträgt?



1213. In einem Lagerraum sollen Stoffballen mit 40 cm Durchmesser gelagert werden. Wie hoch muss der Lagerraum mindestens sein, damit 8 Lagen „auf Lücke" gelegt (vgl. Figur) Platz haben?

Chemieingenieurwesen

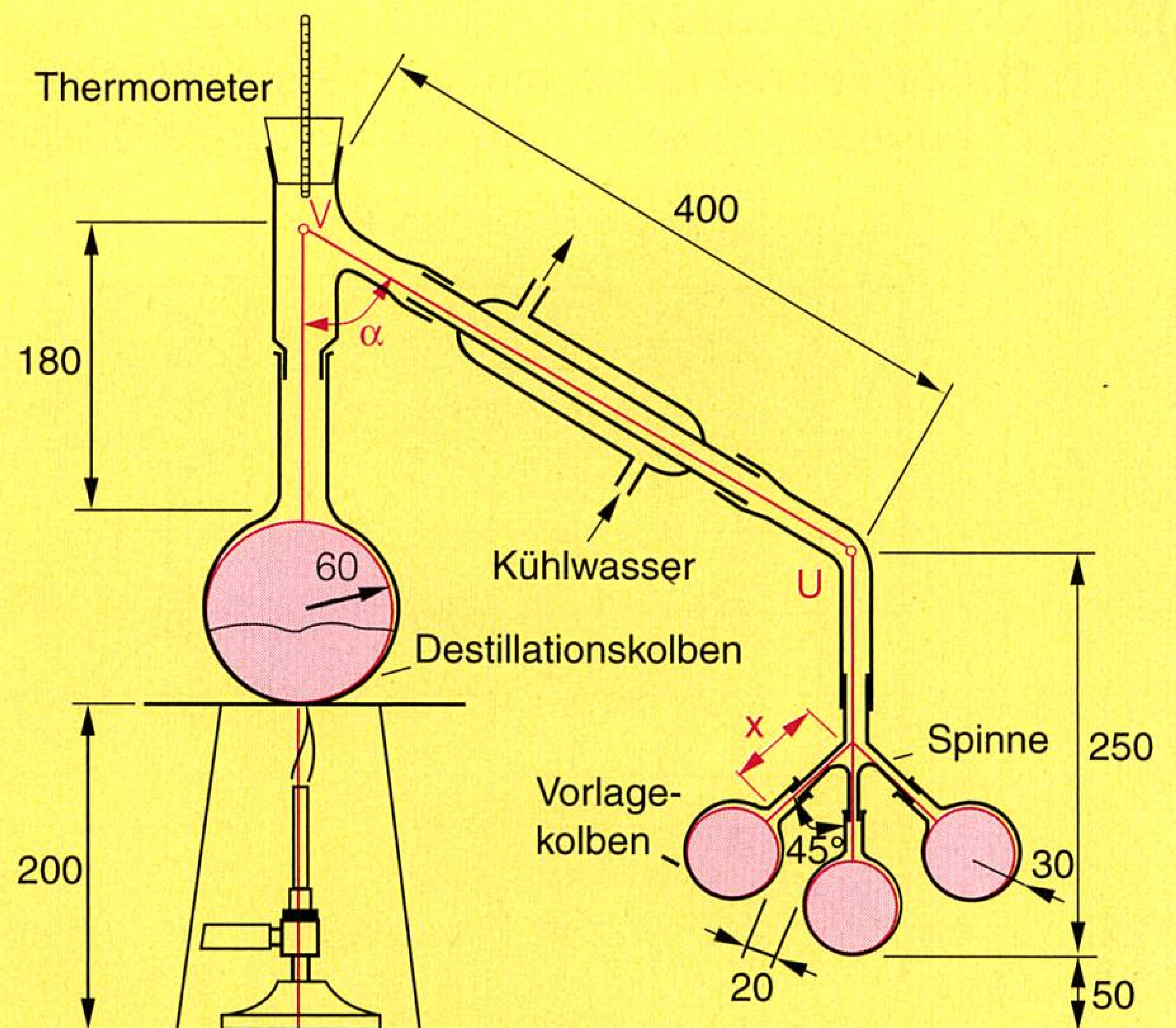
1214. Das Ionengittermodell von Na^+Cl^- ist in einem geeigneten Maßstab zu zeichnen. Na^+ hat den Durchmesser von 1,3 nm, Cl^- hat den Durchmesser von 3,3 nm. Um ein Na^+-Ion liegen in einer Ebene 4 Cl^--Ionen gleichmäßig verteilt und so nahe wie möglich aneinander. Wie groß ist der Gitterabstand?

Anleitung: Der Gitterabstand ist der Abstand der Mittelpunkte von zwei Chloratomen.

---

[1] In der Praxis wird das Wort Stoffgewicht verwendet. Es müsste exakt heißen: Masse des Stoffes. Ebenso: Quadratmetergewicht — Quadratmetermasse, Laufmetergewicht — Laufmetermasse und Stückgewicht — Stückmasse.

1215. a) Eine schematische Zeichnung des nebenstehend skizzierten Destillationsapparats ist anzufertigen: Alle eingetragenen Maße sind zu berücksichtigen und der Maßstab ist selbstständig zu wählen! Aus der Zeichnung sind der Winkel α und die Länge x der Zuleitungen zu den Vorlagekolben durch Messung zu bestimmen.



Der Winkel α lässt sich auch exakt feststellen. Man beantworte in diesem Zusammenhang die folgenden Fragen:

b) Welche Höhendifferenz h weisen die Punkte U und V auf (vgl. Figur)?

c) Man trage die Höhendifferenz h vom Punkt V senkrecht nach unten ab. Der so gewonnene Punkt W ist mit U zu verbinden. Wie groß ist der Winkel $\sphericalangle$ UWV?

d) In welchem Verhältnis stehen die Strecken $\overline{UV}$ und $\overline{VW}$?

e) Welche besondere Eigenschaft hat daher das Dreieck UVW?

f) Wie groß ist der Winkel α?

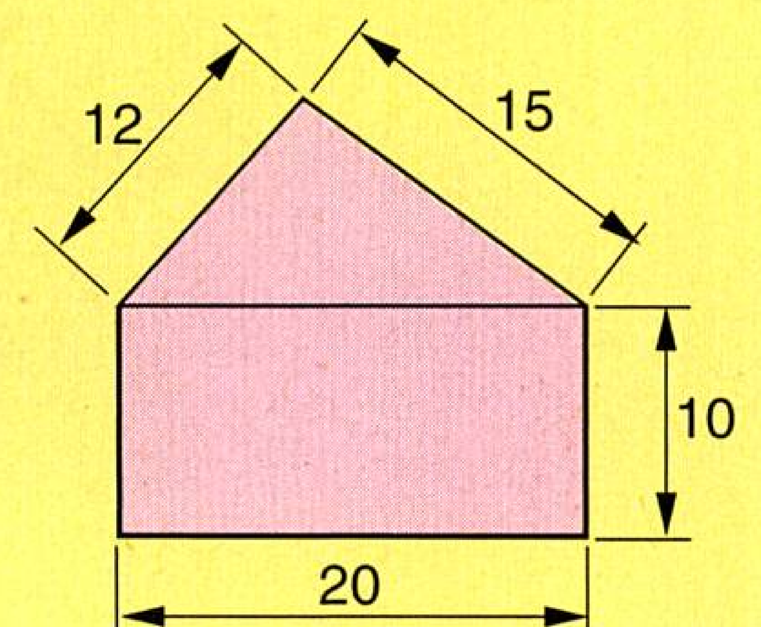
Vermischte Aufgaben

1216. Zwei Rohre mit den Durchmessern $d_1 = 83{,}0$ cm und $d_2 = 65{,}0$ cm sollen durch ein Rohr ersetzt werden. Welchen Durchmesser muss dieses haben, wenn sein Querschnitt gleich der Summe der Querschnitte der ursprünglichen Rohre sein soll?

1217. Ein Teleskopstativ besteht aus zwei ineinander verschiebbaren Aluminiumrohren mit einer Wanddicke von je 0,6 mm. Wie groß sind die Querschnittsflächen der beiden Rohre, wenn die lichte Weite des kleineren Rohres $d_0 = 1{,}8$ cm ist?

Bemerkung: Für die Berechnung der Querschnittsfläche lassen wir den hohlen Teil des Rohres unberücksichtigt, d. h. nur „Materielles" wird herangezogen.

1218. Der Flächeninhalt A des dargestellten Grundstücks ist zu berechnen!



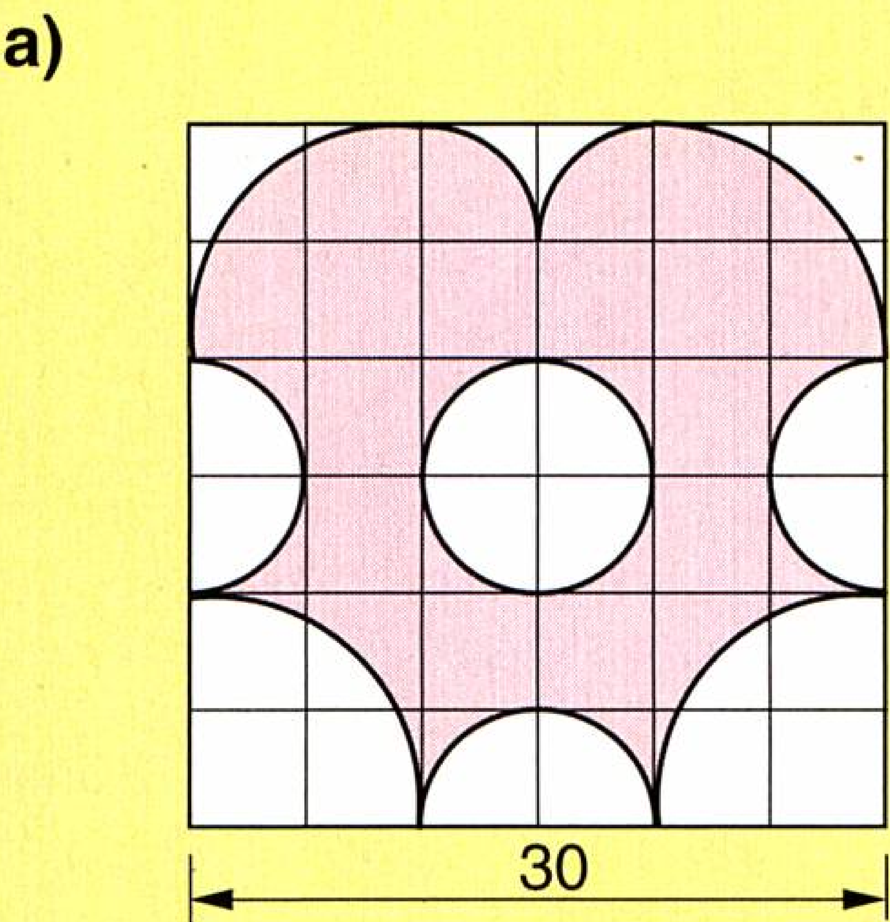
1219. Ein Mast ist in der Höhe $h = 5$ m durch drei Seile verspannt, von denen jedes 10 m lang ist. Die Fußpunkte der Seile bilden ein gleichseitiges Dreieck. Welchen Abstand s haben die Fußpunkte voneinander?

Anleitung: Die Höhe in einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge s ergibt sich aus $h = \frac{s}{2}\sqrt{3}$ und wird durch den Höhenschnittpunkt im Verhältnis 2 : 1 geteilt.

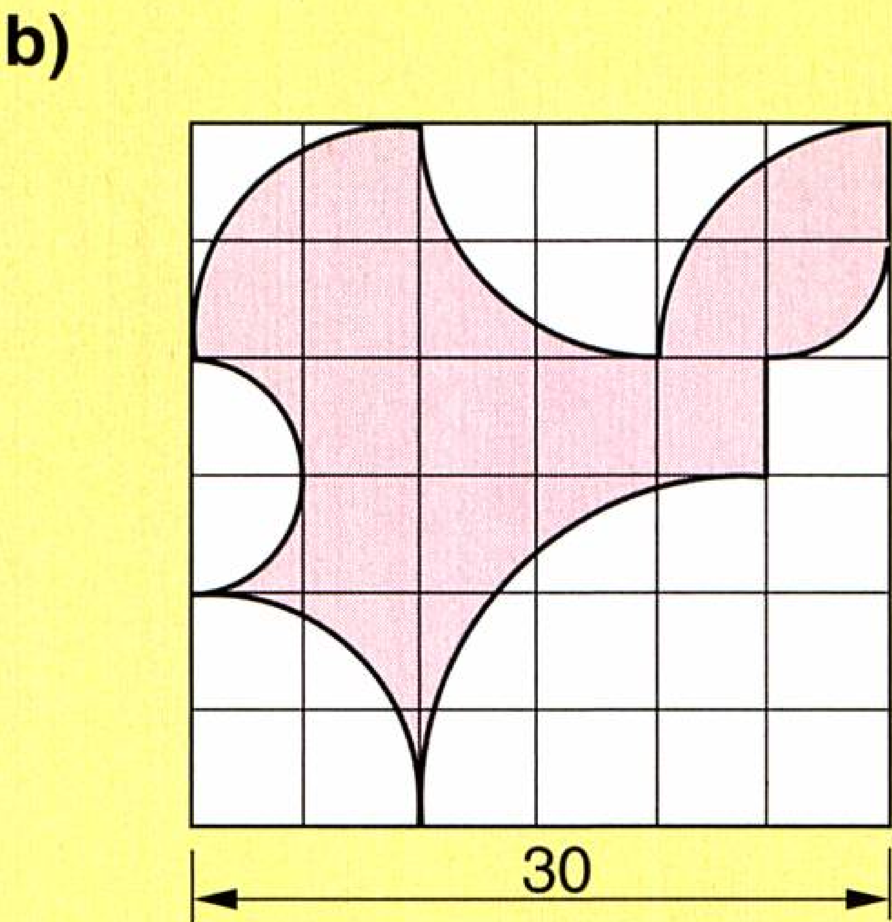
1220. Ein Zug bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h. Regentropfen, die senkrecht und infolge der Luftreibung mit konstanter Geschwindigkeit herab fallen (völlige Windstille wird angenommen), hinterlassen auf den Seitenfenstern geradlinige Spuren, die mit der Senkrechten einen Winkel von 60° einschließen. Mit welcher Geschwindigkeit fallen die Tropfen?

1221. Ein Fenster besteht aus nachstehend dargestellten Glasteilen. Von jedem Teil sind 20 Stück zu erzeugen. (1) Mit welchem prozentuellen Verschnitt muss jeweils gerechnet werden? (2) Für den Zusammenbau ist es erforderlich die Fensterteile mit einem Bleisteg einzufassen. Welche Länge wird für 20 Stück benötigt?

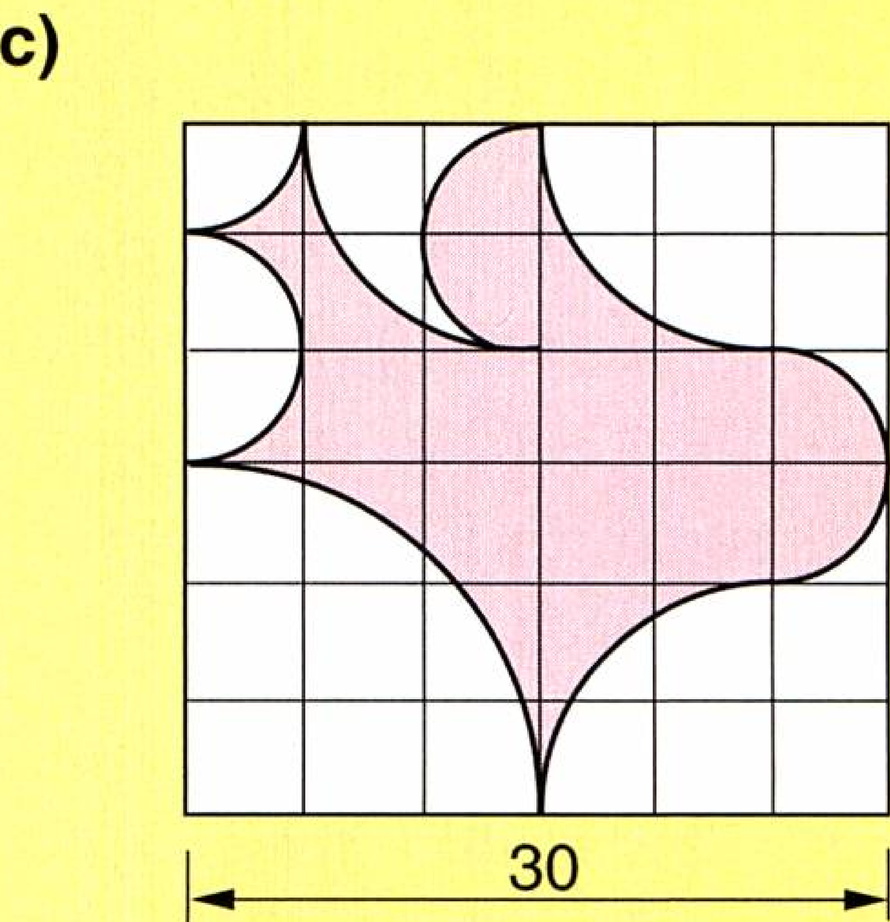
a)



b)

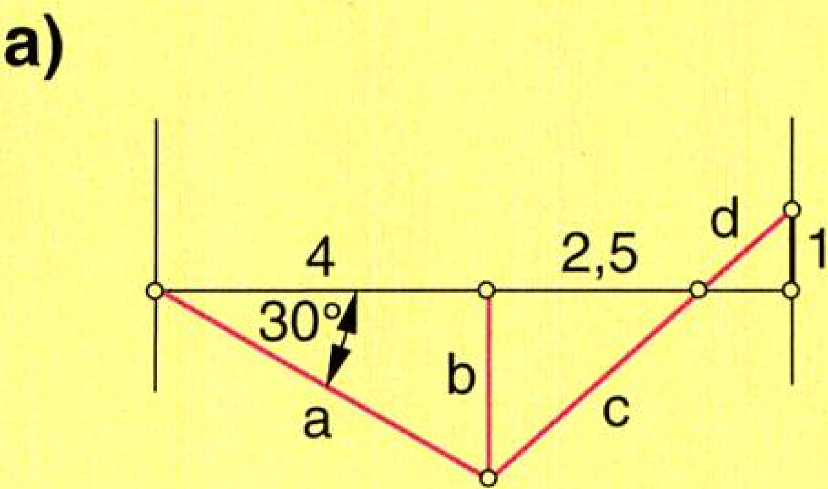


c)

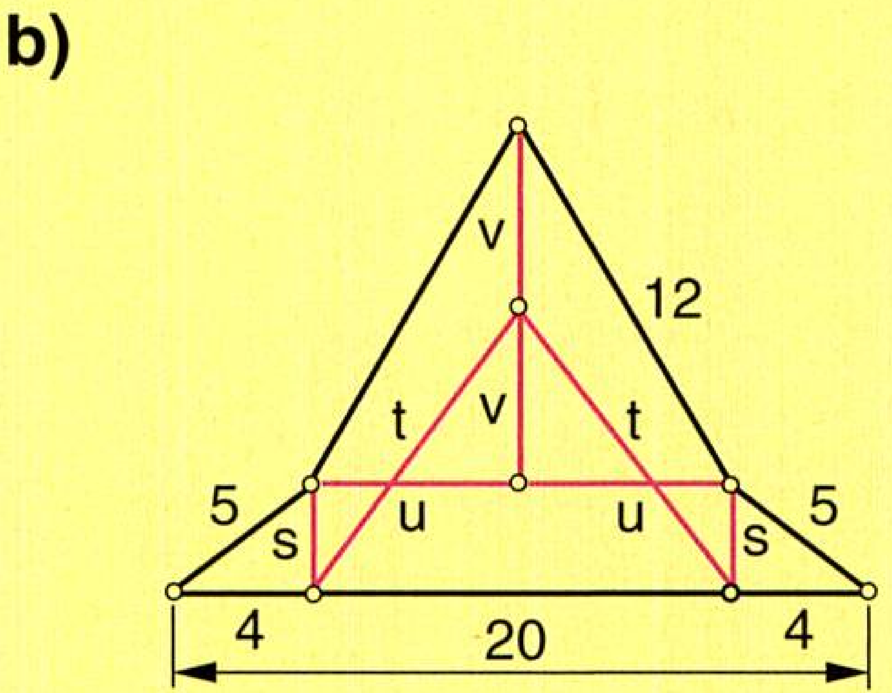


1222. In den nachstehenden Figuren sind die rot eingezeichneten Längen zu berechnen (Abmessungen in Meter):

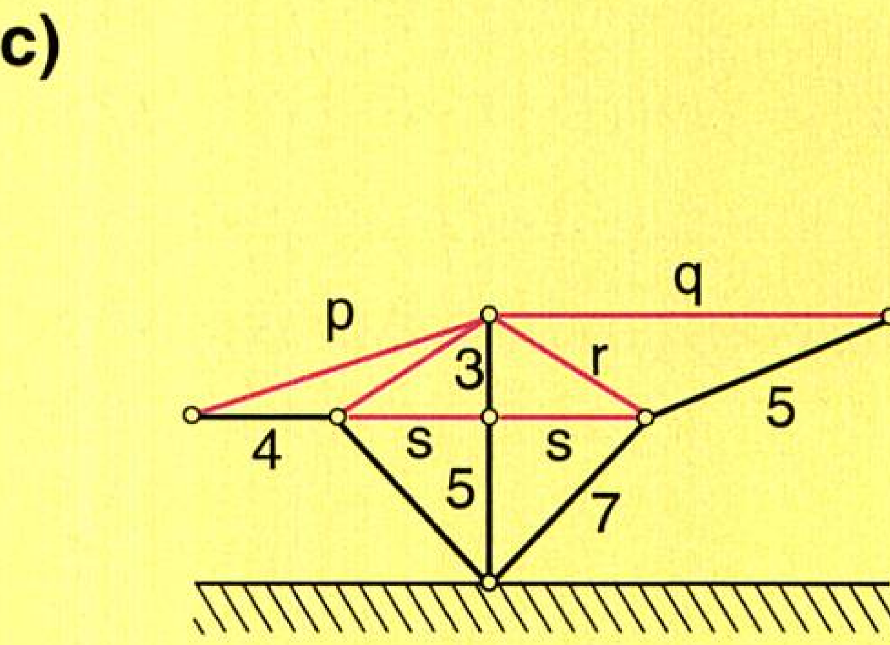
a)



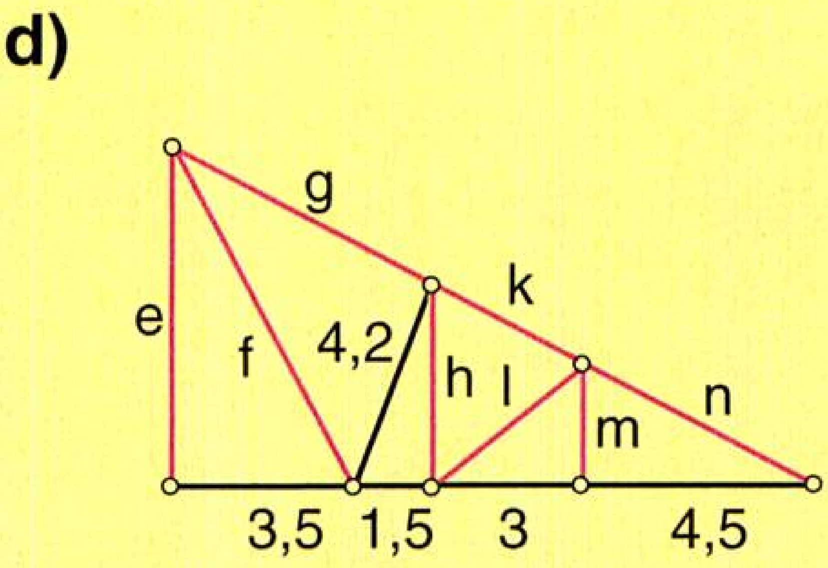
b)



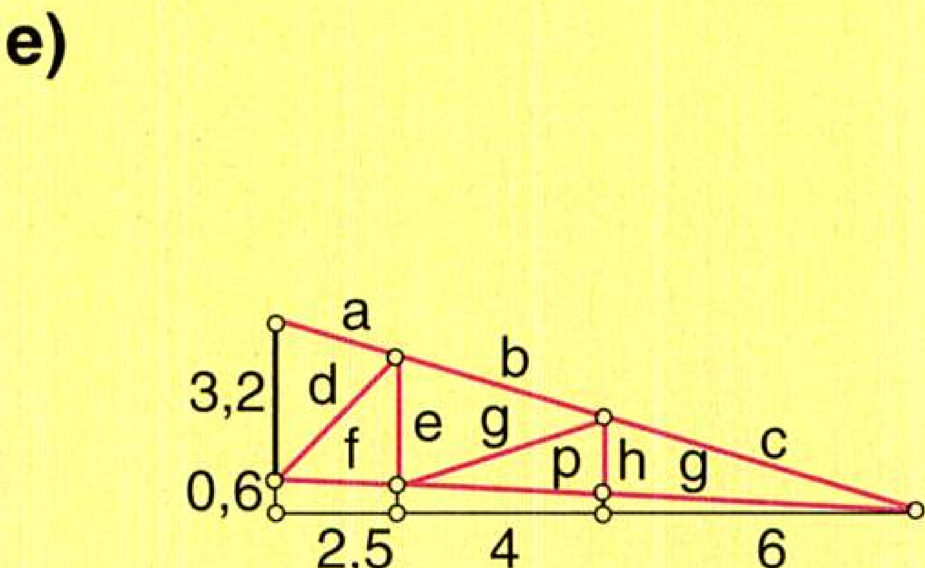
c)



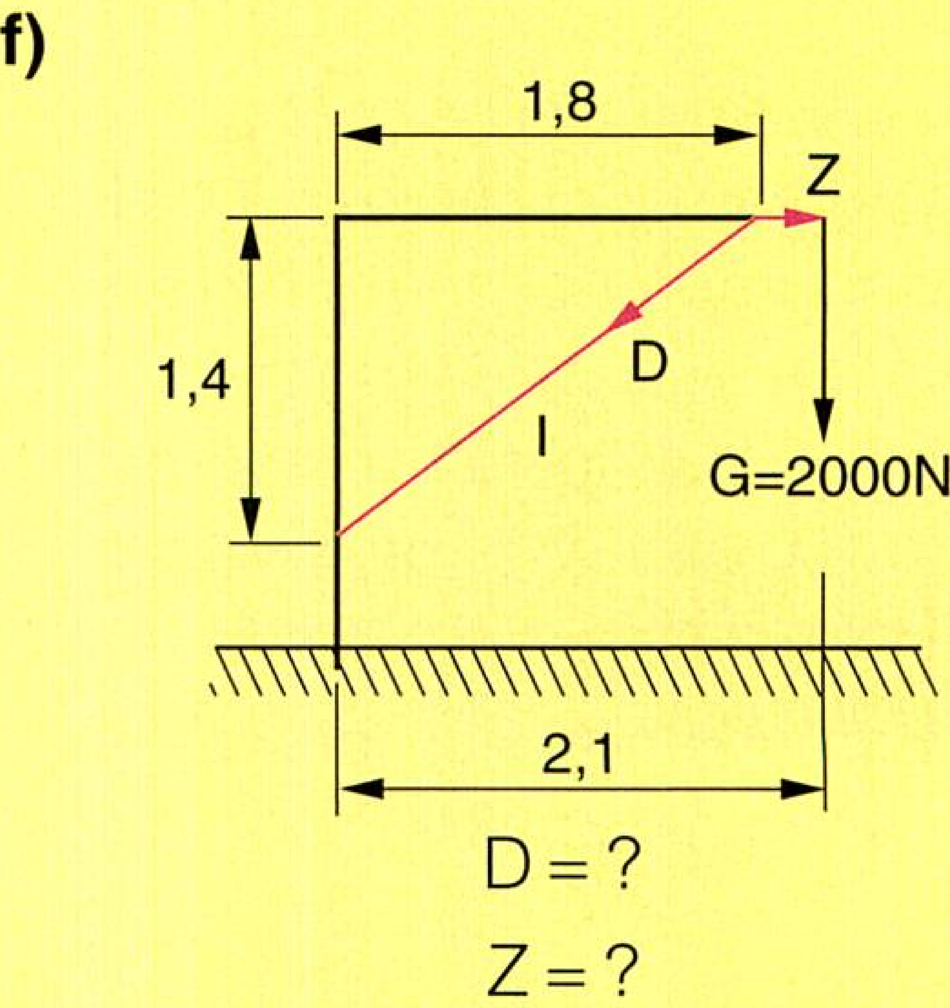
d)



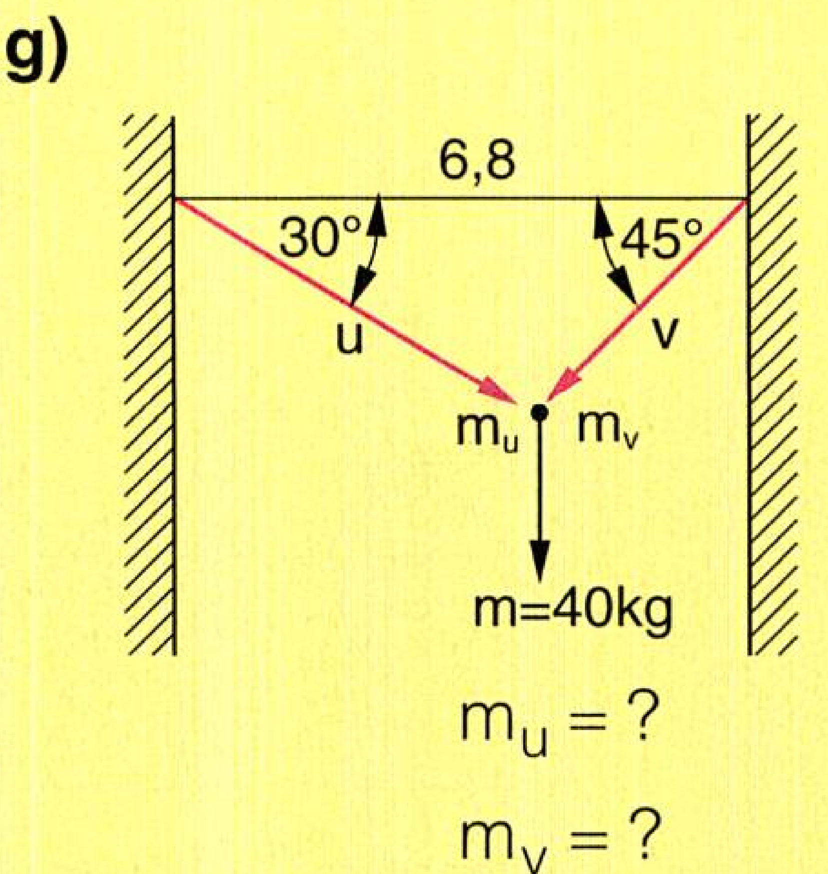
e)



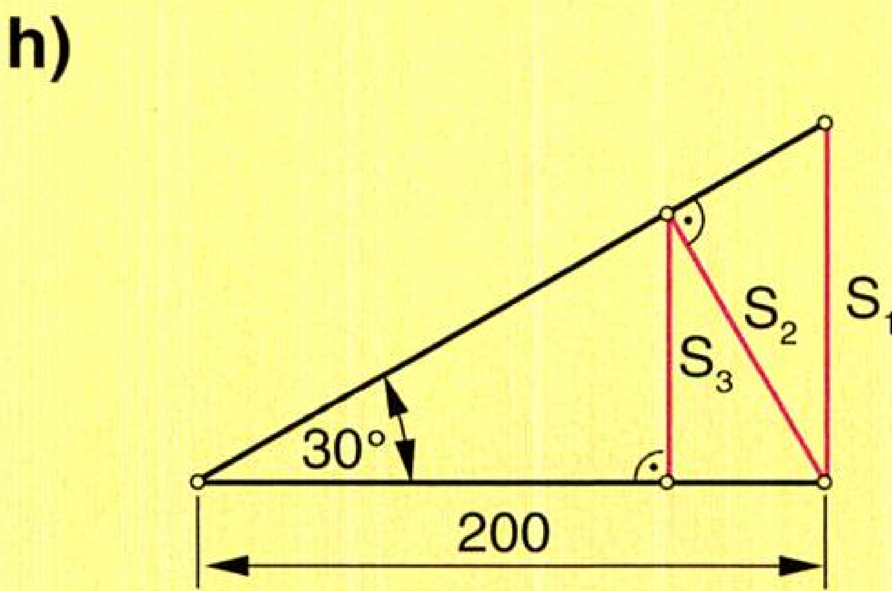
f)



g)

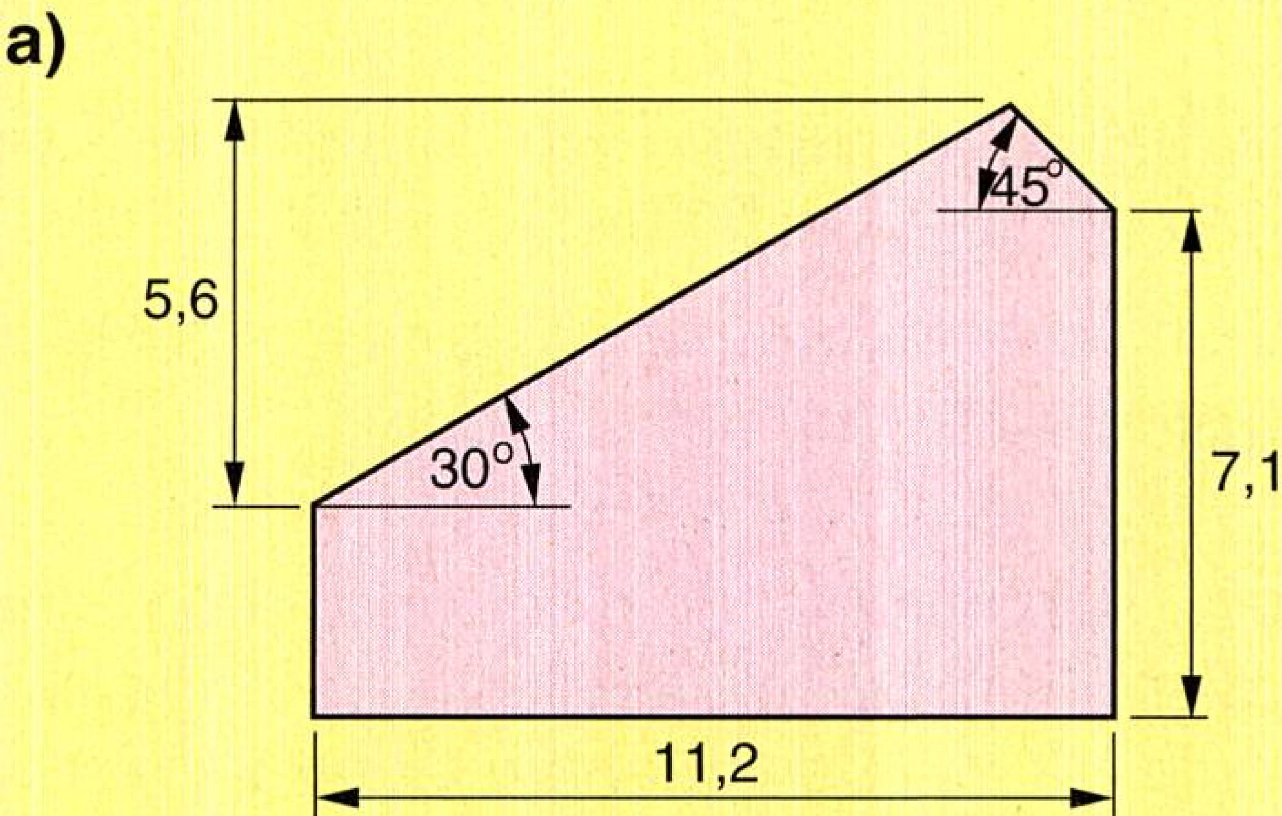


h)

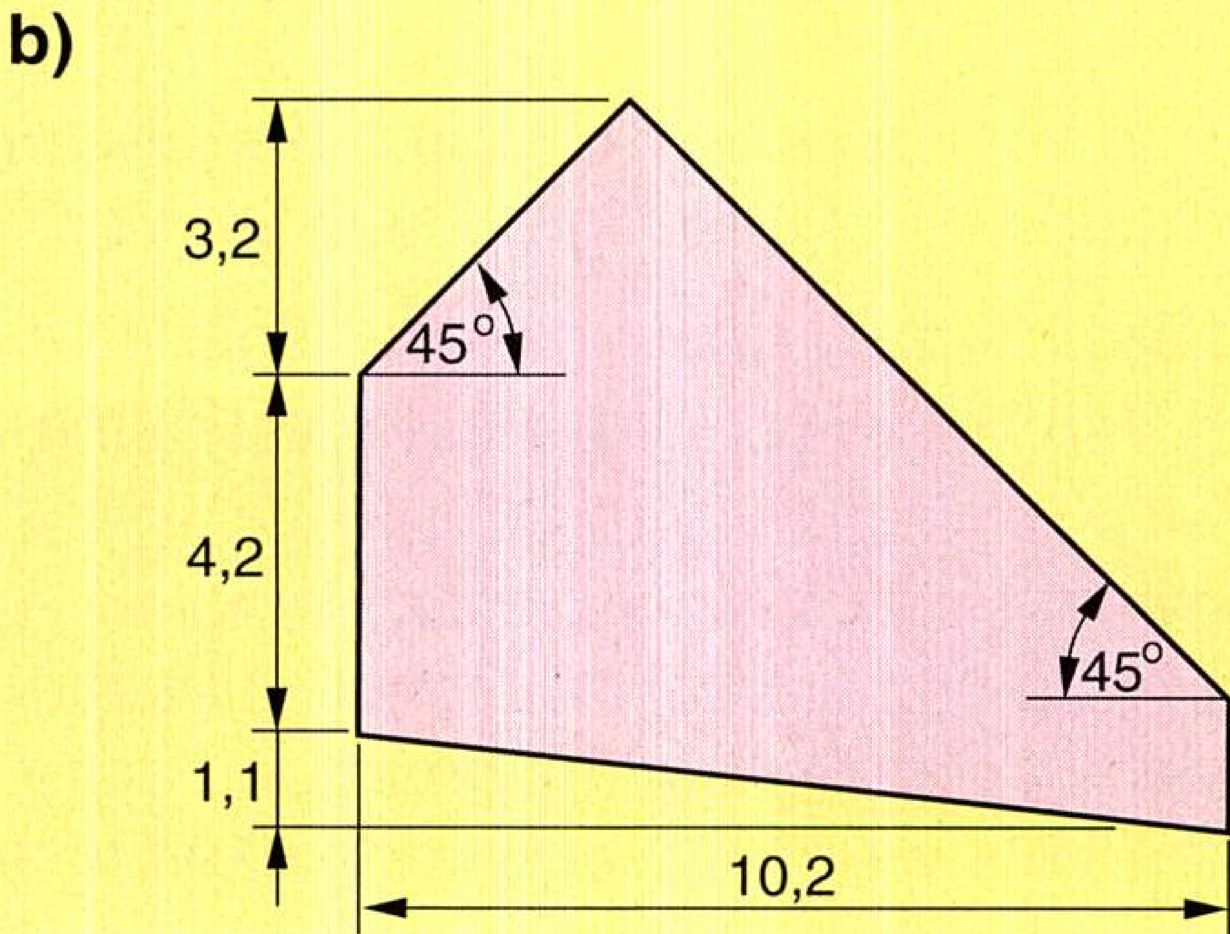


1223. Flächeninhalt und Umfang der folgenden Grundstücke sind zu berechnen:

a)



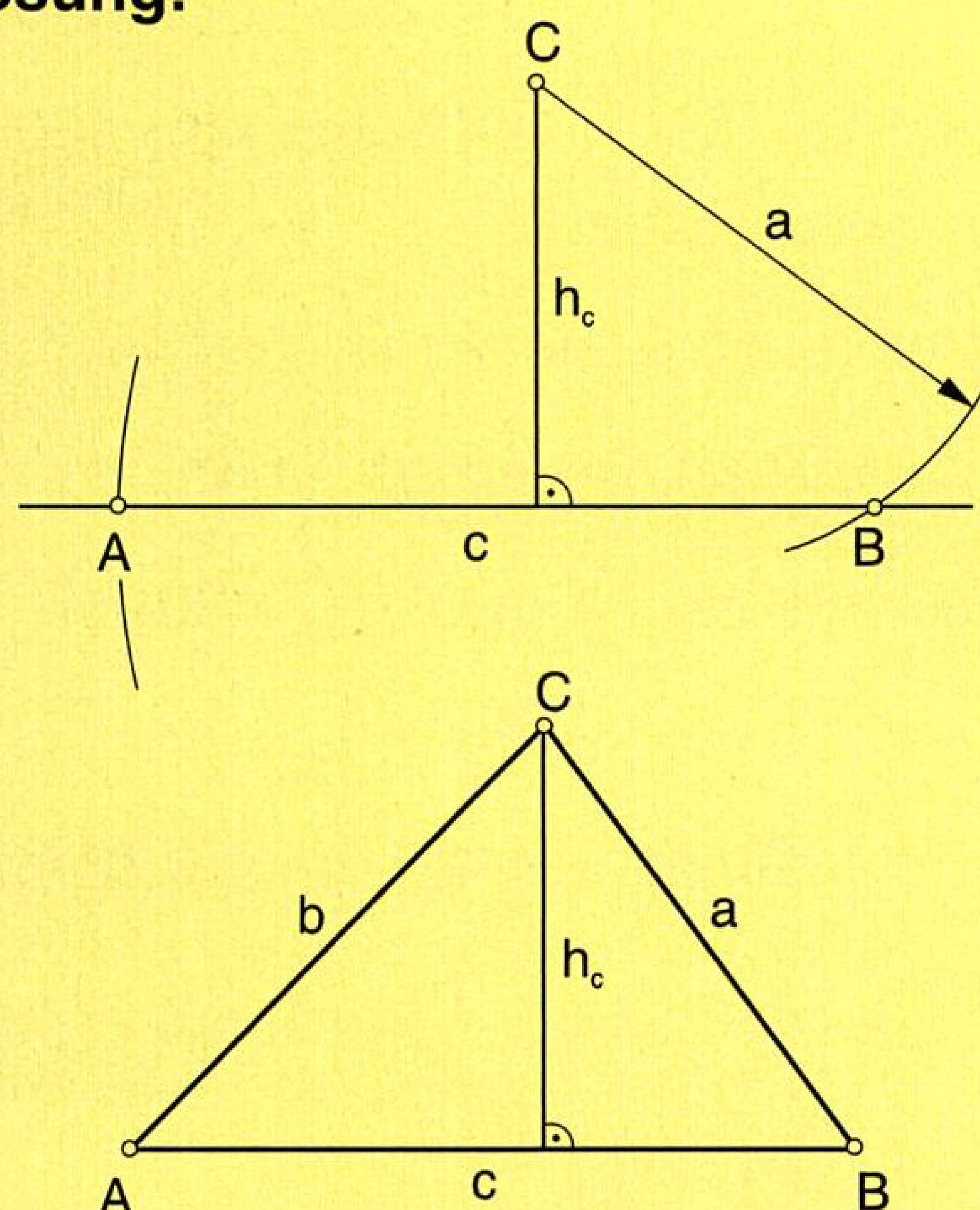
b)



10. Konstruktion von Dreiecken

1224. Ein Dreieck ($a = 50$ mm, $c = 70$ mm, $h_c = 40$ mm) ist zu zeichnen!

Lösung:



a) Die nebenstehende Konstruktion ist mit Worten zu beschreiben.

b) Ist die nebenstehende Lösung die einzig mögliche? Wenn nein, ist die zweite Lösung zu zeichnen.

c) Man konstruiere ein Dreieck mit $b = 30$ mm, $c = 60$ mm, und $h_c = 30$ mm.

d) Die Strecke b ist in Aufgabe **c)** so zu ändern, dass die Dreieckskonstruktion **(1)** keine Lösung **(2)** zwei Lösungen liefert.

Man konstruiere ein Dreieck mit

e) $a = 96$ mm, $h_a = 71$ mm, $\alpha = 30°$

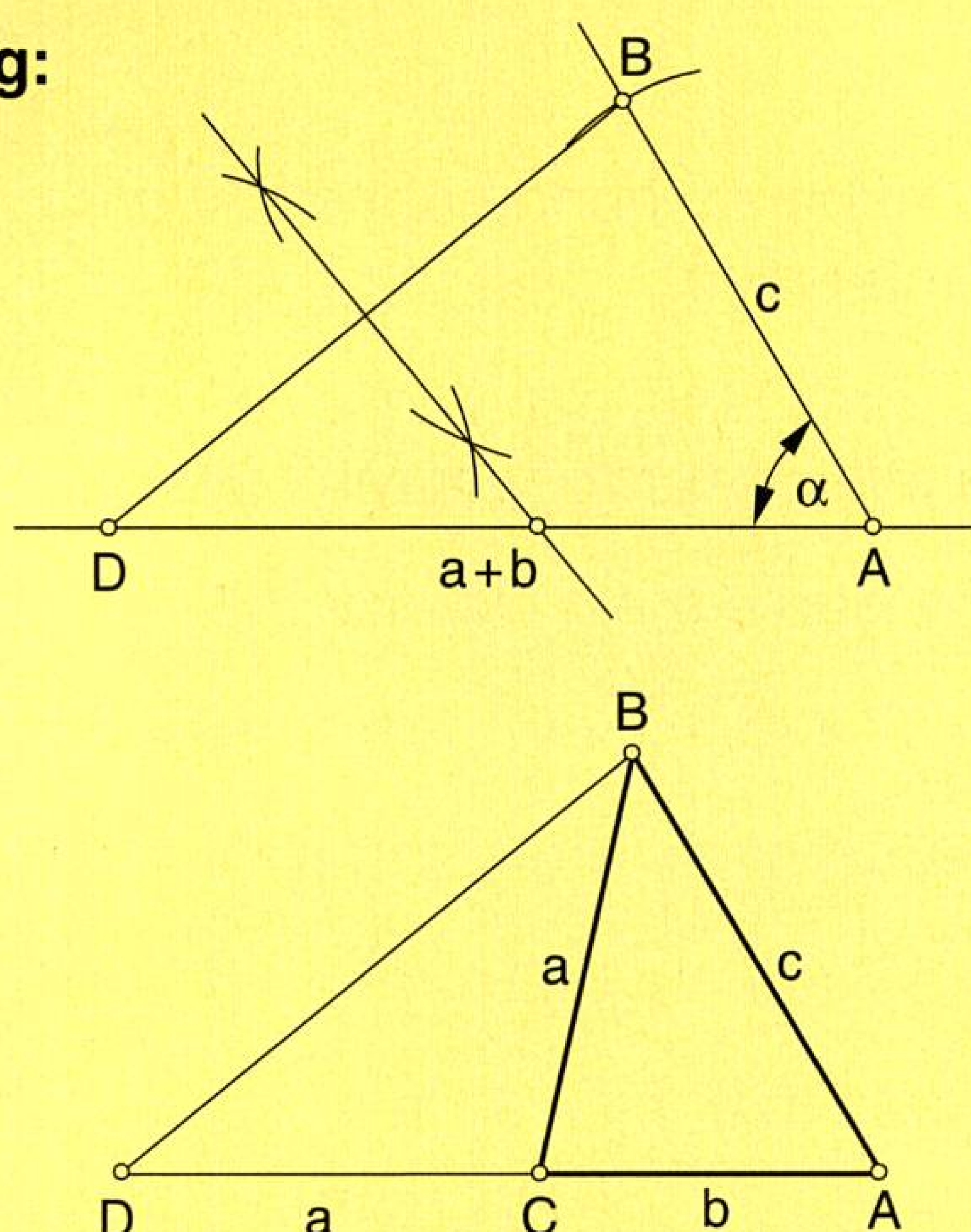
f) $b = 76$ mm, $h_b = 65$ mm, $\alpha = 60°$

g) $b = 85$ mm, $h_a = 44$ mm, $s_b = 53$ mm

h) $c = 88$ mm, $h_a = 38$ mm, $s_c = 49$ mm

1225. Ein Dreieck ($a + b = 109$ mm, $\alpha = 60°$, $c = 70$ mm) ist zu zeichnen!

Lösung:



a) Die nebenstehende Konstruktion ist mit Worten zu beschreiben.

b) Die Strecke c im Dreieck mit $a + b = 109$ mm, $\alpha = 60°$ ist so zu wählen, dass die Dreieckskonstruktion keine Lösung liefert.

Man konstruiere ein Dreieck mit

c) $a + b = 96$ mm, $c = 73$ mm, $\beta = 75°$

d) $b + c = 117$ mm, $\beta = 60°$, $\alpha = 45°$

e) $a + b = 82$ mm, $h_b = 38$ mm, $\alpha = 65°$

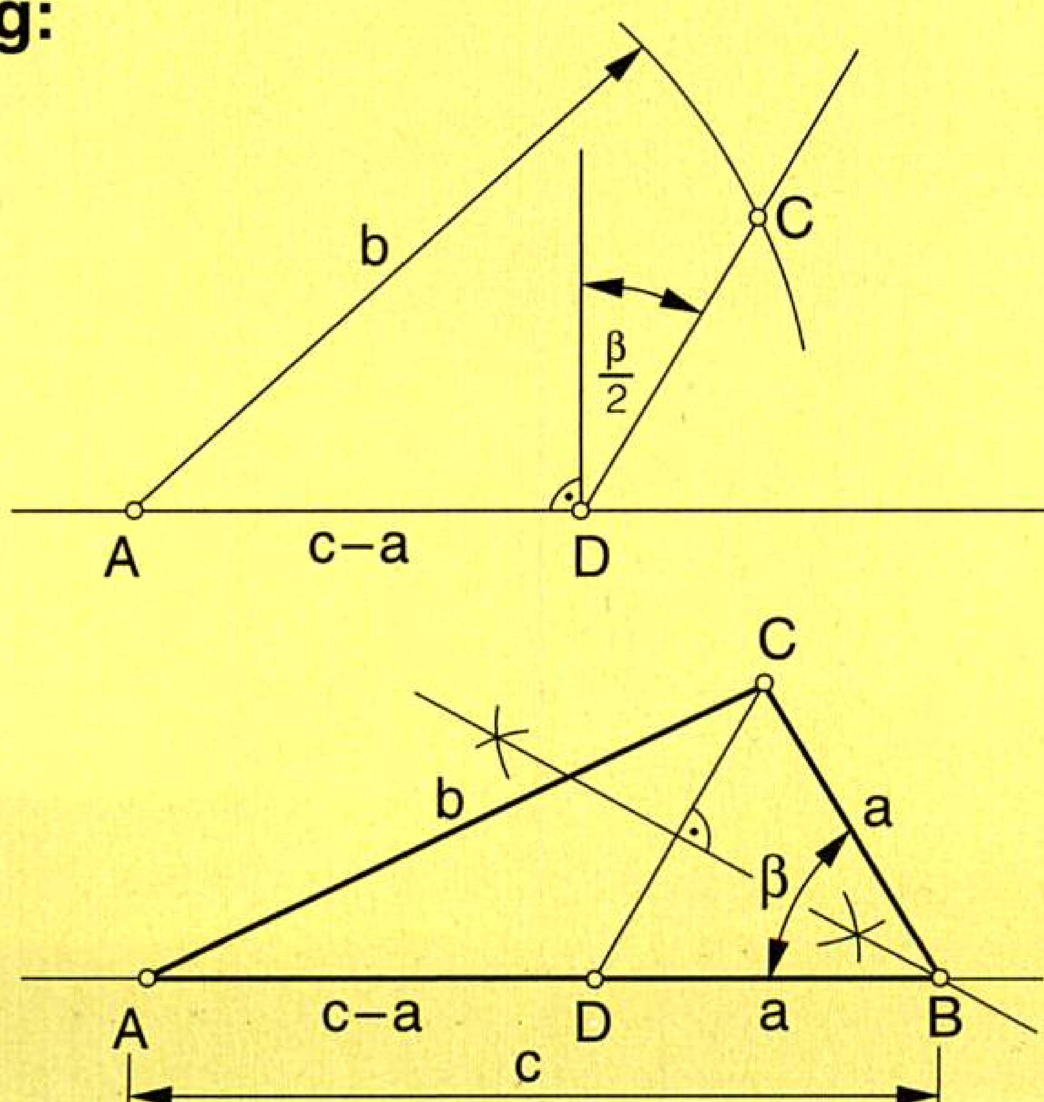
f) $a = 55$ mm, $b + c = 101$ mm, $\alpha = 58°$

g) $a + c = 140$ mm, $b = 56$ mm, $h_c = 43$ mm

h) $a + c = 92$ mm, $h_a = 40$ mm, $\frac{\beta}{2} + \alpha = 90°$

1226. Ein Dreieck ($c - a = 40$ mm, $\beta = 60°$, $b = 61$ mm) ist zu zeichnen!

Lösung:



a) Die nebenstehende Konstruktion ist mit Worten zu beschreiben.

b) $\sphericalangle ADC = 90° + \frac{\beta}{2}$ Begründung!

Man konstruiere ein Dreieck mit

c) $a = 74$ mm, $b - c = 34$ mm, $\gamma = 45°$

d) $a - b = 28$ mm, $c = 53$ mm, $\beta = 30°$

e) $a = 54$ mm, $c - b = 22$ mm, $\alpha = 64°$

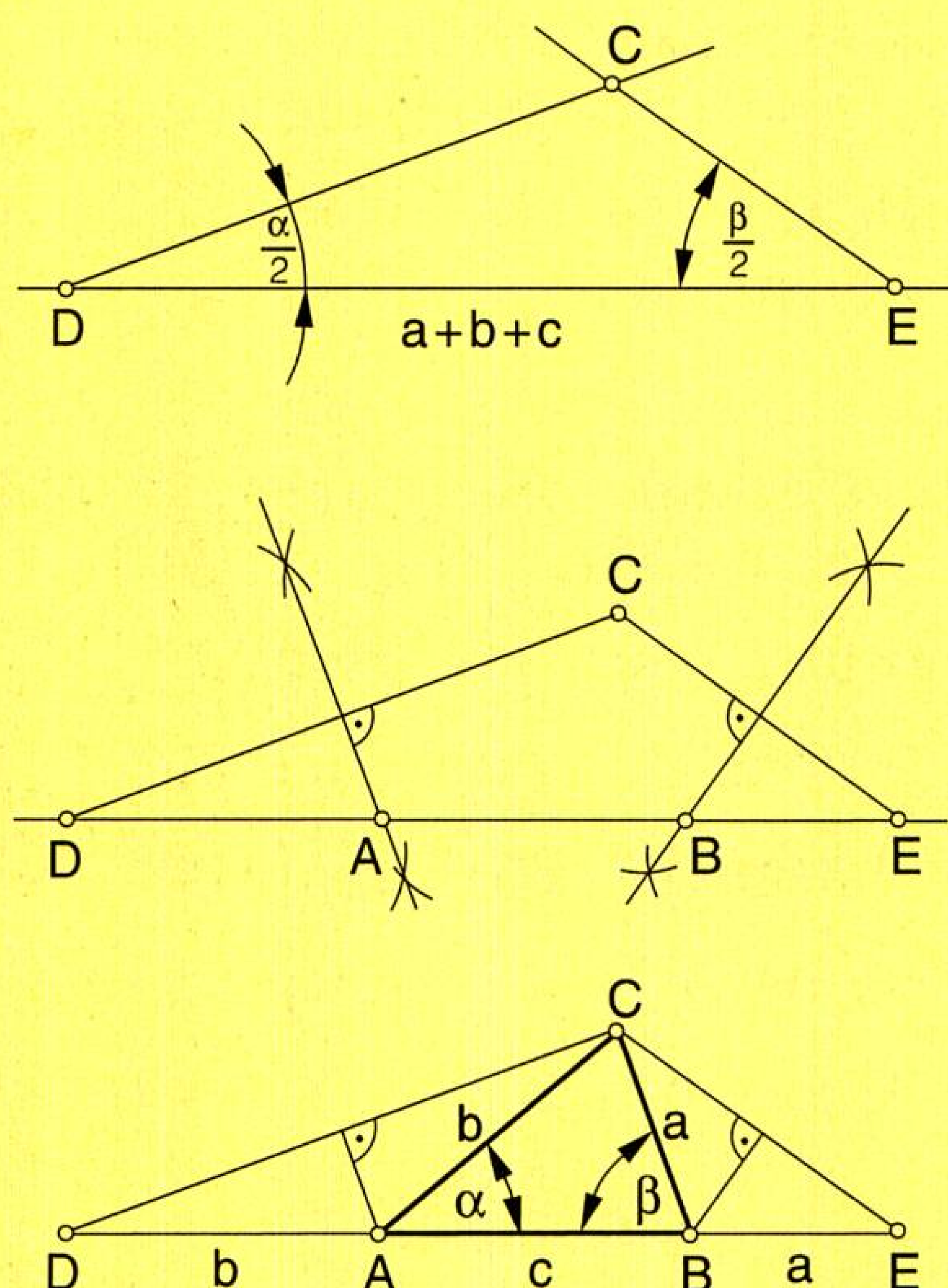
f) $a = 87$ mm, $b - c = 30$ mm, $h_b = 43$ mm

g) $b - c = 42$ mm, $h_b = 54$ mm, $\alpha = 36°$

h) $c - a = 32$ mm, $h_a = 69$ mm, $\beta = 60°$

1227. Ein Dreieck ($a+b+c = 80$ mm, $\alpha = 40°$, $\beta = 70°$) ist zu zeichnen!

Lösung:



a) $\overline{AC} = \overline{AD}$, $\overline{BC} = ...?$

b) $\sphericalangle CDA = \frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle BEC = \frac{\beta}{2}$ Begründung!

c) Die nebenstehende Konstruktion ist mit Worten zu beschreiben.

d) Angenommen $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} > 90° \Leftrightarrow \alpha + \beta > 180°$. Ist die Aufgabe dann lösbar?

Man konstruiere ein Dreieck mit

e) $a+b+c = 90$ mm, $\beta = 45°$, $\gamma = 63°$

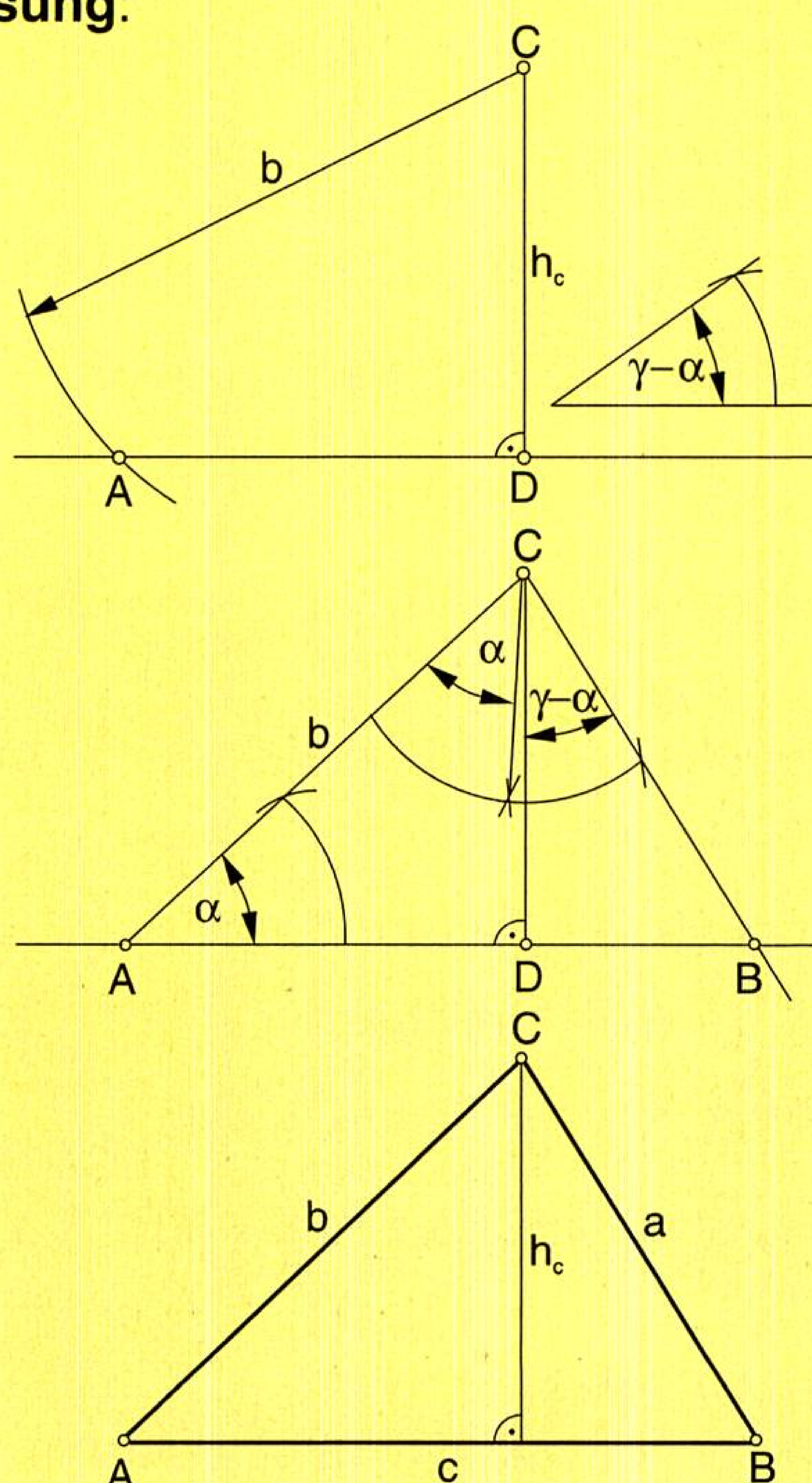
f) $a+b+c = 105$ mm, $\beta = 90°$, $h_c = 30$ mm

g) $a+b+c = 108$ mm, $\alpha = 60°$, $h_b = 35$ mm

h) $a+b+c = 112$ mm, $\alpha = 45°$, $b+c = 72$ mm

1228. Ein Dreieck ($b = 39$ mm, $h_c = 27$ mm, $\gamma - \alpha = 35°$) ist zu zeichnen!

Lösung:



a) Die nebenstehende Konstruktion ist mit Worten zu beschreiben.

b) Wie groß darf der Winkel α im nebenstehenden Beispiel maximal werden? (Begründung!)

Man konstruiere ein Dreieck mit

c) $a = 57$ mm, $h_c = 42$ mm, $\gamma - \beta = 30°$

d) $b = 68$ mm, $h_c = 50$ mm, $\beta - \alpha = 23°$

e) $c = 55$ mm, $h_a = 41$ mm, $\gamma - \beta = 40°$

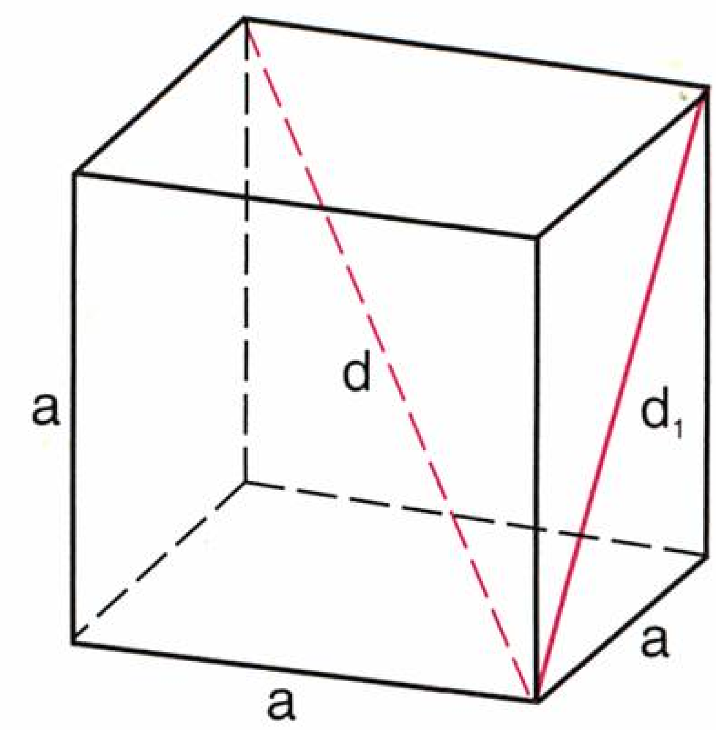
f) $a = 110$ mm, $h_b = 83$ mm, $\alpha - \gamma = 52°$

g) $c = 93$ mm, $h_b = 81$ mm, $\gamma - \alpha = 19°$

h) $c = 95$ mm, $\beta = 50°$, $\gamma - \alpha = 80°$

STEREOMETRIE (Geometrie des Raumes)

1. Würfel



Bezeichnungen:

a ..... Kantenlänge
d_1 ..... Flächendiagonale
d ..... Raumdiagonale
O ..... Oberfläche
V ..... Volumen

$V = a^3$
$O = 6a^2$
$d = a\sqrt{3}$
$d_1 = a\sqrt{2}$

Beispiel:

a) Die Oberfläche eines Würfels beträgt 150 cm². Man berechne das Volumen V des Würfels!

b) Man zeige, dass für den Würfel $d = a\sqrt{3}$ gilt.

Lösung:

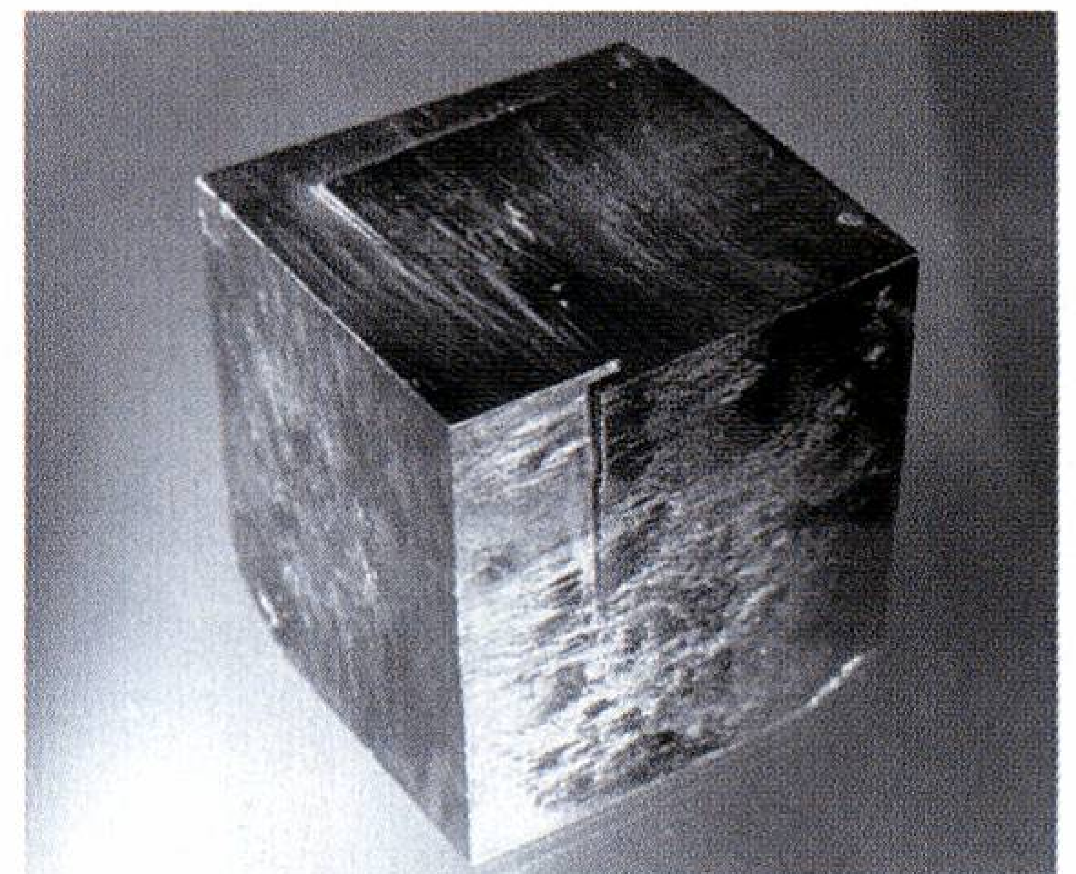
a) $O = 6a^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{O}{6} = 25$ $\quad a = 5\text{ cm}$

$V = a^3 = 5^3 = 125$ $\quad V = 125\text{ cm}^3$

b) Nach dem pythagoräischen Lehrsatz ergibt sich:

$d_1^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$d^2 = d_1^2 + a^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 \quad d = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$



Pyrit (Eisenkies, Schwefelkies) ist ein gelbes metallisch glänzendes Mineral.

Chemische Formel: FeS_2.

Pyrit wurde in der Antike als Schmuckstein verwendet.

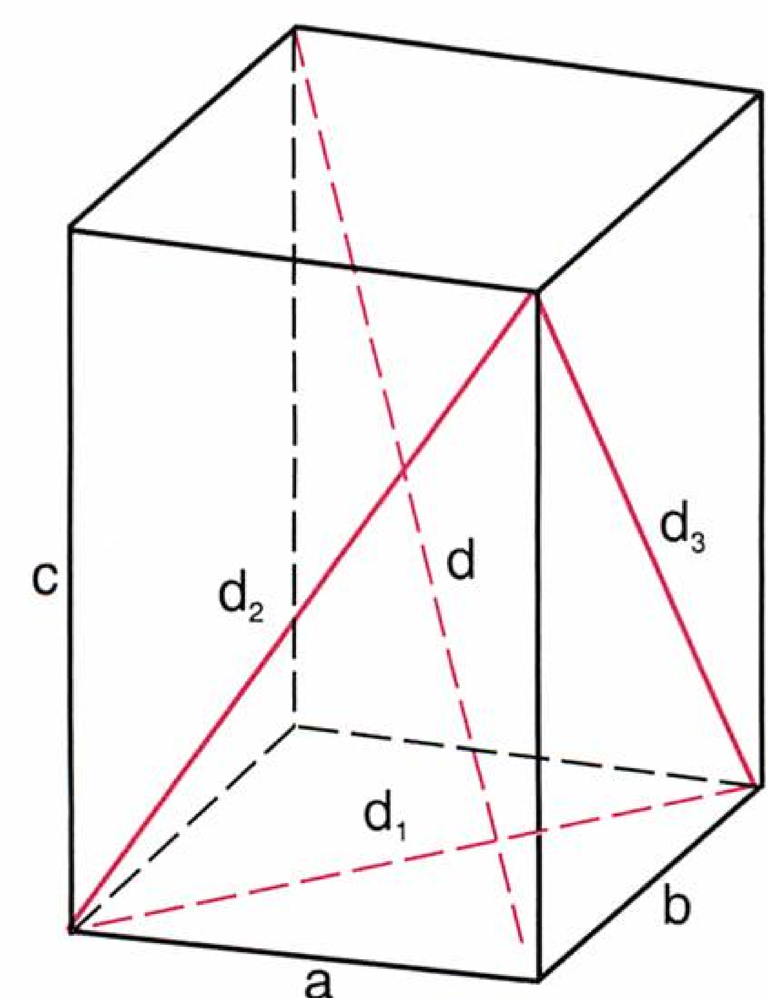
„Die Oberfläche eines Würfels beträgt 150 cm²", heißt es im obigen Beispiel. Im Grunde genommen handelt es sich doch um den Oberflächeninhalt, denn die **„Fläche"** ist ja etwas Geometrisches, während der **„Flächeninhalt"** eine physikalische Große ist. Auf unserem Exaktheitsniveau werden wir aber nicht zwischen Fläche und Flächeninhalt unterscheiden, obgleich uns intuitiv bewusst sein sollte, dass ein Unterschied besteht.

2. Quader

Bezeichnungen:

a, b, c ..... Kantenlängen
d_1, d_2, d_3 ..... Flächendiagonalen
d ..... Raumdiagonale
O ..... Oberfläche
V ..... Volumen

$V = abc$
$O = 2(ab + ac + bc)$
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$



Beispiel:

Das Volumen eines Quaders mit den Grundkanten a = 6 cm und b = 4 cm beträgt 288 cm³. Man berechne die **a)** Oberfläche O **b)** Raumdiagonale d des Quaders.

Lösung:

a) $V = abc \Leftrightarrow c = \frac{V}{ab} = \frac{288}{24} = 12$ $\quad c = 12\text{ cm}$

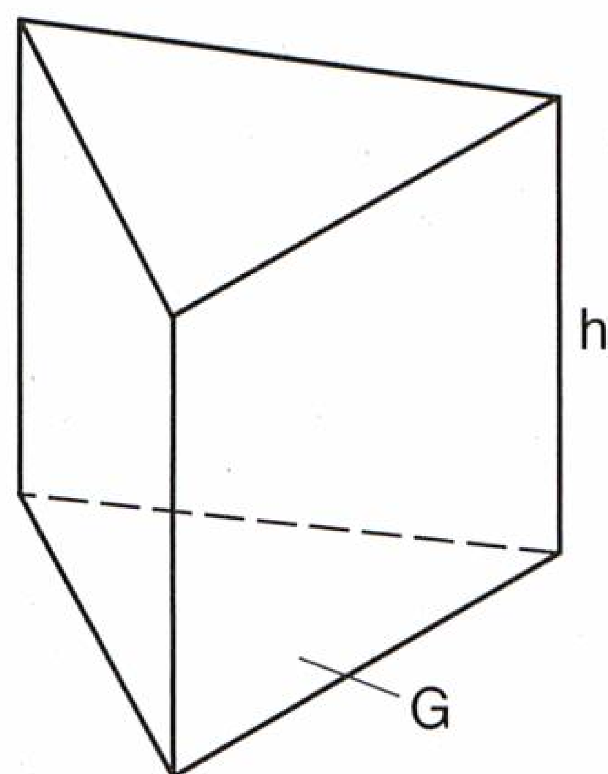
$O = 2(ab + ac + bc) = 2(24 + 72 + 48) = 288$ $\quad O = 288\text{ cm}^2$

b) $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 36 + 16 + 144 = 196$ $\quad d = 14\text{ cm}$

Charakteristische Eigenschaft:

Begrenzung durch 6 Rechtecke, die paarweise kongruent sind, und von denen ein Paar auch quadratisch sein kann.

3. Prisma



Charakteristische Eigenschaft:

Grund- und Deckfläche liegen in parallelen Ebenen. Sie stellen kongruente Vielecke dar, deren Eckpunkte durch zueinander parallele Kanten verbunden sind.



Beryll hat die Form eines regelmäßigen sechsseitigen Prismas. Der hier dargestellte Kristall ist 8 cm hoch. Chemische Formel: $Al_2Be_3[Si_6O_{18}]$. Fundorte in Brasilien.

Bezeichnungen:

u ..... Umfang der Grundfläche
h ..... Höhe
G ..... Grundfläche
M ..... Mantel
O ..... Oberfläche
V ..... Volumen

$V = Gh$
$M = uh$[1]
$O = 2G + M$

Man kann Würfel und Quader als Sonderfälle des Prismas betrachten.

Stehen die Seitenflächen des Prismas senkrecht zur Grundfläche, spricht man von einem **geraden Prisma**, andernfalls von einem **schiefen Prisma**. Die Seitenflächen bilden den **Mantel** des Prismas.

Beispiel:

Die Grundfläche eines 7 cm hohen Prismas ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 2 cm.

Man berechne auf drei Dezimalen **a)** Volumen V **b)** Oberfläche O des Prismas.

Lösung:

a) $V = Gh = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot h = \sqrt{3} \cdot 7 = 12{,}124$ $\qquad V = 12{,}124\ cm^3$

b) $O = 2G + M = 2 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + 3ah = 2\sqrt{3} + 6 \cdot 7 = 45{,}464$

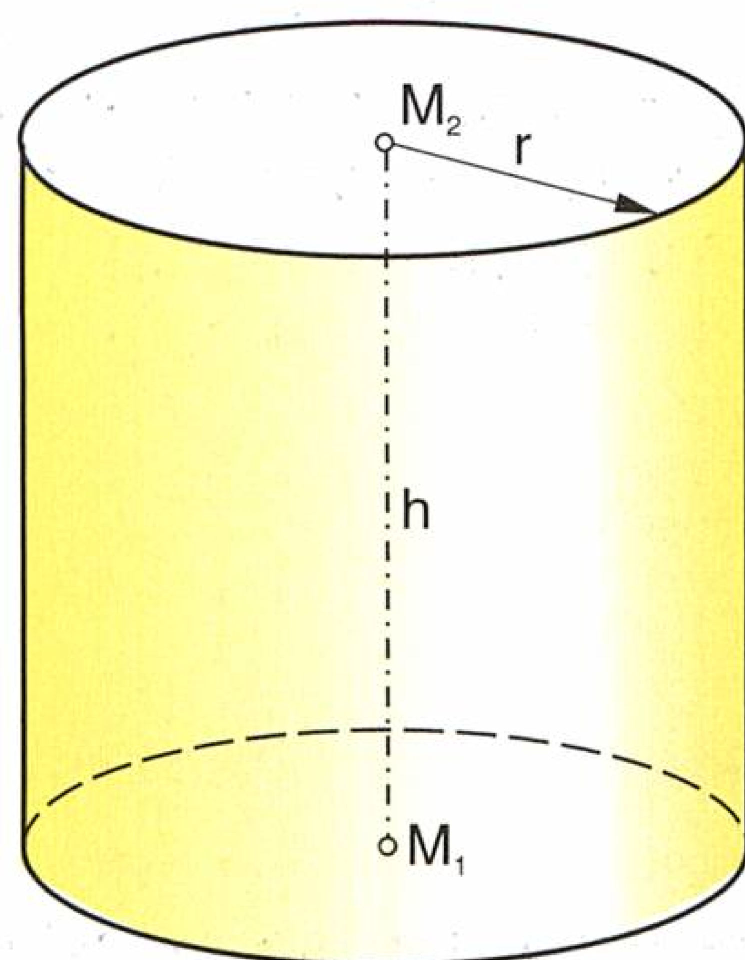
$O = 45{,}464\ cm^2$

4. Drehzylinder

Bezeichnungen:

r ..... Radius
h ..... Höhe
G ..... Grundfläche
M ..... Mantel
O ..... Oberfläche
V ..... Volumen

$V = \pi r^2 h$
$M = 2\pi rh$
$O = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r\,(r + h)$



Was versteht man unter der Grundfläche, Mantelfläche und Höhe eines Drehzylinders?

Der durch die Höhe gelegte und zur Grundfläche senkrecht verlaufende Schnitt durch einen Drehzylinder wird als **Achsenschnitt** bezeichnet. Bildet der Achsenschnitt eines Drehzylinders ein Quadrat, so spricht man von einem **gleichseitigen Zylinder**.

Beispiel:

Ein Drehzylinder hat als Basis einen Kreis mit 4 cm Durchmesser und ist 5 cm hoch. Man berechne auf eine Dezimale **a)** Volumen V **b)** Oberfläche O des Zylinders.

Lösung:

a) $r = \frac{d}{2} = 2 \Rightarrow V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4 \cdot 5 = 62{,}83$ $\qquad V = 62{,}8\ cm^3$

b) $O = 2\pi r\,(r + h) = 4\pi\,(2 + 5) = 87{,}96$ $\qquad O = 88{,}0\ cm^2$

[1]) Gilt nur für das gerade Prisma.

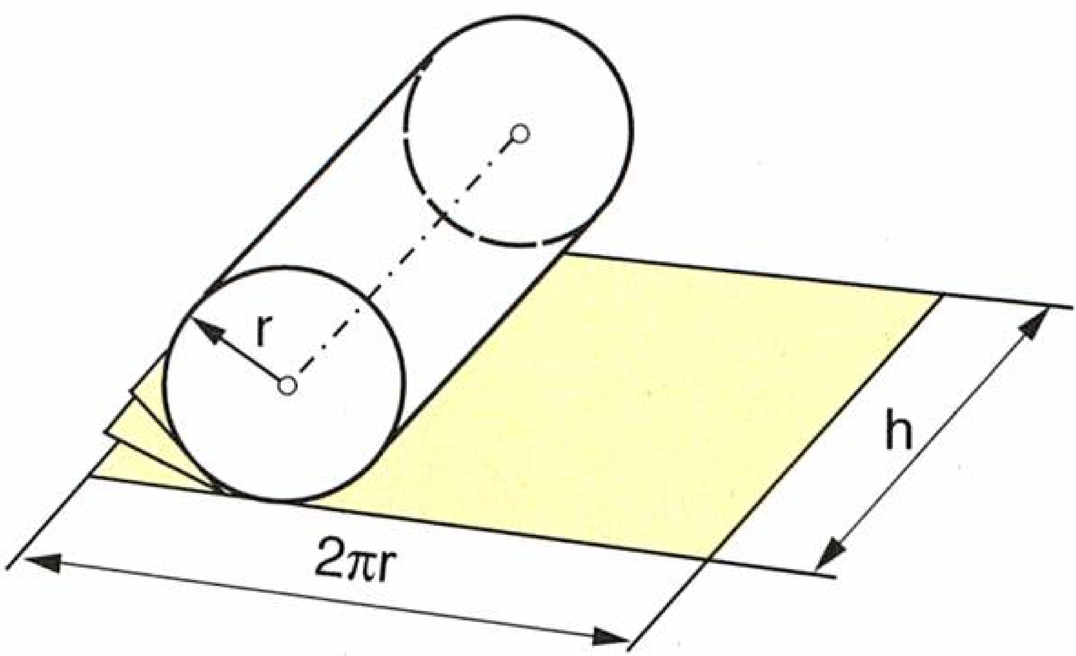
Beispiel:

Man zeige, dass für den Drehzylinder $M = 2\pi rh$ gilt.

Lösung:

Der in der Ebene abgewickelte Drehzylindermantel bildet ein Rechteck mit den Seitenlängen h und $2\pi r$.

Somit gilt: $M = 2\pi rh$



5. Pyramide

Bezeichnungen:

h ..... Höhe

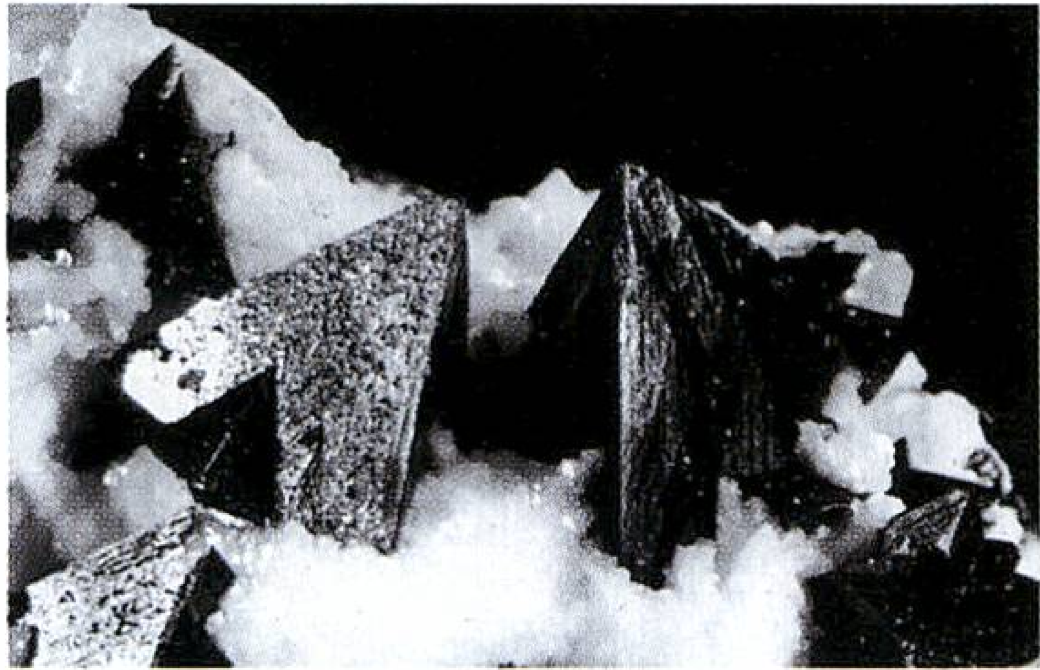
G ..... Grundfläche

M ..... Mantel

O ..... Oberfläche

V ..... Volumen

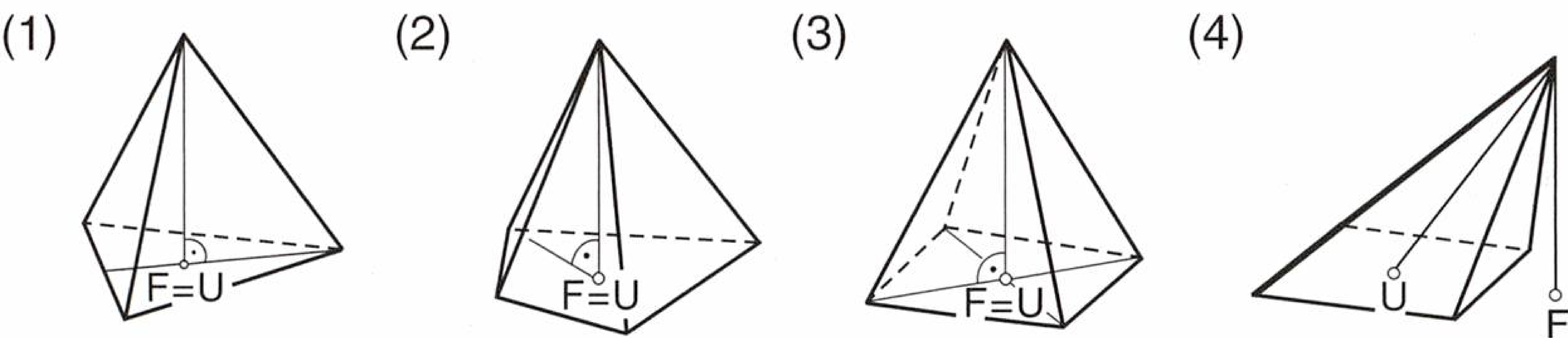
$$V = \frac{Gh}{3}$$
$$O = G + M$$



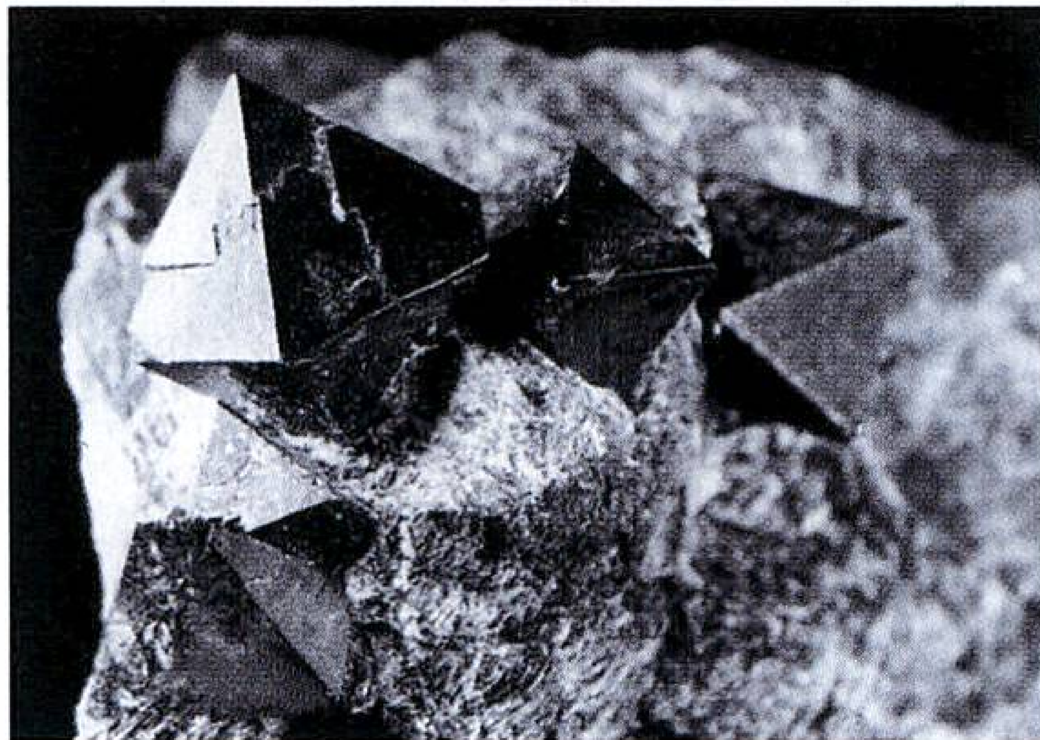
Das regelmäßige **Tetraeder** ist eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche, d. h. ein von 4 gleichseitigen (kongruenten) Dreiecken begrenzter „Vielflächner". Das Foto zeigt das Mineral Tetraedrit, das die Form eines Tetraeders hat.

Die Vereinigung der Seitenflächen bildet den **Mantel** der Pyramide. Der Abstand der Spitze von der Grundfläche heißt **Höhe** der Pyramide.

Man spricht von einer **geraden Pyramide**, wenn der Höhenfußpunkt F mit dem Umkreismittelpunkt U der Grundfläche zusammen fällt. In diesem Fall sind alle Seitenkanten der Pyramide gleich lang und unter dem gleichen Winkel zur Grundfläche geneigt — vgl. **(1)** bis **(3)**. Andernfalls spricht man von einer **schiefen Pyramide** — vgl. **(4)**.



„Doppelpyramide":



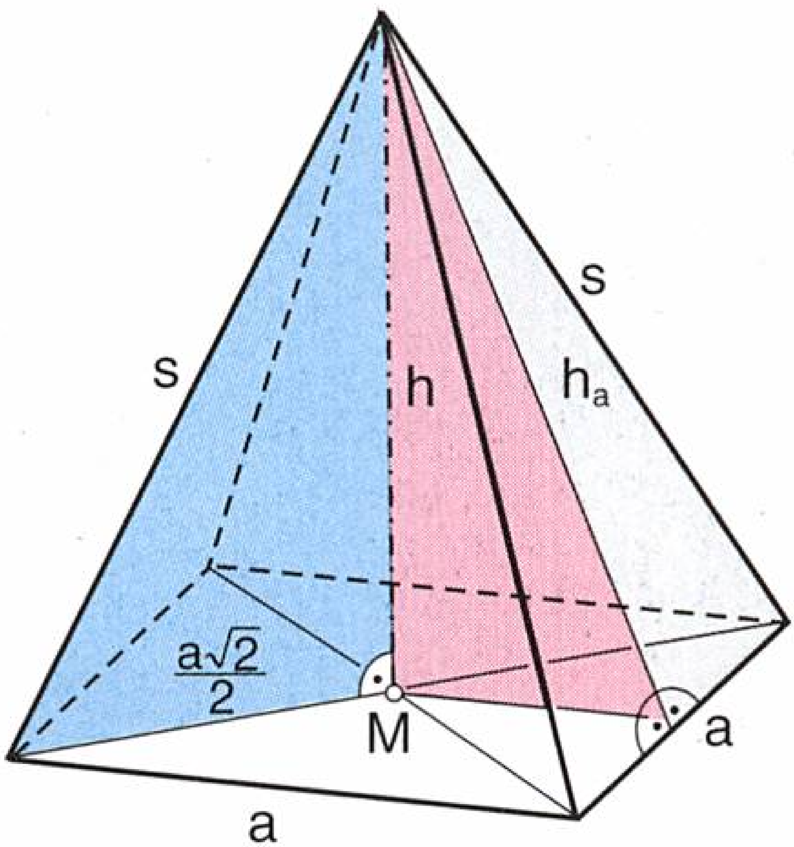
Das Foto zeigt einen Magnetit. Magnetit kristallisiert in Form eines sogenannten **Oktaeders** („Doppelpyramide"). Chemische Formel: Fe_3O_4. Bedeutende Lagerstätten in Skandinavien, in den USA und im Ural. Der dargestellte Kristall wurde in Rumpersdorf (Burgenland) gefunden.

Beispiel:

Von einer geraden quadratischen Pyramide ist die Grundkantenlänge $a = 5$ cm und die Körperhöhe $h = 6$ cm gegeben.

Man berechne **a)** Volumen V **b)** Oberfläche O der Pyramide.

Lösung:



a) $V = \frac{a^2h}{3} = \frac{25 \cdot 6}{3} = 50$

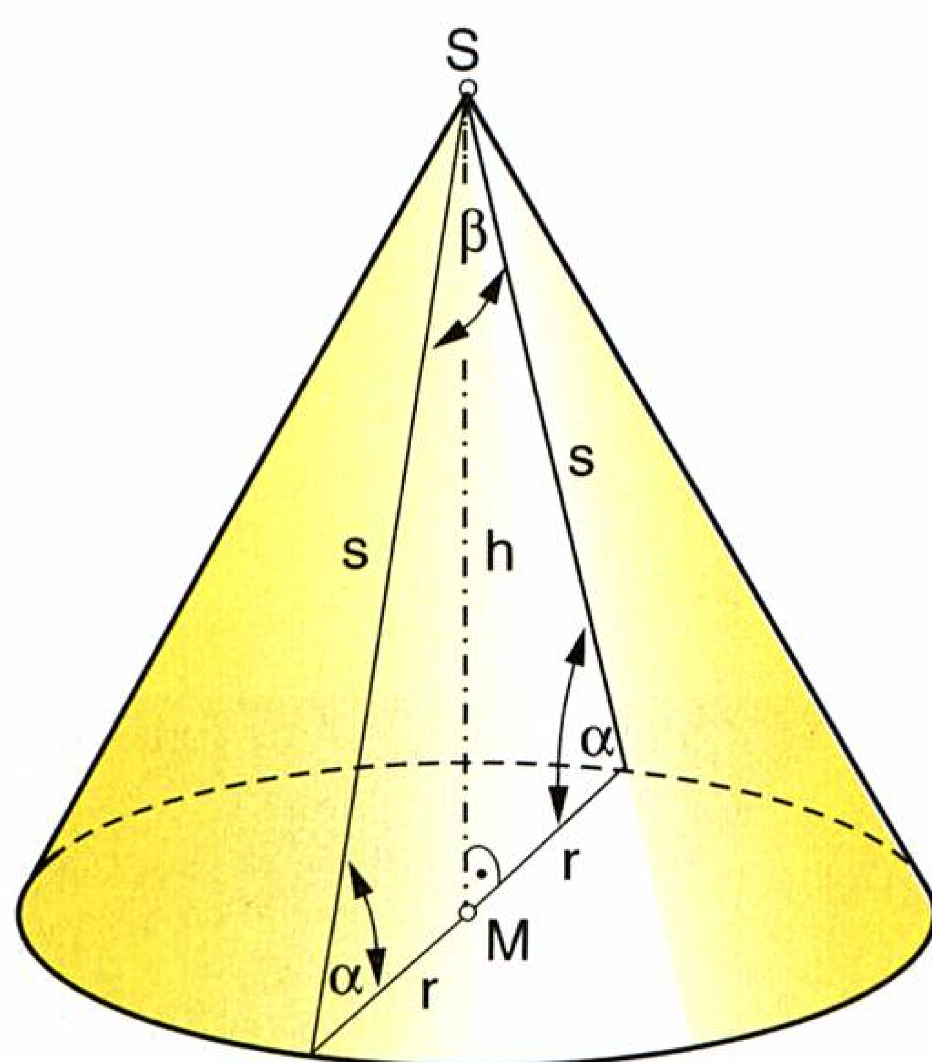
$V = 50\text{ cm}^3$

b) $h_a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 36 + 6{,}25 = 42{,}25$ $\qquad h_a = 6{,}5$ cm

$O = a^2 + 4 \cdot \frac{ah_a}{2} = a^2 + 2ah_a = 25 + 10 \cdot 6{,}5 = 90$ $\qquad O = 90\text{ cm}^2$

Gerade quadratische Pyramide

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_a^2$$
$$h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2$$
$$h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = s^2$$



6. Drehkegel

Bezeichnungen:

r ..... Radius
h ..... Höhe
s ..... Mantellinie (Erzeugende)
α ..... Basiswinkel
β ..... Öffnungswinkel
G ..... Grundfläche
M ..... Mantel
O ..... Oberfläche
V ..... Volumen

$s^2 = r^2 + h^2$

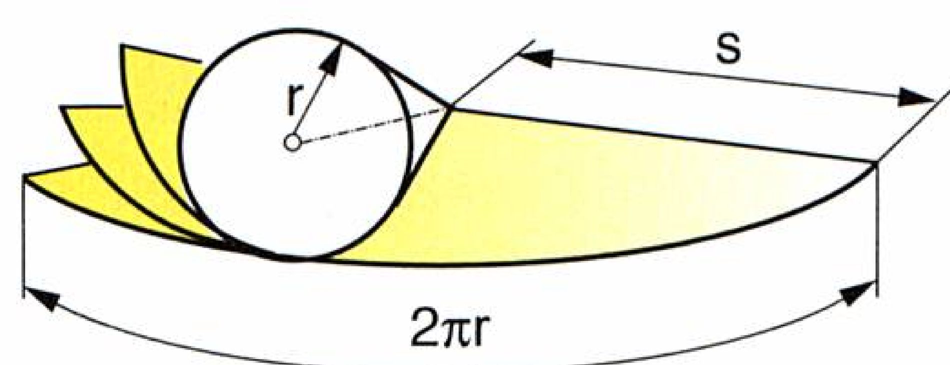
$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

$M = \pi rs$

$O = \pi r^2 + \pi rs = \pi r(r+s)$

Was versteht man in Analogie zur Pyramide unter Höhe und Mantel eines Drehkegels?

Die Verbindungsgerade des Kreismittelpunkts mit der Spitze S heißt **Achse** und ist beim Drehkegel mit der Höhe identisch. Bildet der Achsenschnitt eines Drehkegels ein gleichseitiges Dreieck, so spricht man von einem **gleichseitigen Kegel**.



Beispiel:

Man zeige, dass für den Drehkegel $M = \pi rs$ gilt.

Lösung:

Wird der Mantel des Drehkegels entlang einer Mantellinie aufgeschnitten und in einer Ebene abgerollt, so entsteht ein Kreisausschnitt mit dem Radius s und der Bogenlänge $2\pi r$.

Es gilt: $M = \frac{bs}{2} = \frac{2\pi rs}{2} = \pi rs$

Die zahlreichen, verschiedenen Volumsformeln kann man sich einfach merken!

Prisma[1], Zylinder: $V = Gh$
Pyramide, Kegel: $V = \frac{Gh}{3}$

Es gilt also: Liegt die Spitze im Endlichen, ist das Volumen ein Drittel des Volumens des entsprechenden prismatischen Körpers.

Beispiel:

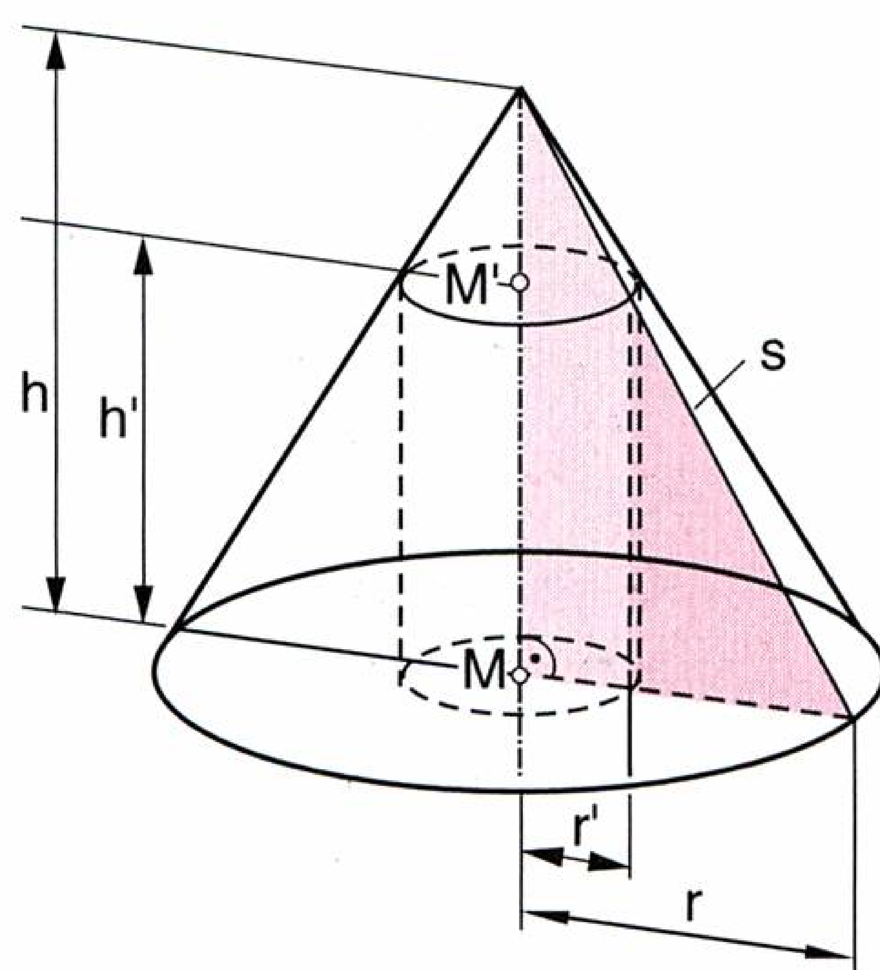
Von einem Drehkegel sind die Höhe $h = 4$ cm und die Mantellinie $s = 5$ cm gegeben. Man berechne **a)** Volumen V **b)** Oberfläche O des Drehkegels als Vielfache von π.

Lösung:

a) $r^2 = s^2 - h^2 = 25 - 16 = 9$ — $r = 3$ cm

$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 9 \cdot 4}{3} = 12\pi$ — $V = 12\pi\ cm^3$

b) $O = \pi r(r+s) = \pi \cdot 3(3+5) = 24\pi$ — $O = 24\pi\ cm^2$



Beispiel:

Einem Kegel ($r = 9$ cm, $h = 15$ cm) wird ein Zylinder ($h' = 10$ cm) eingeschrieben. Wie groß sind **a)** Volumen **b)** Oberfläche des Zylinders?

Lösung:

a) $r : h = r' : (h - h')$

$r' = \frac{r \cdot (h-h')}{h} = \frac{9 \cdot (15-10)}{15} = 3$ — $r' = 3$ cm

$V' = \pi r'^2 h' = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 90\pi$ — $V' = 90\pi\ cm^3$

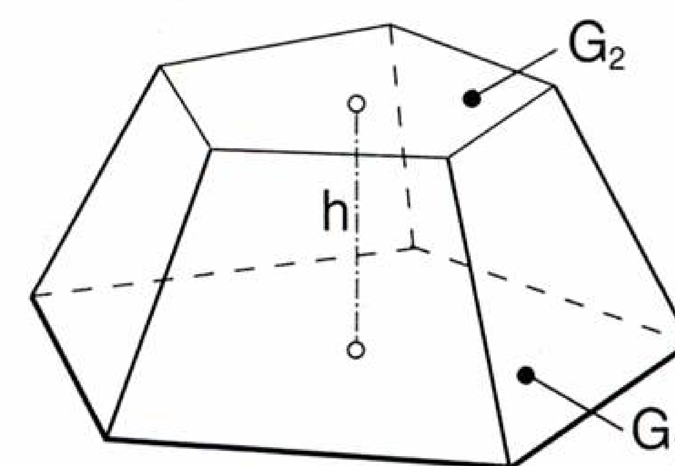
b) $O' = 2\pi r'(r' + h') = 2\pi \cdot 3(3+10) = 78\pi$ — $O' = 78\pi\ cm^2$

[1]) Würfel und Quader verstehen sich ja als Sonderfälle des Prismas.

7. Stumpfe Körper

7.1 Pyramidenstumpf

Wird eine Pyramide parallel zur Grundfläche durchgeschnitten, so entsteht oberhalb der Schnittebene ein zur ursprünglichen Pyramide ähnlicher Körper. Dieser ist die Ergänzungspyramide zum unterhalb der Schnittebene verbleibenden **Pyramidenstumpf**.

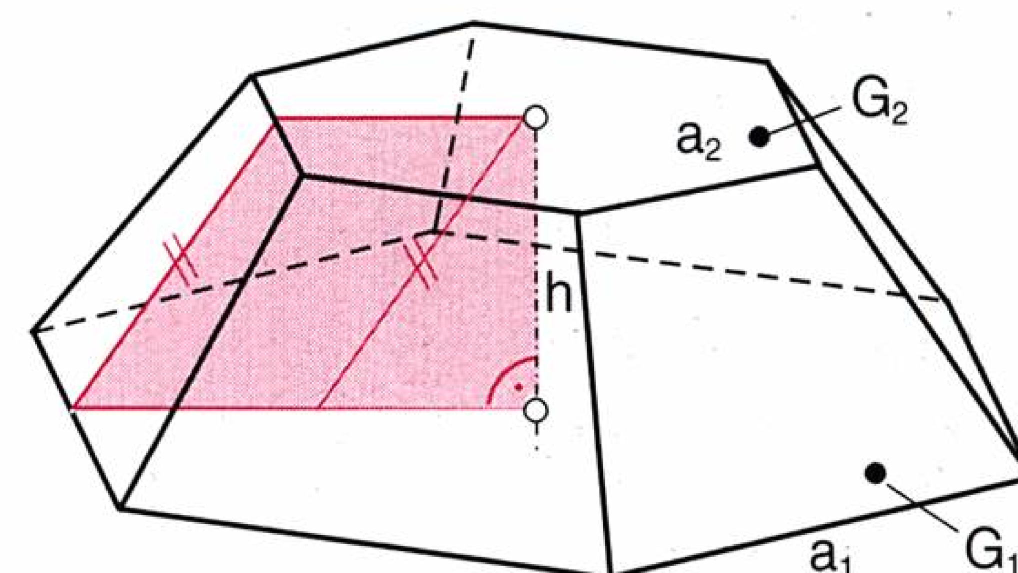


Bezeichnungen:

h .....Stumpfhöhe
G_1.....Grundfläche
G_2.....Deckfläche
M .....Mantel (Trapeze!)
O .....Oberfläche
V .....Volumen

$$V = \frac{h}{3}(G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)$$
$$O = G_1 + G_2 + M$$

Beispiel:
Bei einem 10 cm hohen regelmäßigen sechsseitigen Pyramidenstumpf messen die Grundkanten $a_1 = 20$ cm und $a_2 = 12$ cm. **a)** Volumen **b)** Oberfläche des Pyramidenstumpfes sind zu berechnen.



Lösung:

a) $G_1 = 6 \cdot \frac{a_1^2}{4}\sqrt{3} = ... = 1039{,}2$

$G_1 = 1039{,}2\ \text{cm}^2$

$G_2 = 6 \cdot \frac{a_2^2}{4}\sqrt{3} = ... = 374{,}1$

$G_2 = 374{,}1\ \text{cm}^2$

Die Grund- bzw. Deckfläche besteht ja aus 6 gleichseitigen Dreiecken

$V = \frac{h}{3}(G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2) =$

$= \frac{10}{3}(1039{,}2 + \sqrt{1039{,}2 \cdot 374{,}1} + 374{,}1) = ... = 6789{,}6$

$V = 6{,}79\ \text{dm}^3$

b) $M + 6 \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} . h_0$ (Seitenflächen sind 6 kongruente Trapeze)

$h_1 = \frac{a_1}{2}\sqrt{3} = ... = 17{,}3$

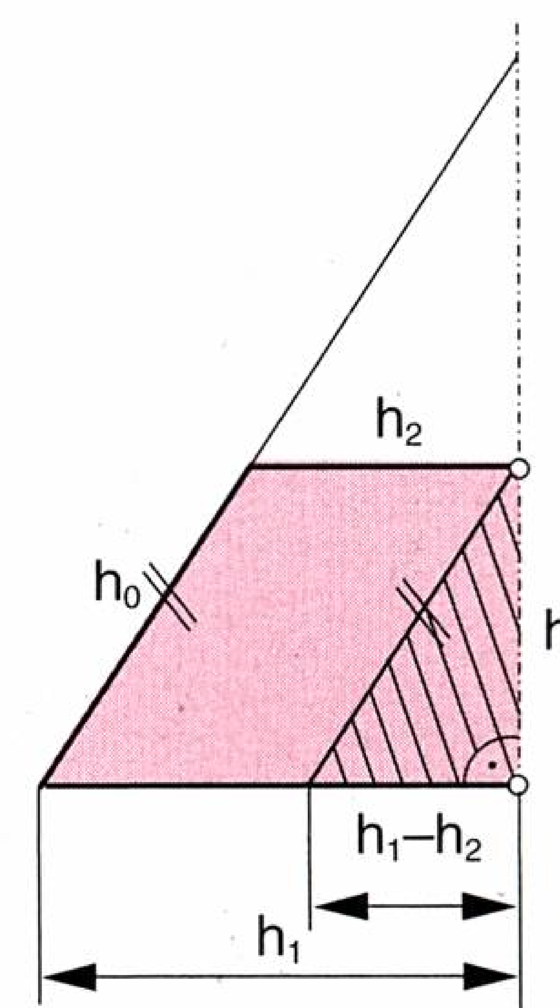
$h_2 = \frac{a_2}{2}\sqrt{3} = ... = 10{,}4$

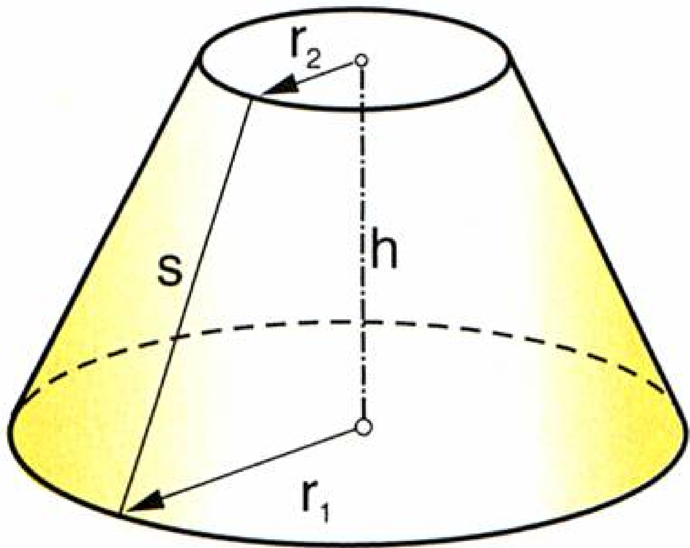
h_0 ..... Höhe der Trapeze
h_1 ..... Höhe eines Dreiecks aus G_1
h_2 ..... Höhe eines Dreiecks aus G_2

$h_0 = \sqrt{h^2 + (h_1 - h_2)^2} = ... = 12{,}17$ (Pythagoräischer Lehrsatz — vgl. Figur in der Außenspalte!)

$M = 3(a_1 + a_2) \cdot h_0 = ... = 1167{,}9$

$O = G_1 + G_2 + M = ... = 2581{,}2$ $O = 2581{,}2\ \text{cm}^2$





7.2 Kegelstumpf

Wird ein Kegel parallel zur Grundfläche durchgeschnitten, so entsteht oberhalb der Schnittebene ein zum ursprünglichen Kegel ähnlicher Körper. Dieser ist der Ergänzungskegel zum unterhalb der Schnittebene verbleibenden **Kegelstumpf**.

Bezeichnungen:

r_1 ..... Radius der Grundfläche
r_2 ..... Radius der Deckfläche
h ..... Stumpfhöhe
s ..... Seitenlänge
G_1 ..... Grundfläche
G_2 ..... Deckfläche
M ..... Mantel
O ..... Oberfläche
V ..... Volumen

$$V = \frac{h}{3}(G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2) = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$$
$$M = \pi s (r_1 + r_2)$$
$$s = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$$
$$O = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + M = \pi [s(r_1 + r_2) + r_1^2 + r_2^2]$$



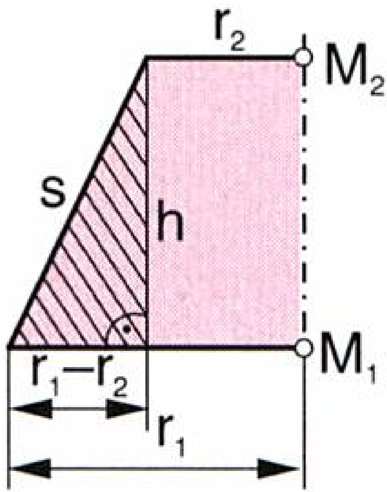
Das obige Foto zeigt einen österreichischen Sauerrahmbecher in Form eines Kegelstumpfs.

Beispiel:

a) Volumen **b)** Oberfläche eines geraden Kegelstumpfes ($M = 420\ cm^2$, $r_1 = 12$ cm, $r_2 = 7,1$ cm) sind zu berechnen.

Lösung:

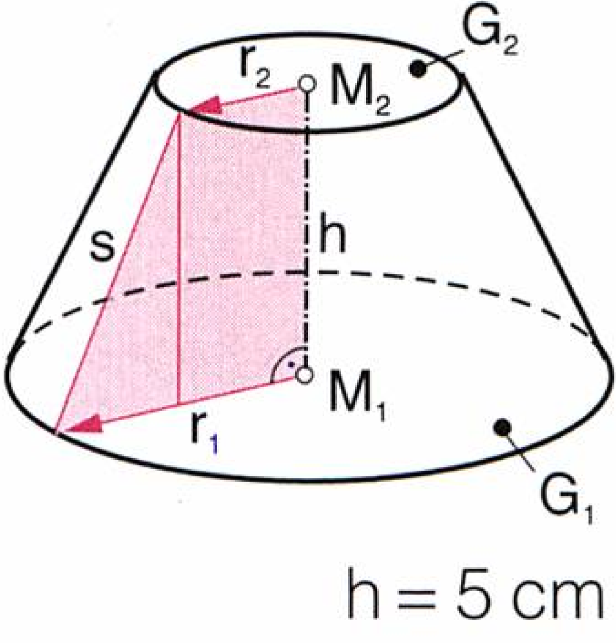
a) $M = \pi s (r_1 + r_2) \Leftrightarrow s = \frac{M}{\pi(r_1 + r_2)} = \frac{420}{\pi(12 + 7,1)} = 7$



$s = 7$ cm

$s^2 = h^2 + (r_1 - r_2)^2$

$h = \sqrt{s^2 - (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{7^2 - 4,9^2} = \ldots = 5$



h = 5 cm

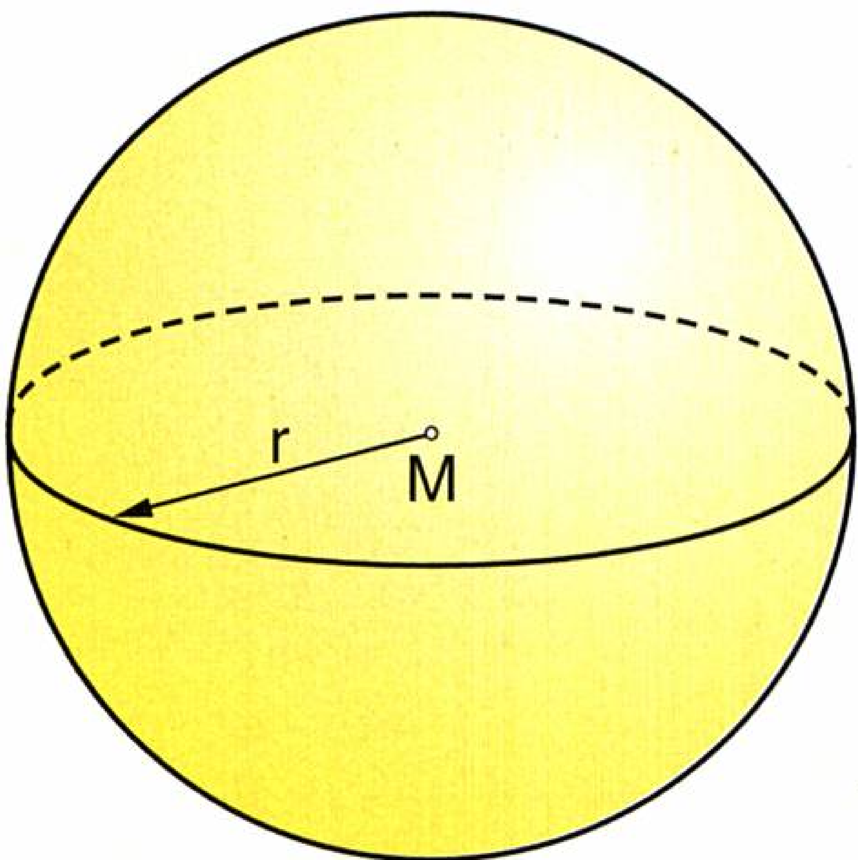
$V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) = \frac{5\pi}{3}(12^2 + 12 \cdot 7,1 + 7,1^2) = 1463,74$

$V = 1464\ cm^3$

b) $O = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + M = \pi(12^2 + 7,1^2) + 420 = 1030,76$

$O = 1031\ cm^2$

8. Kugel



Bezeichnungen:

r ..... Radius
O ..... Oberfläche
V ..... Volumen

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$
$$O = 4\pi r^2$$

Beispiel:

Man drücke die Oberfläche O einer Kugel durch das Volumen V aus!

Lösung:

$V = \frac{4\pi r^3}{3} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ $\quad O = 4\pi r^2 = 4\pi \sqrt[3]{\frac{9V^2}{16\pi^2}} = \sqrt[3]{36\pi V^2}$

AUFGABEN

1229. Würfel

a) $a = 12$ cm; $d_1 = ?$, $V = ?$, $O = ?$ **b)** $d_1 = 23$ cm; $a = ?$, $V = ?$, $O = ?$

c) $V = 64\ mm^3$; $a = ?$, $d = ?$, $O = ?$ **d)** $O = 24\ m^2$; $a = ?$, $d = ?$, $V = ?$

1230. Quader

	a	b	c	d	V	O
a)	14,4	10,8	1,9			
b)	32		24	41		
c)	19,2	15			1612,8	
d)	84	27				7732,8
e)	40,8		2,4		1400,3	
f)		28,8	21,6			28339
g)		18	17,6	50		
h)	82	64		114,56		



Flussspat (Freiberg, Sachsen), durchschnittliche Kantenlänge der dargestellten Würfel: 1 cm

1231. Ein Zinnwürfel mit der Kante k wird in einen volumsgleichen Quader mit den Kanten a, b und c umgegossen. Die jeweils fehlende Größe ist zu berechnen:

	k	a	b	c		k	a	b	c
a)	2	1	2		**b)**	6		4	9
c)	4	2		8	**d)**		10	25,6	2

1232. In einem Quader mit der Oberfläche $1342\ cm^2$ ist die Länge um 2 cm größer als die Breite und um 2 cm kleiner als die Höhe. Wie groß ist das Volumen des Quaders?

1233. Wie verhalten sich die **a)** Kantenlängen **b)** Oberflächen zweier Würfel, von denen das Volumen des ersten 8-mal so groß ist wie das des zweiten?

1234. Von einem Quader ist das Volumen und das Verhältnis seiner Grundkanten gegeben. Man berechne die Raumdiagonale des oberflächengleichen Würfels!

a) $V = 24\ cm^3$, $a:b:c = 9:9:8$ **b)** $V = 36\ cm^3$, $a:b:c = 2:3:6$

1235. Von einem Quader ist die Oberfläche und das Verhältnis seiner Grundkanten gegeben. Wie groß ist das Volumen des Quaders?

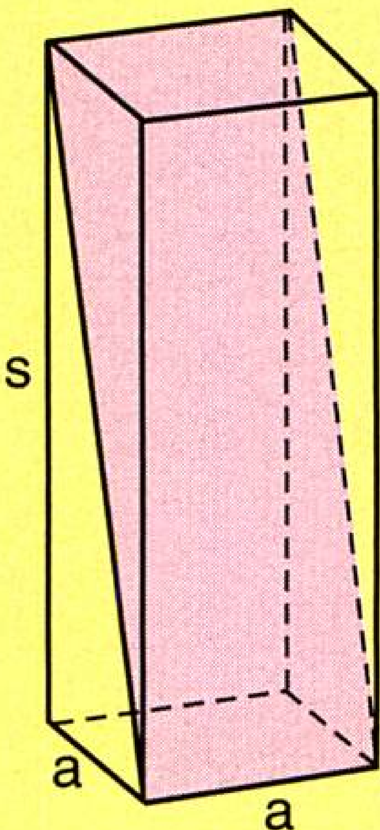
a) $O = 1078\ cm^2$, $a:b:c = 1:2:3$ **b)** $O = 18424\ cm^2$, $a:b:c = 3:4:5$

1236. In einem Quader mit quadratischer Grundfläche verhält sich die Länge der Grundkante zur Höhe wie $2:3$. Man berechne **a)** das Volumen des Quaders, wenn die Oberfläche $128\ cm^2$ beträgt **b)** die Oberfläche des Quaders, wenn das Volumen $768\ cm^3$ beträgt.

1237. Von einem Quader sind die Flächendiagonalen d_1, d_2 und d_3 gegeben. Man berechne **(1)** das Volumen **(2)** die Oberfläche **a)** $d_1 = 20$ cm, $d_2 = 34$ cm, $d_3 = 32{,}311$ cm **b)** $d_1 = 37$ dm, $d_2 = 25\sqrt{2}$ dm, $d_3 = 13$ dm

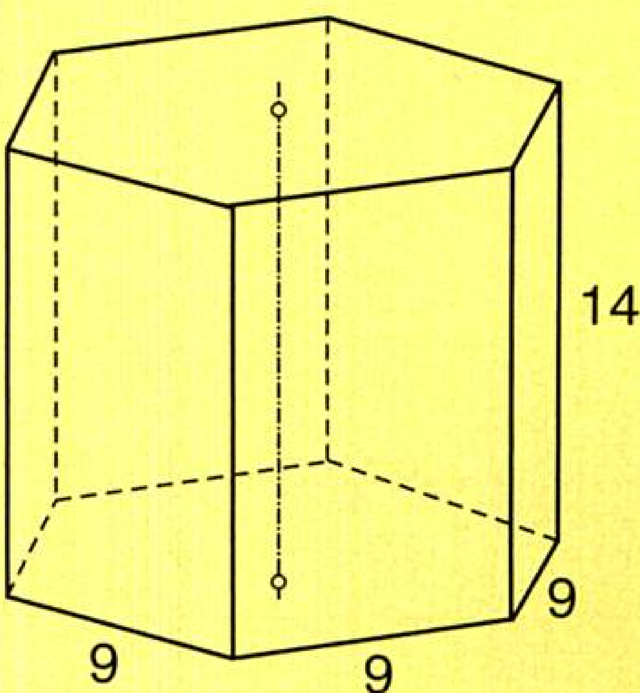
1238. Von einem dreiseitigen Prisma sind die Kanten der Grundfläche a, b, c und die Höhe h bekannt. Wie groß sind (1) Volumen (2) Oberfläche?

a) $a = 39$, $b = 42$, $c = 45$, $h = 10$ **b)** $a = 37$, $b = 13$, $c = 40$, $h = 50$



1239. In einem Prisma mit quadratischer Grundfläche ist das Verhältnis der Grundkante zur Seitenkante 1:3. Der durch die Grundkante gelegte Diagonalschnitt hat den Flächeninhalt A.

Man berechne (1) die Raumdiagonale d (2) die Oberfläche O (3) das Volumen V für **a)** $A = \sqrt{10}\ \text{cm}^2$ **b)** $A = 100\ \text{cm}^2$.



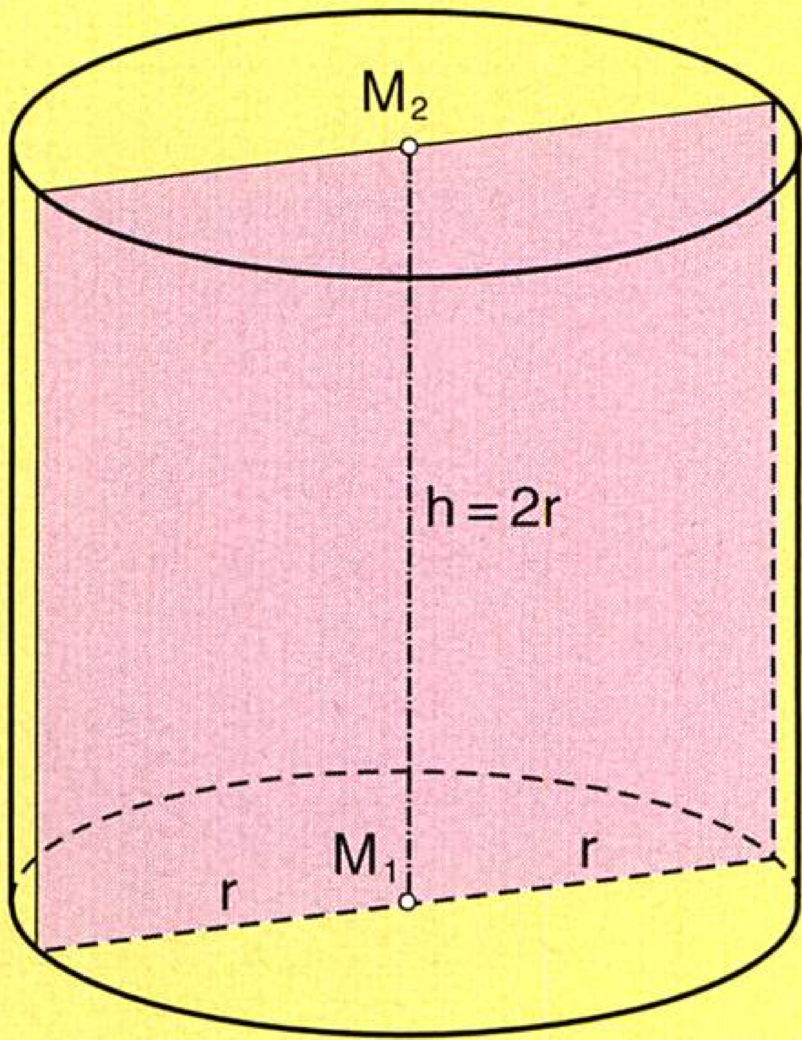
1240. Man ermittle **a)** Oberfläche **b)** Volumen eines regelmäßigen sechsseitigen Prismas mit der Grundkante 9 cm und der Höhe 14 cm!

1241. Drehzylinder

	r	h	V	O		r	h	V	O
a)	2	3			**b)**	4	5		
c)	6			156π	**d)**	8			272π
e)		11	1100π		**f)**		13	1872π	
g)	14		2940π		**h)**	16		4352π	

1242. Der Radius eines gleichseitigen Zylinders mit dem Mantel **a)** $M = 100\pi\ \text{cm}^2$ **b)** $M = 400\pi\ \text{cm}^2$ ist zu berechnen.

Bemerkung: Für einen gleichseitigen Zylinder gilt: $h = 2r$ (vgl. nebenstehende Figur).



1243. Ein Quadrat, dessen Seitenlänge mit a cm gegeben ist, rotiert um die Seite a. Man berechne **a)** Volumen **b)** Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers!

1244. Ein Rechteck mit den Seitenlängen a cm und b cm rotiert um die Seite a. Das Verhältnis der Zahlenwerte von Volumen (cm^3) und Oberfläche (cm^2) des entstehenden Rotationskörpers ist zu ermitteln!

1245. a) Wie viel kostet der Ölanstrich einer runden Betonsäule von 9 dm Durchmesser und 4,4 m Höhe, wenn $1\ \text{m}^2$ mit 5,80 Euro verrechnet wird?

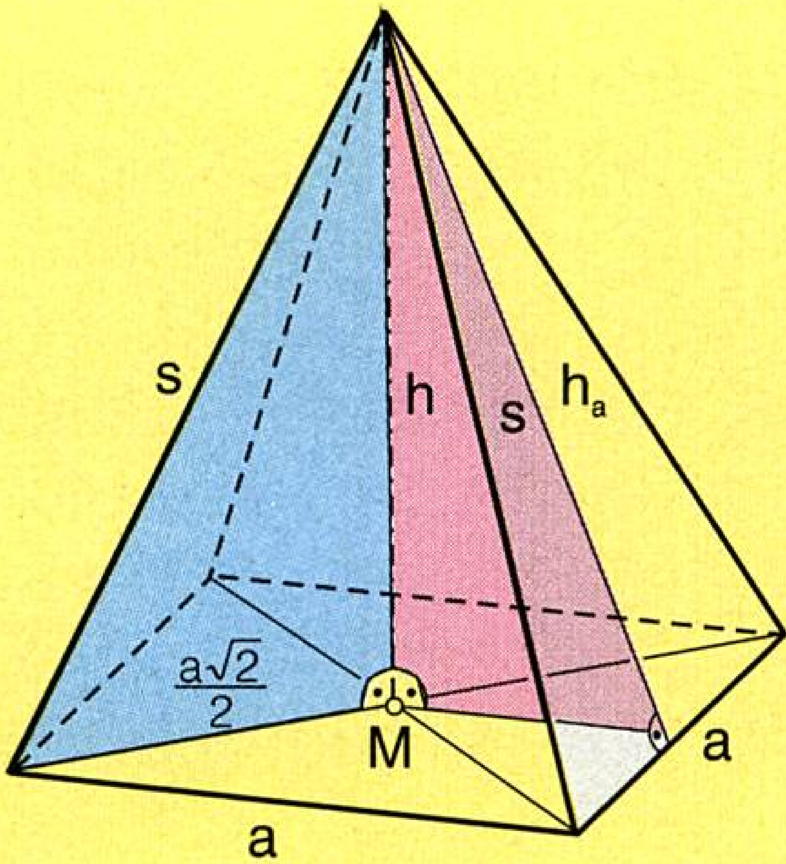
b) Wie groß ist die Masse der Säule, wenn die Dichte von Beton $\rho = 2{,}00\ \text{kg/dm}^3$ beträgt?

Bemerkung: In der Praxis würde sicherlich eine Stahleinlage verwendet. Dies soll aus Gründen der Einfachheit unberücksichtigt bleiben.

1246. In ein zylinderförmiges Gefäß von 10 cm lichter Weite wird 1 l Wasser gegossen. Wie hoch steht die Flüssigkeit im Gefäß?

1247. Gerade quadratische Pyramide

	a	s	h	h_a	V	O
a)	16,8	22,15				
b)	5,6		19,5			
c)	5,8			42,1		
d)	11,2				1631	
e)	20,8					1872
f)		34,82	30			
g)		33,08		28,9		
h)			15	25		



1248. Man ermittle die Seitenlänge a einer geraden quadratischen Pyramide mit der Höhe **a)** h = 8 cm **b)** h = 10 cm, wenn die Zahlenwerte von Volumen (gemessen in cm^3) und Oberfläche (gemessen in cm^2) überein stimmen.

1249. Die Grundfläche einer geraden quadratischen Pyramide mit der Höhe h verhält sich zum Mantel wie 1:8. (1) Oberfläche und (2) Volumen der Pyramide sind für **a)** $h = \sqrt{7}$ cm **b)** h = 1 cm zu berechnen.

1250. In welchem Abstand von der Spitze einer geraden quadratischen Pyramide mit der Grundkante a und der Höhe h muss eine zur Grundfläche parallele Ebene gelegt werden, um die Pyramide in zwei volumsgleiche Teile zu zerlegen? (Welche Angabe ist überflüssig?)
a) a = 15 cm, h = 20 cm **b)** a = 3 cm, h = 5,04 cm.

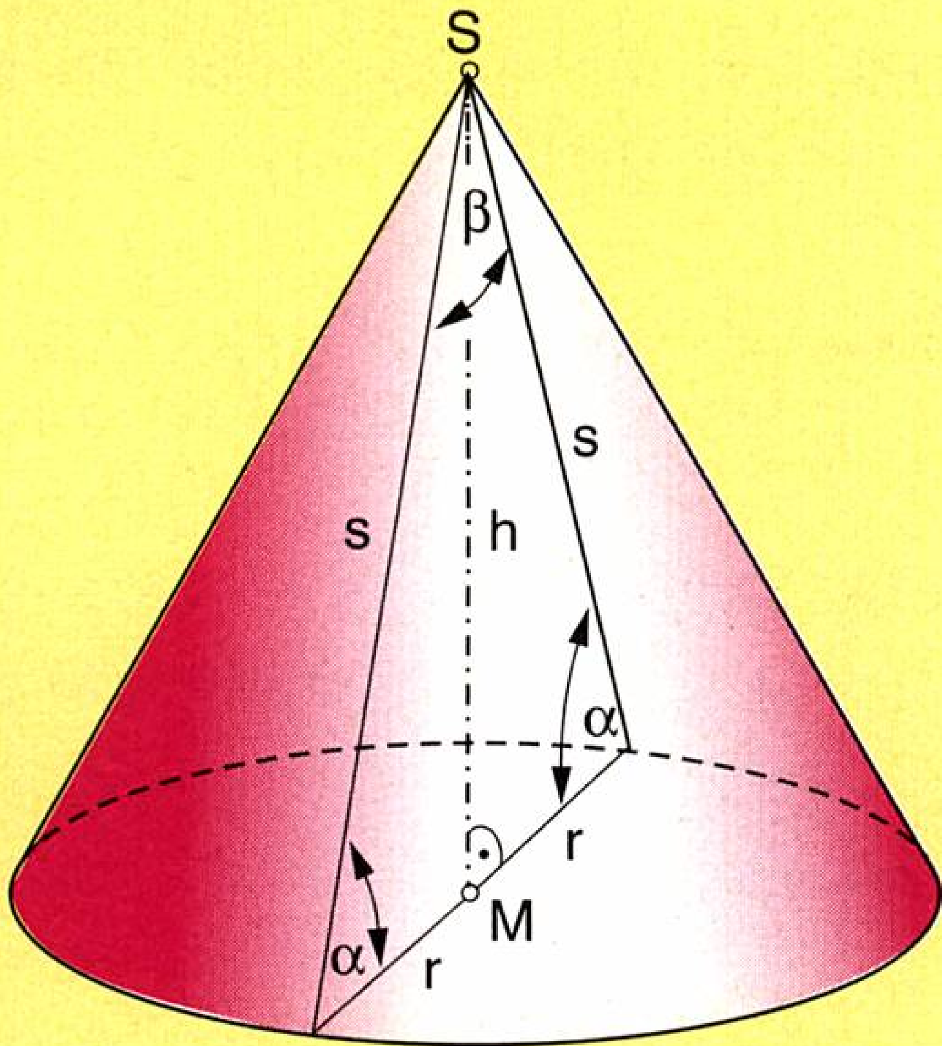
1251. Jede Seitenfläche einer geraden quadratischen Pyramide mit der Höhe **a)** h = 12 cm **b)** h = 100 cm sei so groß wie die Grundfläche. (1) Volumen und (2) Oberfläche der Pyramide sind zu berechnen!

1252. Eine Pyramide hat als Grundfläche ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b. Jede ihrer Seitenkanten ist c lang. In welchem Abstand von der Spitze muss eine zur Grundfläche parallele Ebene gelegt werden, um die Pyramide in zwei volumsgleiche Teile zu zerlegen?
a) a = 10 cm, b = 20 cm, c = 30 cm **b)** a = 7 cm, b = 17 cm, c = 25 cm.

1253. Eine Pyramide wird durch eine zu ihrer Grundfläche parallele Ebene geteilt. Die Höhe wird dadurch in Abschnitte zerlegt, die sich wie **a)** 1:2 **b)** 10:3 verhalten. In welchem Verhältnis steht das Volumen der ganzen Pyramide zum Volumen der über der Ebene liegenden Restpyramide?

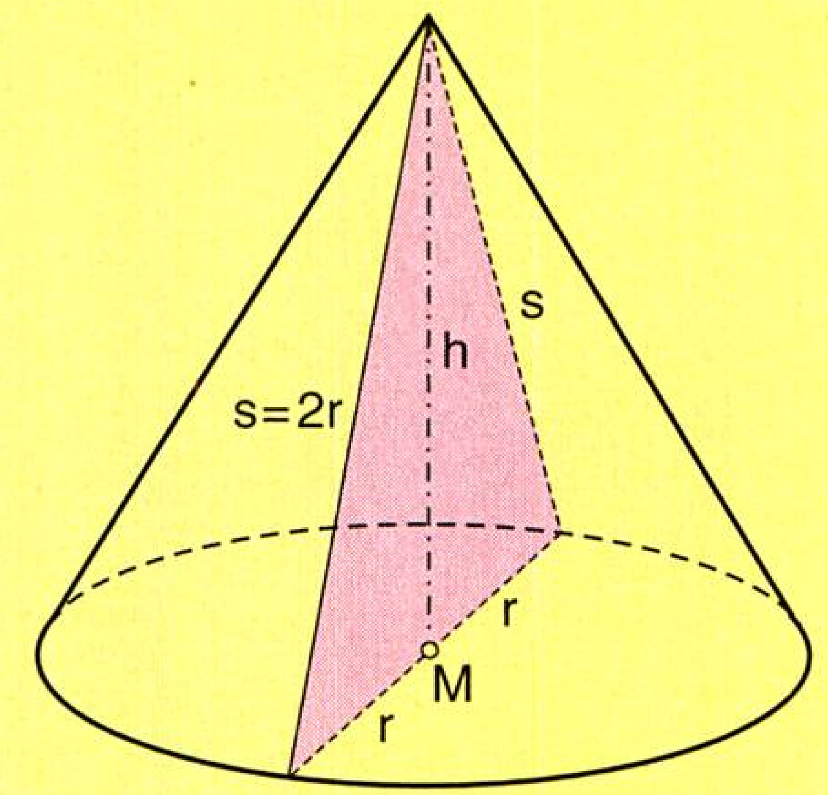
1254. Drehkegel

	r	h	s	M	V	O
a)	21	220				
b)	40		202			
c)	23			6095π		
d)	30				12000π	
e)	80					23040π
f)		168			37856π	
g)			181	3439π		
h)				500π		900π



1255. (1) Oberfläche und (2) Volumen eines gleichseitigen Kegels mit dem Radius **a)** $r = 1\,cm$ **b)** $r = 2\,cm$ sind zu berechnen.

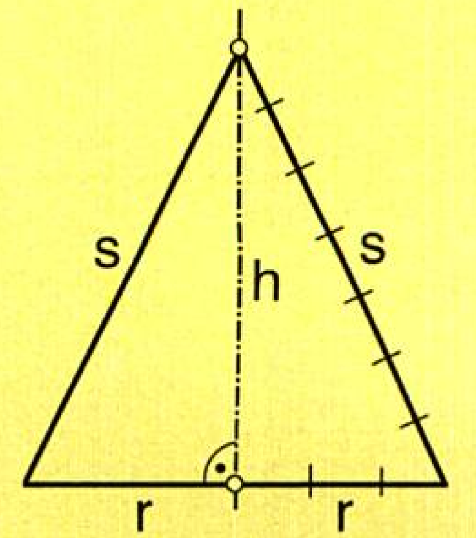
Bemerkung: Für einen gleichseitigen Kegel gilt: $s = 2r$ (vgl. nebenstehende Figur).



1256. Bei welchem Radius r stimmen die Maßzahlen von Volumen und Oberfläche eines gleichseitigen Kegels überein?

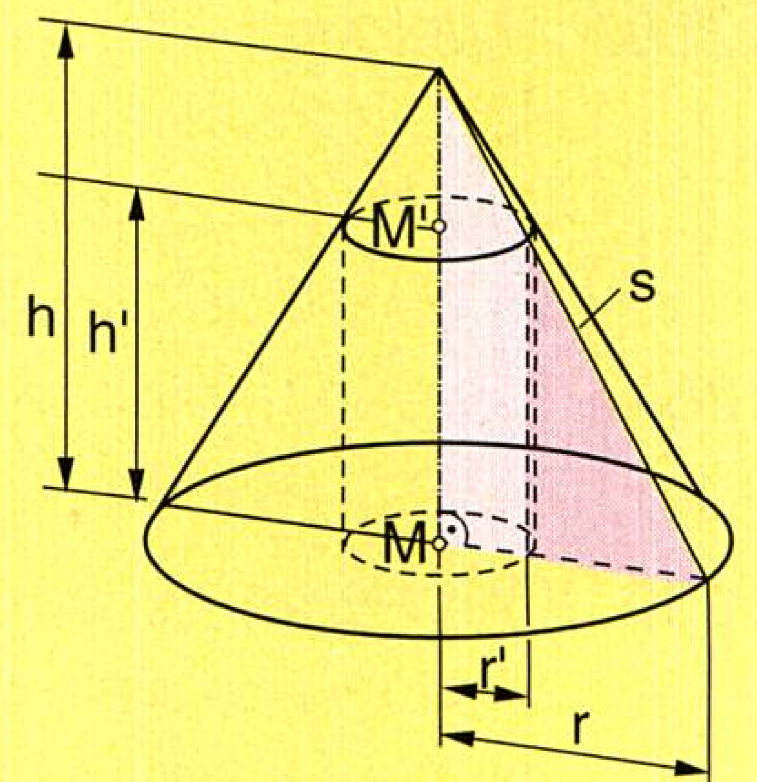
1257. Ein Eisenkegel hat die Masse **a)** 16 kg **b)** 200 kg und eine Höhe von 8 dm. Wie groß ist die Oberfläche des Kegels, wenn die Dichte von Eisen $7{,}8\,kg/dm^3$ beträgt?

1258. Die Oberfläche eines Drehkegels beträgt **a)** $192\pi\,cm^2$ **b)** $300\pi\,cm^2$. Der Radius r verhält sich zur Erzeugenden s wie 3 : 7. Wie groß ist das Volumen V des Drehkegels?

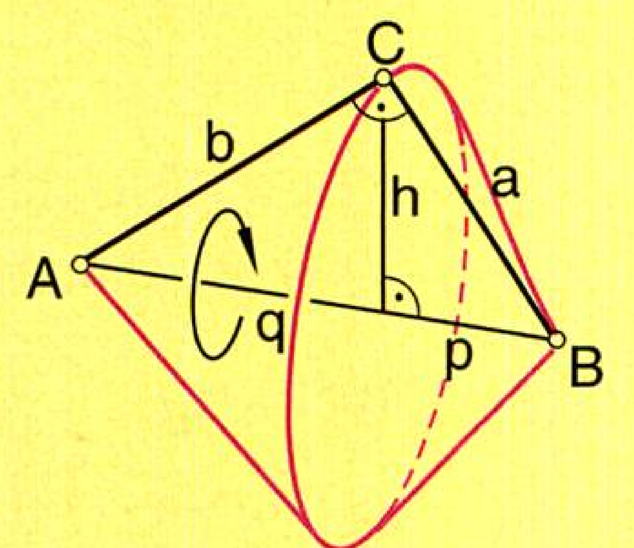


1259. Das Volumen eines Drehkegels beträgt **a)** $81\pi\,cm^3$ **b)** $24\pi\,cm^3$. Der Radius verhält sich zur Höhe h wie 1 : 9. Oberfläche des Drehkegels?

1260. Einem Drehkegel ($r = 13\,cm$, $h = 84\,cm$) ist ein Zylinder mit der Höhe $h' = 21\,cm$ eingeschrieben. Wie verhalten sich **a)** Volumina **b)** Oberflächen der beiden Körper?



1261. Ein rechtwinkeliges Dreieck ($a = 5\,cm$, $h = 4\,cm$) rotiert um die Hypotenuse. Wie groß ist das Volumen des entstehenden Rotationskörpers?

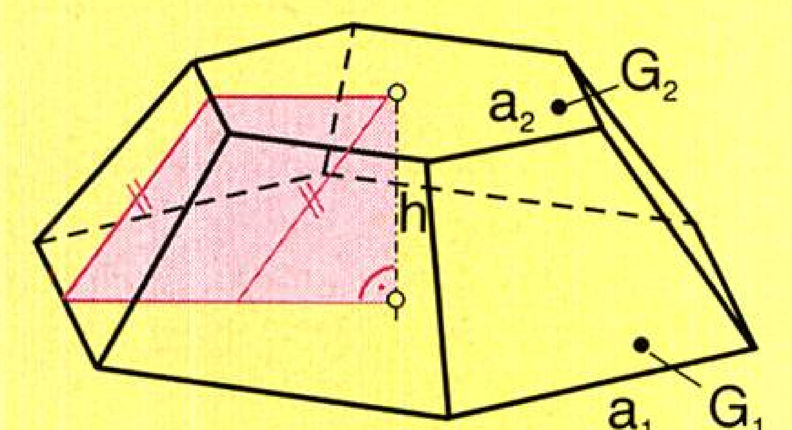


1262. Ein rechtwinkeliges Dreieck ($b = 20\,cm$, $h = 4\,cm$) rotiert um die **a)** Seite a **b)** Seite b **c)** Seite c. Wie groß sind **(1)** Volumen und **(2)** Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers?

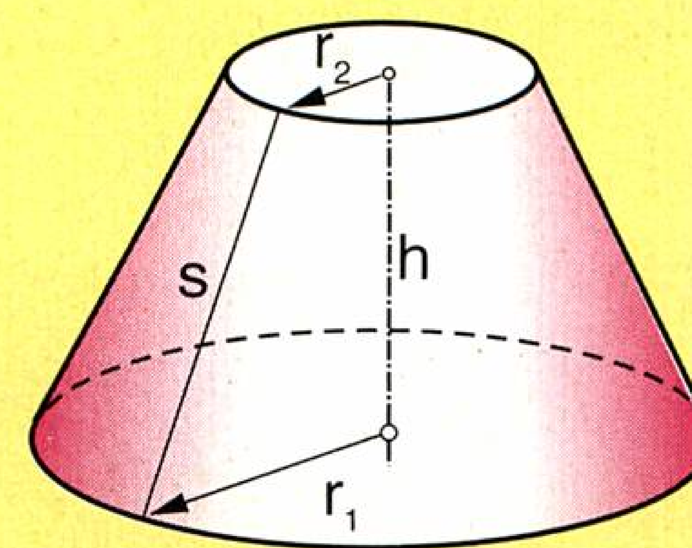
1263. Ein rechtwinkeliges Dreieck ($c = 125\,cm$, $p = 9{,}8\,cm$) rotiert um die **a)** Seite a **b)** Seite b **c)** Seite c. Man berechne **(1)** Volumen und **(2)** Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers!

1264. Ein Dreieck ($a = 24\,cm$, $b = 10\,cm$, $c = 26\,cm$) rotiert um die längste Seite. Wie groß sind **a)** Volumen und **b)** Oberfläche des entstehenden Doppelkegels?

1265. Bei einem $h = 5\,cm$ hohen regelmäßigen **sechsseitigen** Pyramidenstumpf messen die Grundkanten $a_1 = 2{,}2\,dm$ und $a_2 = 1{,}4\,dm$. **a)** Volumen **b)** Oberfläche des Pyramidenstumpfes sind zu berechnen.



1266. a) Volumen **b)** Oberfläche eines geraden Kegelstumpfes ($M = 550\ cm^2$, $r_1 = 15$ cm, $s = 7,5$ cm) sind zu berechnen.



1267. Kugel: **a)** $r = 3$ cm; $O = ?$, $V = ?$ **b)** $O = 324\,\pi\ cm^2$; $r = ?$, $V = ?$ **c)** $V = 4500\,\pi\ cm^3$; $r = ?$ $O = ?$

1268. Wie groß ist **a)** die Erdoberfläche **b)** das Erdvolumen, wenn man die Erde als Kugel auffasst und der Erdumfang mit $u = 40000$ km angenommen wird?

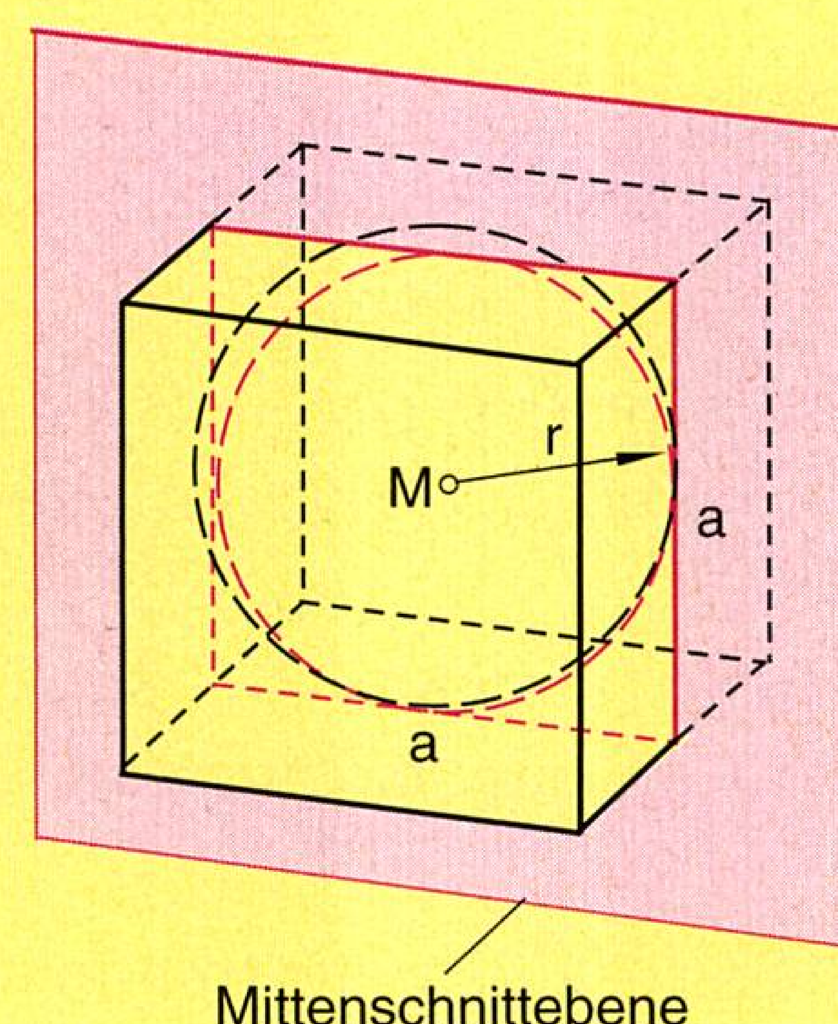
1269. Wie groß ist der Radius einer Eisenkugel von 500 kg Masse, wenn die Dichte von Eisen $7,8\ kg/dm^3$ beträgt?

1270. Wie viele Kugeln von 0,8 cm Radius können aus 30 kg Blei (Dichte: $11,38\ kg/dm^3$) gegossen werden?

1271. Man berechne das Volumen jener Kugel, deren Durchmesser 1,8-mal so groß ist wie der Durchmesser der Kugel vom Volumen $100\ cm^3$!

1272. Wie groß ist der Radius einer Kugel, deren **a)** Oberfläche **b)** Volumen doppelt so groß ist wie jene(s) der Kugel vom Radius $r = 10$ cm?

1273. Aus einem Würfel mit der Kantenlänge **a)** 12 cm **b)** 34,2 cm wird die größte Kugel gedreht. Wie groß ist der Materialabfall?



Vermischte Aufgaben

1274. Die wahren Aussagen sind anzukreuzen:

○ **a)** Der Würfel ist eine Sonderform des Quaders.

○ **b)** Wenn ein Rechteck um eine Seite rotiert, entsteht ein Kegel.

○ **c)** Die Seitenflächen eines Prismas sind Parallelogramme.

○ **d)** Alle Prismen und alle Zylinder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe haben gleiche Volumina.

○ **e)** Ein gerades Prisma hat das selbe Volumen wie ein schiefes, wenn die beiden Prismen in Grundfläche und Höhe überein stimmen.

○ **f)** Pyramiden mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind immer oberflächengleich.

○ **g)** Schneidet eine Ebene eine Kugel, so ist die Schnittfläche ein Kreis.

○ **h)** Körper mit flächengleichem Querschnitt in gleichen Höhen haben gleiche Volumina.

1275. Der fehlende Text ist einzusetzen:

a) Für die Oberfläche eines gleichseitigen Zylinders gilt: O = ...

b) Für das Volumen eines gleichseitigen Kegels gilt: V = ...

c) Die Achsenschnitte von Drehkegeln sind .....

d) Wenn eine Kugel und ein Würfel volumsgleich sind, so hat die Kugel die ..... (größere/kleinere) Oberfläche. (Nachweis?)

e) Pyramiden mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind ..... (immer/niemals/nur in Sonderfällen) volumsgleich.

f) Körper mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind ..... (immer/niemals/nur in Sonderfällen) volumsgleich.

g) Der Abstand der Spitze S von der Grundfläche heißt ..... des Kegels.

h) Der Quader hat ..... (mehr/genau so viele/weniger) Raumdiagonalen wie der Würfel.

1276. Aus einem Bleistab vom Volumen $221{,}35\ cm^3$ wird eine Kugel gegossen. Wie groß ist ihr Radius?

1277. Aus einer Bleikugel vom Volumen $465{,}48\ cm^3$ wird ein Kegel mit der Höhe $h = 6\ cm$ gegossen. Wie groß ist sein Radius?

1278. Wie groß ist der Radius eines Messingzylinders von 1445 kg Masse und 5 dm Höhe, wenn die Dichte des Messings $8{,}5\ kg/dm^3$ beträgt?

1279. Wie groß ist der Radius eines Messingzylinders von 600 kg Masse und 5 dm Höhe, wenn die Dichte des Messings $8{,}5\ kg/dm^3$ beträgt?

1280. Man berechne den Radius jenes Drehzylinders mit der Höhe $h = 5\ cm$, der einer Kugel vom Radius $r = 4{,}5\ cm$ volumsgleich ist!

1281. Das Fassungsvermögen einer zylinderförmigen Konservendose beträgt 1 Liter. Aus Verpackungsgründen soll die Höhe $h = 12\ cm$ sein. Wie viel Blech wird zu ihrer Herstellung benötigt, wenn für Falz und Verschnitt noch 12 % der Oberfläche hinzu gerechnet werden?

1282. Vergrößert man die Höhe eines Drehzylinders — dessen Oberfläche O gegeben ist — um a, so verdoppelt sich die Oberfläche. Das Verhältnis der Volumina ist zu berechnen! **a)** $O = 44\ cm^2$, $a = 7\ cm$ **b)** $O = 88\ cm^2$, $a = 14\ cm$.

1283. Einem Kegel ($r = 7\ cm$, $s = 25\ cm$) wird eine Kugel eingeschrieben. Wie groß ist ihr Radius?

1284. Einem Kegel ($r = 28\ cm$) wird eine Kugel vom Radius $R = 21\ cm$ eingeschrieben. Wie hoch liegt die Spitze des Kegels über seiner Basis?

1285. Eine gerade quadratische Pyramide mit der Basiskante $a = 10\ cm$ und der Höhe $h = 12\ cm$ wird in einer Höhe von 9 cm über der Grundfläche parallel zu dieser durchgeschnitten.

In welchem Verhältnis stehen die **a)** Basiskanten **b)** Oberflächen **c)** Volumina der großen und kleinen Pyramide?

1286. Ein zylinderförmiges Gefäß mit dem Durchmesser 6 cm ist bis zur Höhe 4,5 cm über der Grundfläche mit Wasser gefüllt. Bis zu welcher Höhe steigt der Wasserspiegel, nachdem eine Kugel vom Durchmesser 3 cm in das Gefäß gelegt wird und bis zu dessen Boden absinkt?

1287. Einem Würfel wird eine Kugel ein- und eine zweite Kugel umschrieben.

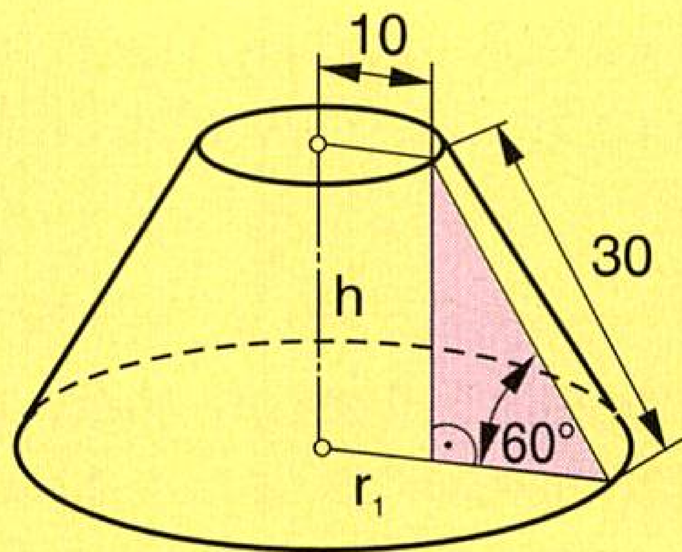
a) In welchem Verhältnis stehen die **(1)** Radien **(2)** Oberflächen **(3)** Volumina beider Kugeln?

b) Wie groß muss die Kantenlänge des Würfels sein, wenn das Volumen der umschreibenden Kugel 8 Liter beträgt?

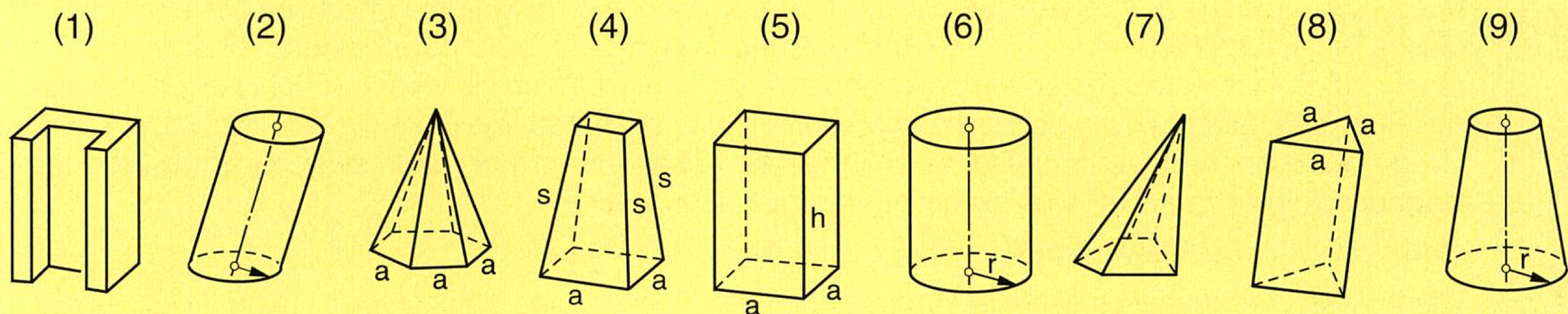
a $a\sqrt{2}$ r_2 r_1 M a

Diagonalschnittebene

1288. Das Volumen und die Oberfläche des in der nebenstehenden Figur bemaßten Kegelstumpfs sind zu berechnen!

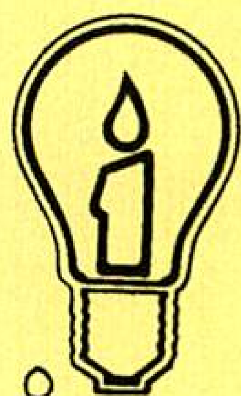


1289. Unter jede Figur sind alle zutreffenden Bezeichnungen zu setzen.
Zur Auswahl stehen folgende Begriffe: gerade, schief, regelmäßig, -seitig, Kreis-, Dreh-, -stumpf, Prisma, Pyramide, Kegel, Zylinder, Quader.



THINK ThInk THINK THINK THINK THINK ThInk THINK ThInk THINK THINK ThInk THINK THINK THINK

THINK ThInk THINK THINK THINK ThInk THINK





1290. Mit Würfel, Oktaeder und Tetraeder haben wir drei von den fünf regelmäßigen Vielflächnern (Polyeder) kennengelernt.

Ein **regelmäßiger Polyeder** ist ein Körper, der von kongruenten regelmäßigen Vielecken, sogenannten Polygonen, begrenzt ist.

Warum gibt es davon nur fünf, nämlich drei mit Dreiecken, eines mit Vierecken und eines mit Fünfecken, jedoch keines mit Sechsecken?

Man bedenke, dass in einer körperlichen Ecke mindestens drei Polygone aneinander grenzen müssen. Bei Dreiecken können dies drei, vier oder fünf sein (warum nicht mehr?), bei Quadraten nur drei (warum?), bei Fünfecken auch nur drei (warum?), und Sechsecke können überhaupt keine Körperecke bilden. Man denke nur an die Bienenwaben!

1291.[1] Es darf gedacht werden...

Wir stellen uns einen Würfel vor. Dieser Würfel soll aber in unserer Vorstellung nicht umher fliegen, pendeln oder rotieren, sondern soll ganz ruhig vor uns (vielleicht auf einem Tisch) stehen. Weiters platzieren wir ihn derart, dass eines seiner **sechs** Quadrate zu uns schaut und somit jede der **acht** Körperecken — von uns aus gesehen — hinten oder vorne, links oder rechts bzw. unten oder oben liegt. Dadurch ist es nun möglich, jede Würfelecke durch drei Koordinaten zu beschreiben. Betrachten wir gleich den Punkt (vorne, links, oben). Von ihm aus ziehen wir auf dem oberen Quadrat eine **Flächendiagonale** zur Ecke (hinten, rechts, oben). Nun wird von diesen zwei Eckpunkten aus jeweils eine Flächendiagonale zur vorderen rechten unteren Ecke gezogen. Auf dem Würfel erscheint somit eine geschlossene Linie in der Form eines **gleichseitigen Dreiecks**.

Jetzt nehmen wir — in Gedanken — eine Säge zur Hand und beginnen langsam, aber sicher, den Würfel (ohne ihn dabei zu verrücken) entlang dieses Dreiecks schräg nach rechts vorne durchzuschneiden. Daraufhin wird unser Würfel in zwei Teile zerfallen. Der obere Teil ist eine dreiseitige regelmäßige Pyramide.

a) Wie groß ist ihr Volumen?

Wie aber sieht der verbliebene Restkörper aus? Nun, zunächst hat er **sieben** Eckpunkte, denn der Schnitt verlief durch **drei** Würfelecken — diese blieben als Ecken erhalten —, ließ **vier** Würfelecken unverändert und entfernte nur die Ecke (vorne, rechts, oben), die jetzt die Spitze der abgeschnittenen Pyramide bildet. Diese Pyramide beachten wir nicht weiter. Der Restkörper hat weiters auf seiner Oberfläche insgesamt **sieben** Vielecke.

b) Um welche Vielecke handelt es sich und wie viele sind es jeweils?

Nun werden die Eckpunkte (vorne, links, oben) und (hinten, rechts, oben) — sie waren unsere zwei Startpunkte — jeweils mit der Ecke (hinten, links, unten) geradlinig verbunden. Dadurch entstehen wiederum zwei Flächendiagonalen — jetzt liegen sie auf dem linken und auf dem hinteren Quadrat —, die zusammen mit der Körperseite, welche die oberen zwei Eckpunkte miteinander verbindet, ein gleichseitiges Dreieck bilden. Entlang dieses Dreiecks zerschneiden wir den Körper erneut in zwei Teile. Der obere kleinere Teil ist wieder eine dreiseitige regelmäßige Pyramide, die zur vorhergehenden kongruent ist. Auch sie wird uns nicht näher interessieren. Infolge des Schnittes haben wir die Eckenanzahl weiter um eins verringert (die Ecke (hinten, links, oben) fehlt jetzt). Unser übrig gebliebener Körper hat also nur mehr **sechs** Ecken: unten **vier**, oben **zwei**. Zwar hat sich die Oberfläche verändert, die Anzahl ihrer Vielecke ist aber immer noch **sieben**.

c) Art der Vielecke? Jeweilige Anzahl der Vielecke?

Wer bis jetzt durchgehalten hat, wird auch den weiteren Überlegungen leicht folgen können! Denn ebenso wie wir die zwei oberen Würfelecken rechts vorne und links hinten abgeschnitten haben, schneiden wir zwei andere Eckpunkte ab: (vorne, links, unten) und (hinten, rechts, unten).

Auf dem unteren Quadrat — das einzige, das noch übrig ist — ziehen wir zunächst die Flächendiagonale zwischen (hinten, links, unten) und (vorne, rechts, unten). Gemeinsam mit von diesen zwei Ecken schräg nach oben verlaufenden Körperkanten bildet diese Diagonale dann zwei weitere gleichseitige Dreiecke:

(hinten, links, unten), (vorne, rechts, unten), (vorne, links, oben) und
(vorne, rechts, unten), (hinten, links, unten), (hinten, rechts, oben).

Erneut tritt unsere imaginäre Säge in Aktion. Wir schneiden entlang des linken vorderen Dreiecks die (zu den anderen zwei kongruente) dreiseitige regelmäßige Pyramide ab. Danach bleibt uns ein fünfeckiger Körper mit insgesamt **sechs** Vielecken erhalten.

d) Um welche Vielecke handelt es sich und wie viele sind es jeweils?

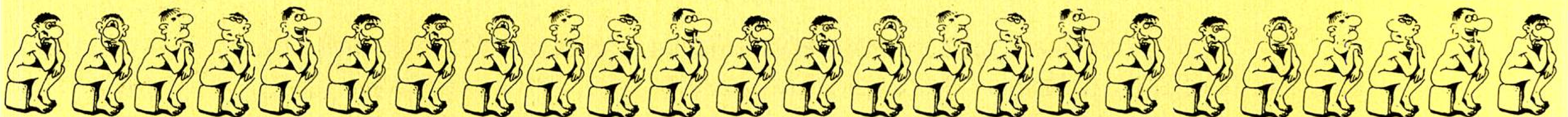
Der endgültig letzte Schnitt entlang des Dreiecks (vorne, rechts, unten), (hinten, links, unten), (hinten, rechts, oben) entfernt die fünfte Körperecke (hinten, rechts, unten) und hinterlässt einen Körper, der eigentlich umfallen müsste, da er nur mehr auf einer Kante — der sechsten und letzten Flächendiagonale, die wir gebildet hatten — balanciert. Oben, auf dem noch nicht umgekippten Restkörper befindet sich eine weitere (zur unteren um 90° verdrehte) Körperkante.

e) Wie viele Ecken und Seitenflächen hat der übriggebliebene Körper?

f) Wie nennt man die einzelnen Seitenflächen?

g) Wie nennt man den übrig gebliebenen Restkörper?

h) In welchem Verhältnis steht sein Volumen zum Volumen des ursprünglichen Würfels?



[1]) Wer dieses Problem ohne Anfertigung einer Zeichnung durchschaut, verfügt über ein hervorragendes räumliches Vorstellungsvermögen!

9. Problemstellungen der Technik

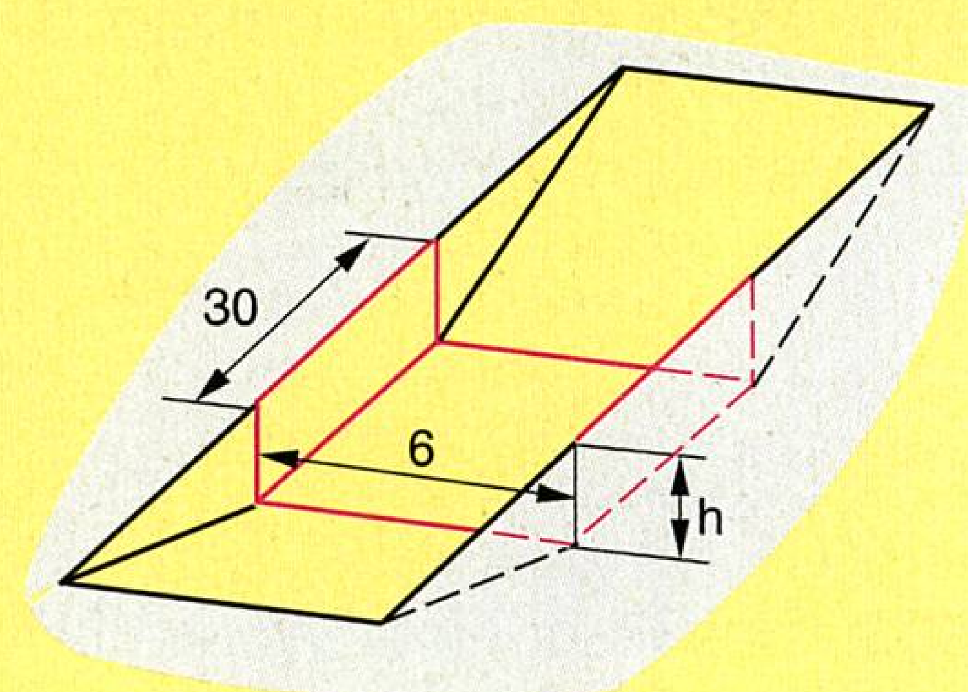
Quader

1292. Ein Behälter von 1,2 m Länge, 0,45 m Breite und 0,9 m Höhe wird mit 67,5 l Härteöl gefüllt! Wie hoch reicht der Ölspiegel?

1293. Bei einem Bauwerk sind 4 Pfeiler vorgesehen. Jeder der Pfeiler hat eine Länge von 1,2 m, eine Breite von 0,3 m und eine Höhe von 5,25 m. Für die Einrüstung benötigt man 350 Steine pro m^3. Nach der Einrüstung sollen die Pfeiler mit Mosaiksteinen belegt werden. Dafür sind 280 Steine pro m^2 erforderlich. Welche Mengen werden benötigt?

1294. Ein quaderförmiger Fahrsilo[1] hat einen Fassungsraum von 540 m^3. Wie groß ist die Innenfläche?

Bemerkung: Bei der Pflege wird die Innenfläche mit einem Schutzanstrich versehen. Die Bemaßungen sind der nebenstehenden Figur zu entnehmen.



1295. In einem Kellerraum (3,9 m × 6,1 m) soll ein Öltank (2,7 m × 4,5 m × 2,1 m) eingebaut werden.

a) Wie hoch über dem Fußboden des Kellerraums muss die Tür mindestens angebracht werden, damit bei einem Auslaufen des Öls der gesamte (maximal mögliche) Tankinhalt im Kellerraum verbleibt?

b) Wie viel Öl verbleibt im Tank?

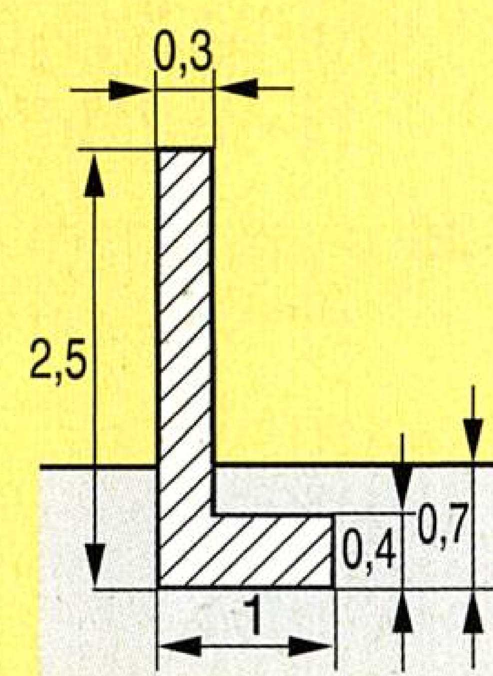
c) Wie viel Öl kann höchstens ausfließen?

Bemerkung: Die Wandstärke des Tanks braucht nicht berücksichtigt werden.

1296. Aus stahlbewehrtem Beton soll eine Stützmauer in L-Form errichtet werden. Länge der Mauer: 18 m; Mauerstärke: 30 cm; Höhe der Mauer: 2,5 m — davon Fundament: Höhe 40 m, Breite 1 m. Es wird eine Grube von 0,7 m Tiefe und 1 m Breite (keine Abböschung!) ausgehoben.

a) Wie groß ist das Volumen des Erdaushubs?

b) Wie groß ist die Masse (in Tonnen) der Stützmauer, wenn eine Dichte von $\rho = 2500\ kg/m^3$ angenommen wird?



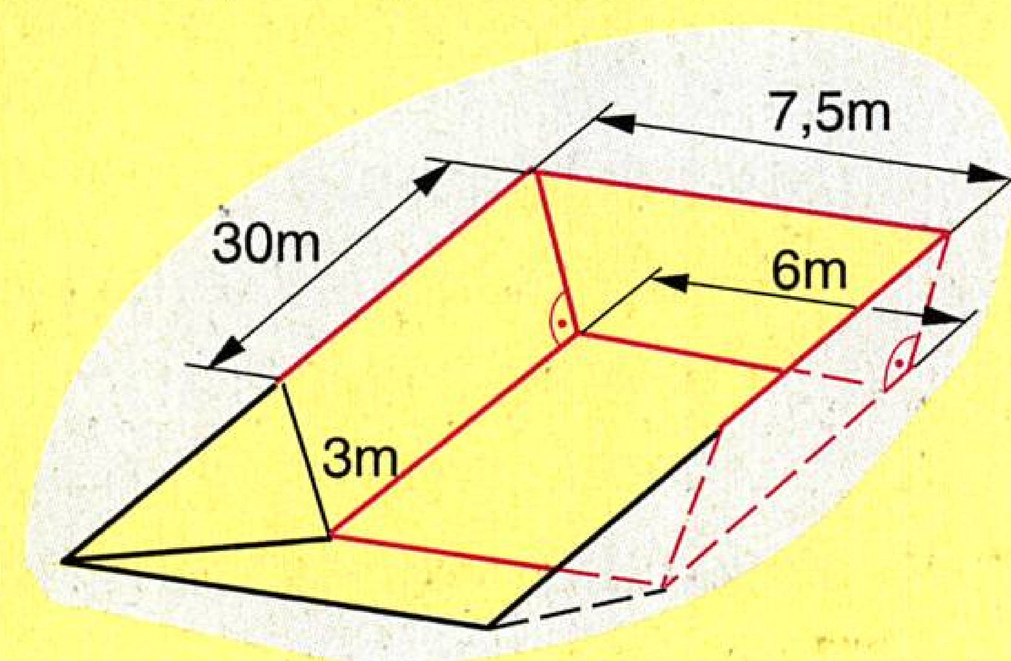
Prisma

1297. Ein Dreikantstahl hat als Querschnitt ein gleichseitiges Dreieck. Die Kantenlänge des Querschnitts beträgt 4,00 cm, das Volumen des Stahls 700 cm^3. Durch Auswalzen soll die Seitenlänge des Querschnitts auf 2,80 cm verringert werden. Die Längen l_1 und l_2 des Dreikants vor und nach der Bearbeitung sind zu berechnen!

1298. Wie groß ist die Höhe eines regelmäßigen sechsseitigen geraden Prismas mit der Oberfläche $O = 80\ cm^2$ und der Grundkante $a = 2$ cm?

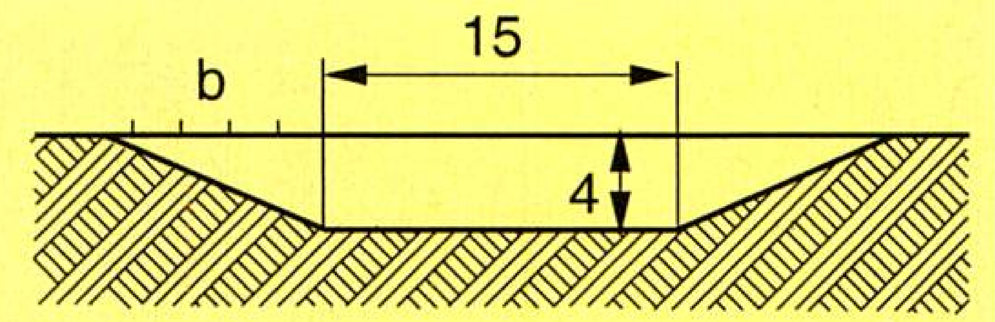
1299. Die Rinne einer Bewässerungsanlage, deren Querschnitt ein gleichschenkelig-rechtwinkeliges Dreieck ist, ist zu $\frac{2}{3}$ mit Wasser gefüllt. Welche Wassermenge kann die Rinne pro Stunde liefern, wenn die Rinne eine Tiefe $s = 54$ cm hat und das Wasser mit einer Geschwindigkeit von $v = 0{,}15$ m/s fließt?

1300. Ein Fahrsilo[1] hat die Form eines liegenden geraden Prismas mit trapezförmigem Querschnitt (vgl. nebenstehende Figur). Fassungsraum V?

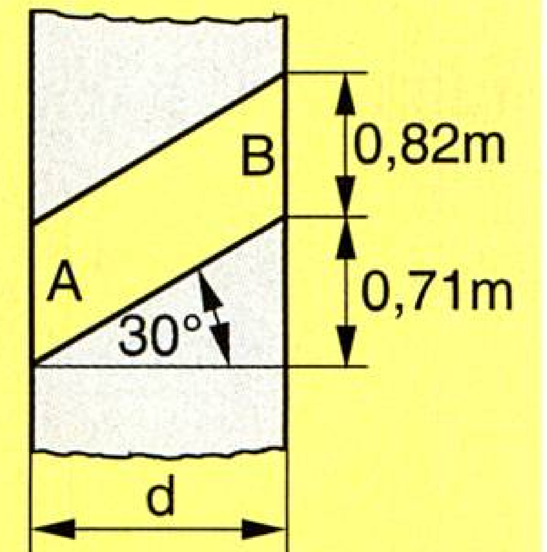


[1] Ein Fahrsilo ist eine in den Erdboden versenkte Betonwanne, die zur Lagerung und Konservierung von Futtermitteln dient und mit landwirtschaftlichen Nutzfahrzeugen befahren werden kann.

1301. Eine quadratische Baugrube (Kantenlänge $a = 15\,m$) wird an zwei gegenüber liegenden Seiten im Verhältnis (Tiefe zu Böschungsbreite) 2 : 5 abgeböscht. Die Baugrube ist 4 m tief. Wie viel Aushubmaterial fällt an?



1302. In eine Mauer ist ein Rutschschacht eingearbeitet, der bei A und B quadratische Öffnungen hat. Die gesamte Wandfläche M (Mantel eines schiefen quadratischen Prismas) ist zu ermitteln!



Drehzylinder

1303. Das Rohr einer Wasserleitung hat einen Innendurchmesser von 250 mm. Wie viel Wasser kann pro Stunde abgezapft werden, wenn das Wasser mit einer Geschwindigkeit von $v = 2\,m/s$ fließt?

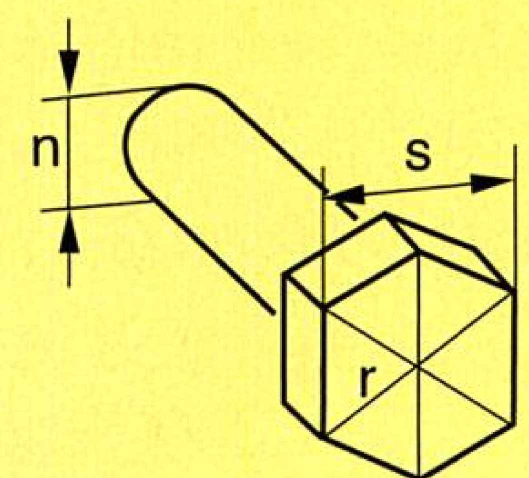
Anleitung: Wenn für $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ gilt, dann fließt im Zeitintervall Δt durch die Querschnittsfläche $(\pi r^2 \Delta s)$ Wasser.

1304. Der Kolben einer einfach wirkenden Kolbenpumpe hat einen Radius $r = 2{,}5\,cm$ und einen Hub $H = 7{,}5\,cm$. Wie viel Wasser kann pro Stunde gefördert werden, wenn die Antriebswelle 450 U/min macht und die Kolbenpumpe einen Wirkungsgrad $\eta = 0{,}88$ cm hat?

1305. Ein Gesenkschmiedestück in Form eines Hohlzylinders soll hergestellt werden. Wie groß ist das Volumen V, wenn der äußere Durchmesser $d_1 = 4\,cm$, der innere Durchmesser $d_2 = 3{,}1\,cm$ und die Höhe $H = 8{,}7\,cm$ beträgt?

1306. Aus einem Sechskantstahl mit 17 mm Schlüsselweite und 60 mm Länge soll ein Schraubenrohling mit 10 mm Nenndurchmesser gedreht werden. Der Schraubenkopf soll 8,0 mm hoch sein. Der Materialabfall ist zu berechnen.

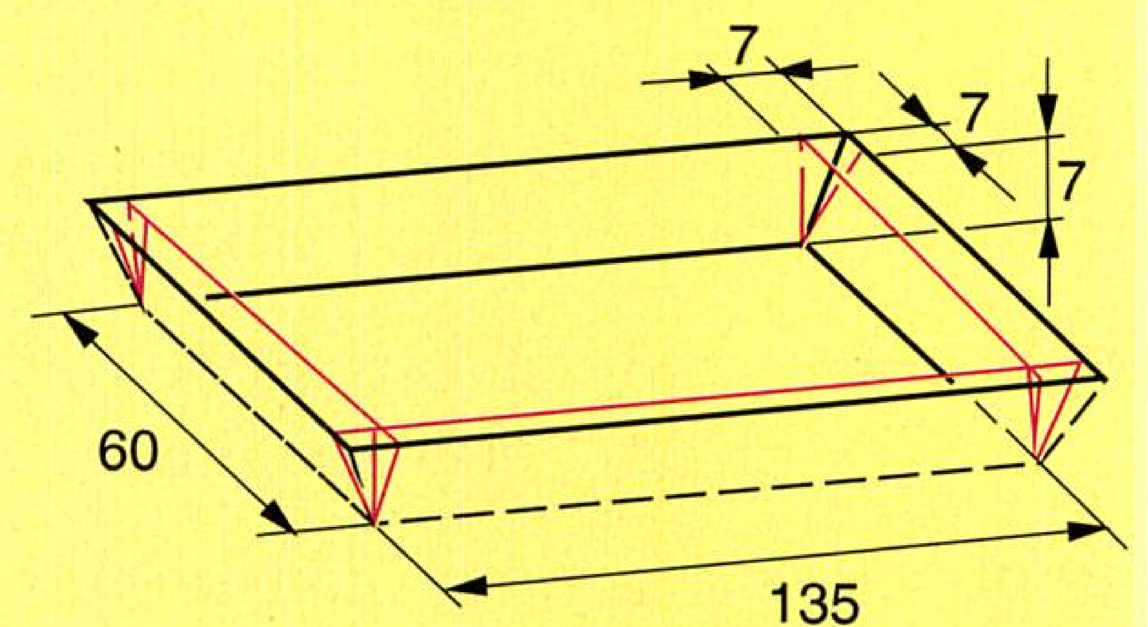
Schraubenrohling: s ..... Schlüsselweite
n ..... Nenndurchmesser



Pyramide

1307. Für ein Bau-Objekt wird eine 60 m mal 135 m große, an den Rändern im Verhältnis 1 : 1 abgeböschte Baugrube 7 m tief ausgehoben. Das gesamte Aushubmaterial (20 % Auflockerung sind anzunehmen) wird mit Kippern abtransportiert, welche ca. $25\,m^3$ Ladekapazität haben. Wie viele Fuhren sind durchzuführen?

Anleitung: Die Baugrube hat die Form eines Quaders. Dieser wird von 4 geraden Prismen umrahmt. Die Ecken haben die Form von schiefen Pyramiden.

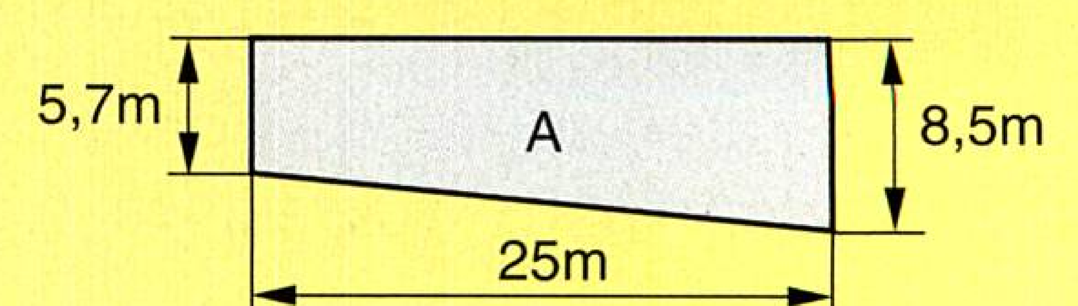


1308. Die Baugrube für ein Einfamilienhaus ist 18 m mal 15 m groß und 3 m tief. Der Rand der Baugrube ist **a)** nicht abgeböscht **b)** rundum unter 45° voll abgeböscht.

(1) Wie viel Erdmaterial (in m^3) fällt an?

(2) Wie hoch kann damit ein Graben mit trapezförmiger Grundfläche (vgl. Figur) aufgefüllt werden?

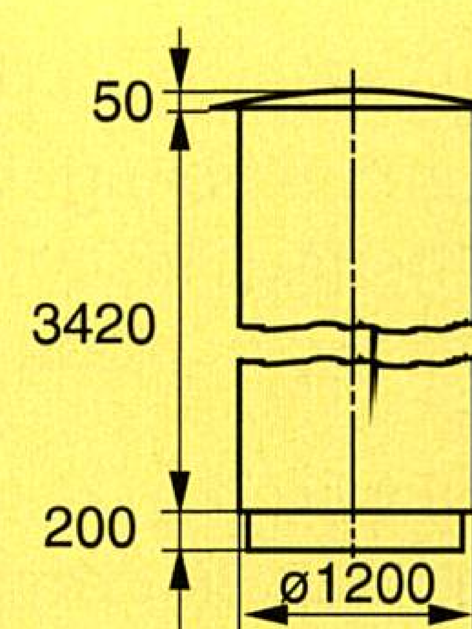
Anleitung: Vgl. Aufgabe 1307.



Kegel und Kegelstumpf

1309. Die LITFASS-Säule[1] zählt zu den beliebtesten Werbeträgern. In regelmäßigen Zeitabständen ist der Anstrich des Regendaches zu erneuern. Wie viel kostet der Anstrich der kegelförmigen Abdeckung, wenn $1\,m^2$ mit 38,50 Euro (Rostbefreiung, Farbgrundierung, Lackierung) verrechnet wird?

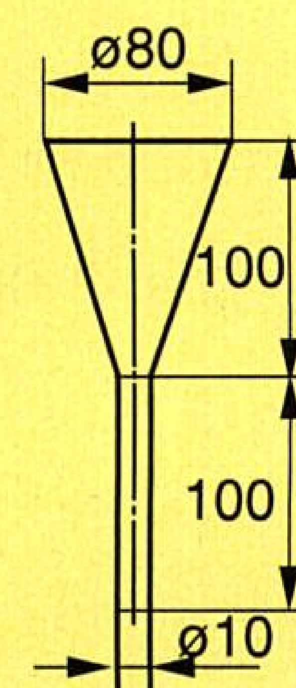
Bemerkung: Die Maße sind der nebenstehenden technischen Zeichnung zu entnehmen, der Überhang ist zu vernachlässigen.



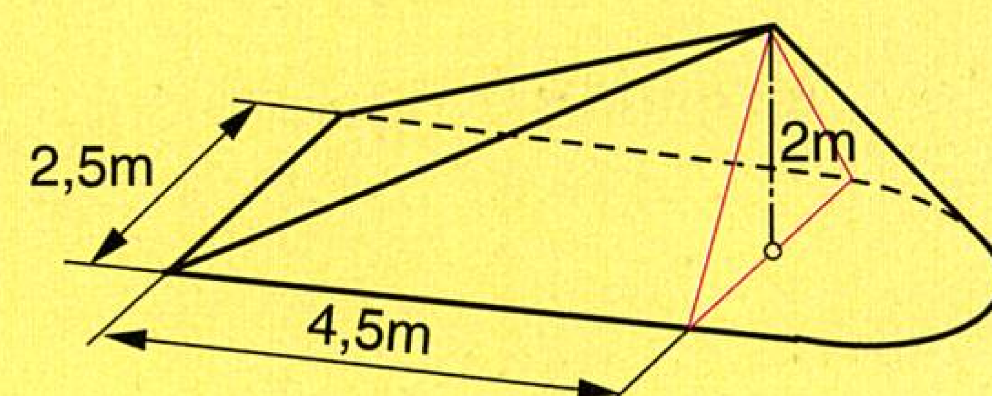


1310. Man berechne **a)** die Mantelfläche M **b)** das Volumen V des Trichters (Maße in mm).

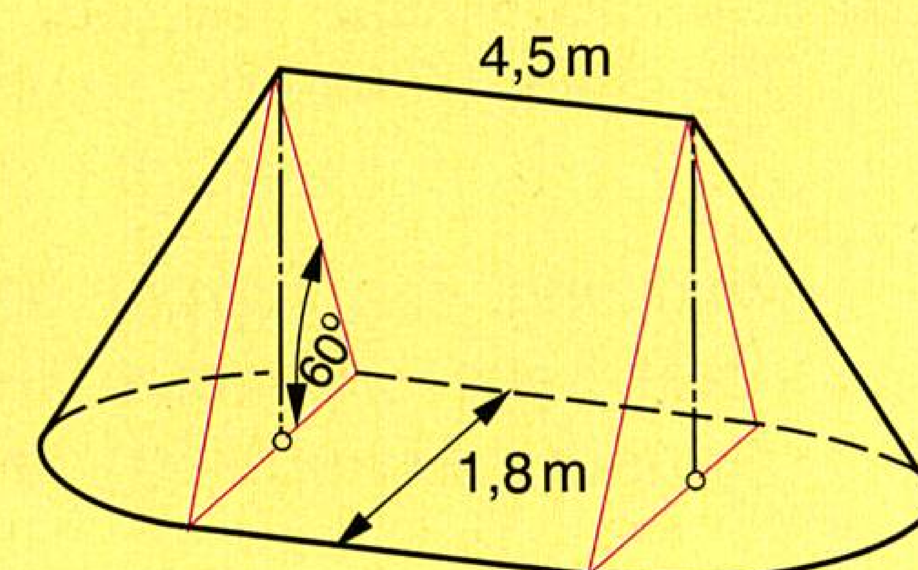
Anleitung: Der Trichter setzt sich aus einem Kegelstumpf und einem Zylinder zusammen.



1311. Das Volumen V des Dachinnenraums der vorgegebenen Figur, die aus einem halben Drehkegel und einer schiefen rechteckigen Pyramide zusammengesetzt ist, ist zu berechnen.



1312. Die Oberfläche O des in der Figur dargestellten Daches ist einschließlich der Grundfläche zu ermitteln!



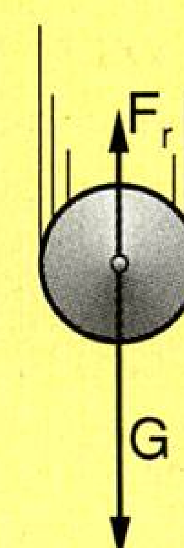
Kugel und Kugelteile

1313. Ein zylindrischer Rohling, der einen Durchmesser von 56 mm hat, soll in eine Kugelform mit einem Durchmesser von 84 mm gepresst werden. Welche Höhe muss der Rohling haben?

1314. Es ist die maximale Geschwindigkeit zu bestimmen, die eine Eisenkugel mit dem Radius $r = 0{,}07$ cm beim freien Fall erreicht, wenn für den Luftwiderstand die Beziehung $F_R = c \cdot A \cdot v^2$ gilt (c.....Zahlenfaktor, A.....Fläche des „Großkreises" der Kugel, v.....Geschwindigkeit). Der Zahlenfaktor c hängt von der Form des Körpers ab und beträgt für eine Kugel $c = 0{,}235\ Ns^2m^{-4}$.

$\rho_{Eisen} = 7{,}87\ kg/dm^3$

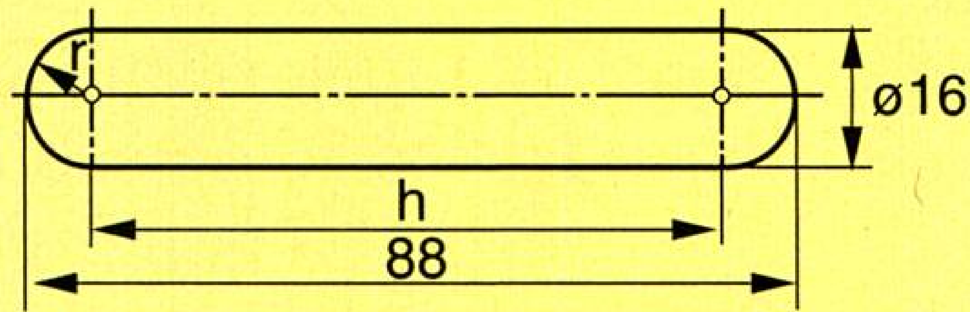
Anleitung: Die maximale Fallgeschwindigkeit ist erreicht, wenn der Luftwiderstand F_R gleich dem Gewicht G ist.



[1]) Ernst LITFASS (1816–1874) hat am 1. Juli 1855 in Berlin eine Anschlagsäule aufgestellt.

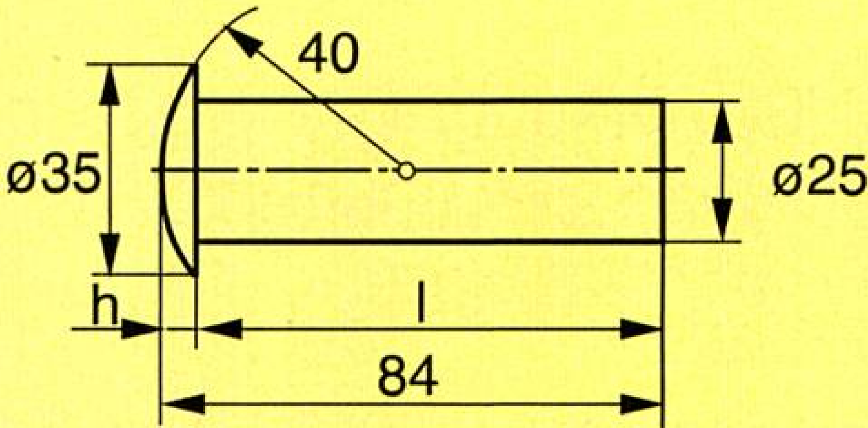
1315. Ein zylindrischer Bottich, dessen lichter Durchmesser 0,9 m und dessen innere Höhe 1,2 m beträgt, soll durch ein halbkugelförmiges Gefäß gleichen Volumens ersetzt werden. Man berechne dessen lichten Durchmesser.

1316. Ein zylindrischer Schwimmer aus Blech mit 16 cm Durchmesser ist an seinen Enden durch halbkugelförmige Böden abgeschlossen. Seine Gesamtlänge beträgt 88 cm. Wie groß ist **a)** die Oberfläche (cm^2) **b)** das Volumen (cm^3) des Schwimmers?



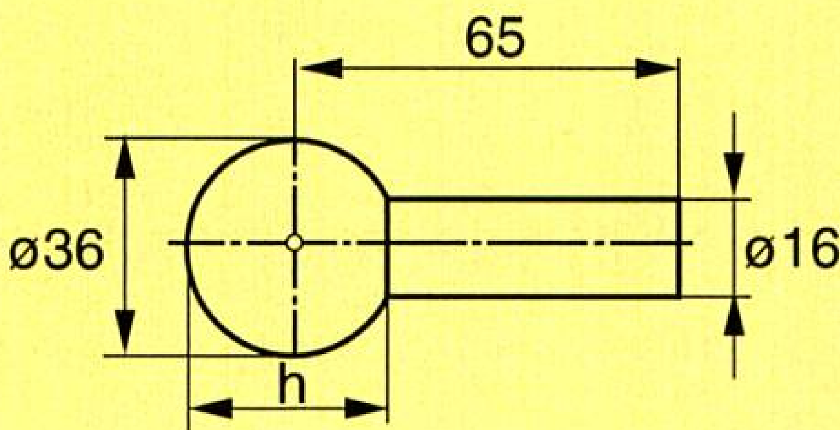
1317. Man berechne die Masse (kg) von 100 Stück Stahlbolzen mit der Dichte $\rho = 7{,}85\ g/cm^3$ (Maße in mm).

Anleitung: Der Kopf des Bolzens ist ein **Kugelsegment**.



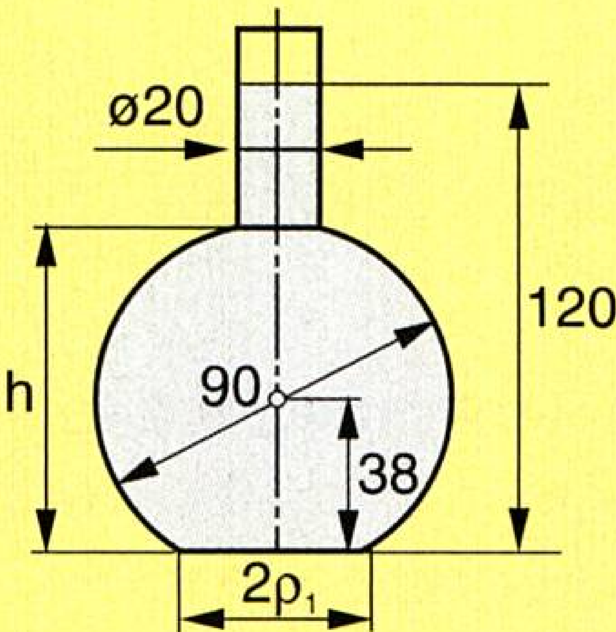
1318. Das Volumen (cm^3) des Handknebels (Maße in mm) ist zu berechnen.

Anleitung: Kugelsegment.



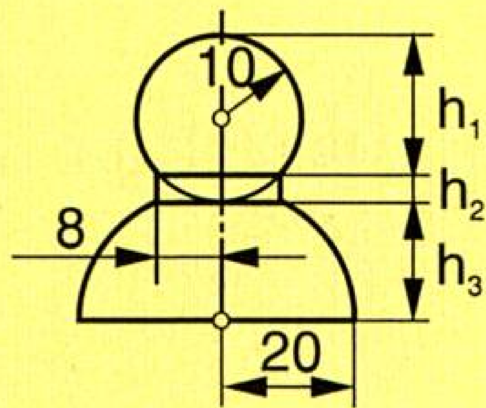
1319. Die Flüssigkeitsmenge (cm^3), die sich in der skizzierten Ballonflasche (Maße in mm) befindet, ist zu ermitteln!

Anleitung: Kugelschicht.



1320. Welche Masse hat der abgebildete Zierstein, wenn seine Dichte $\rho = 2{,}4\ g/cm^3$ beträgt? (Maße in cm)

Anleitung: Der Körper setzt sich von oben nach unten aus Kugelsegment, Zylinder und Kugelschicht zusammen.



Volumen des Kugelsegments

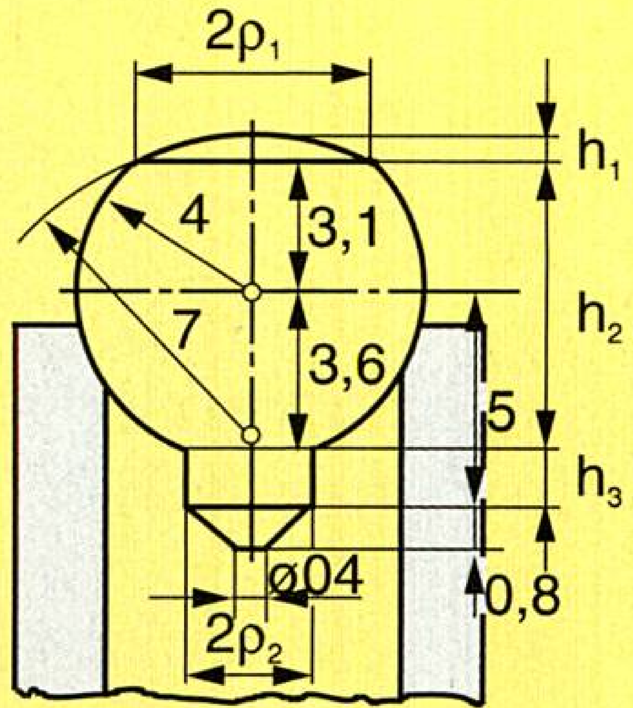
$$V = \frac{\pi h_1^2}{3}(3r - h_1) = \frac{\pi h_1}{6}(3\rho^2 + h_1^2)$$

Volumen der Kugelschicht

$$V = \frac{\pi h}{6}(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + h^2)$$

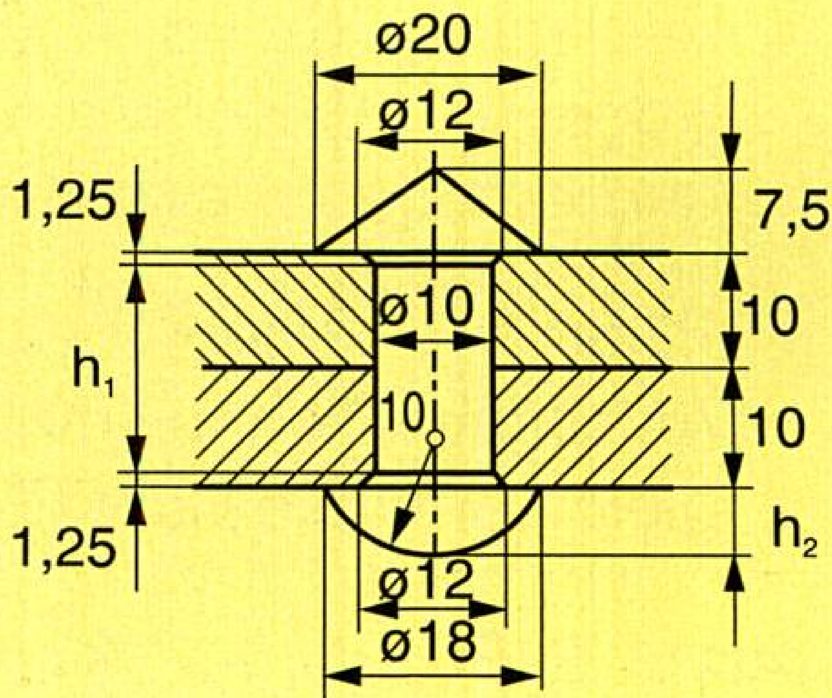
1321. Man berechne den Rauminhalt des skizzierten kugelförmigen Tanks. Zylinder- und Kegelansatz sind mitzurechnen. Die Blechdicke bleibt unberücksichtigt (Maße in m).

Anleitung: Zusammensetzung aus Kugelsegment, Kugelschicht, Zylinder und Kegelstumpf.



1322. Es ist die Masse (g) des Bolzens, der die schraffierten Metallteile zusammen hält, zu bestimmen. Die Dichte des Bolzens beträgt $\rho = 7{,}85\ g/cm^3$ (Maße in mm).

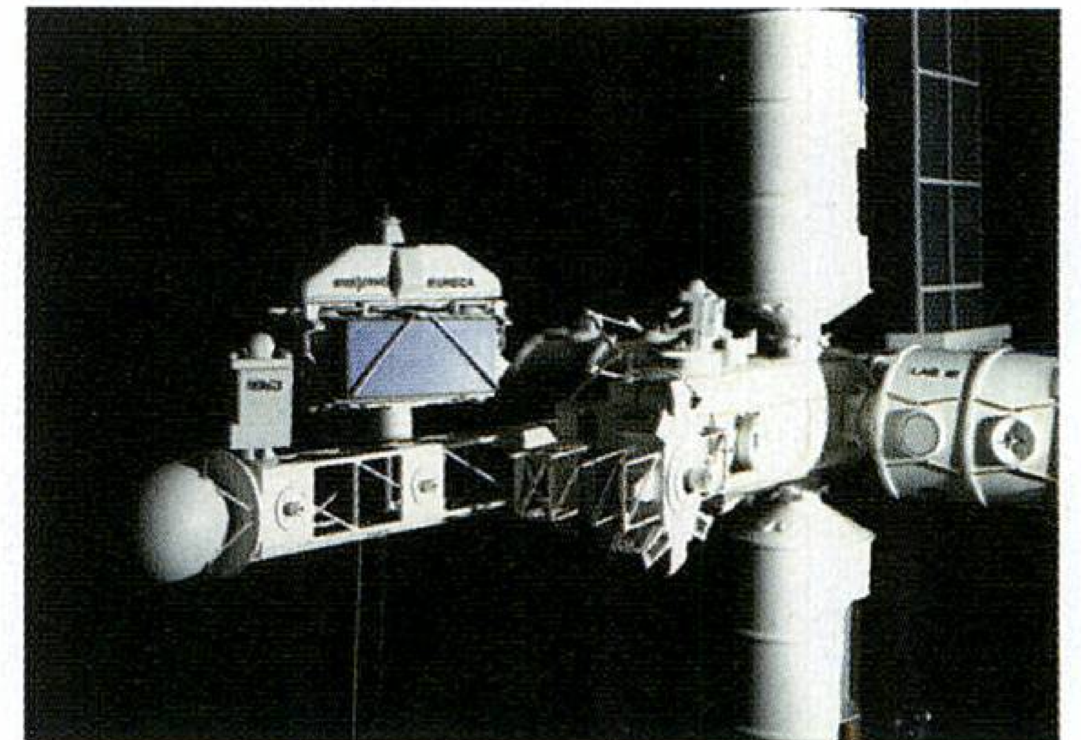
Anleitung: Kegel, Kegelstumpf, Zylinder, Kegelstumpf, Kugelsegment.



VEKTORRECHNUNG

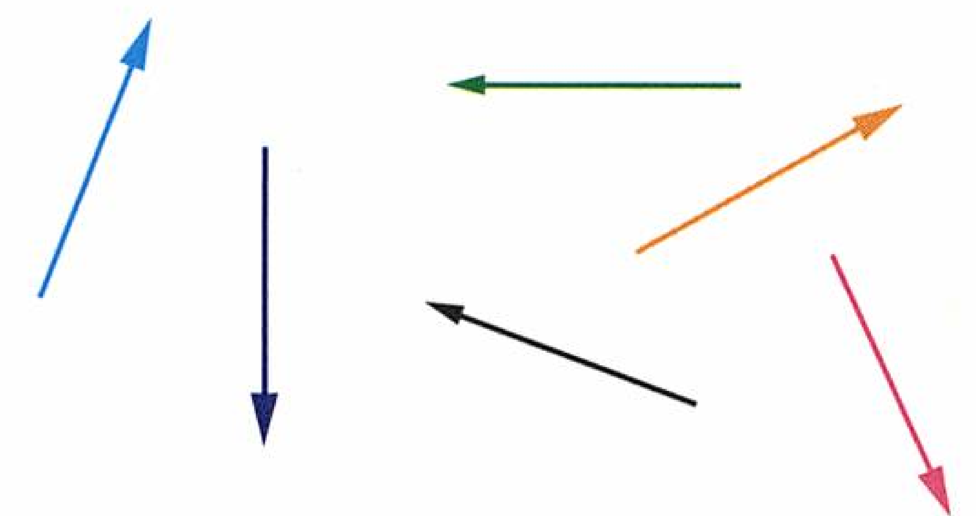
1. Einführung

Zwei Raumschiffe befinden sich bei einem Andockmanöver Hunderte Kilometer über unserem Planeten und sind zunächst weit voneinander entfernt. Sie müssen zum Andocken mit einer Genauigkeit von 5 cm aufeinander zugeführt werden, andernfalls verfehlen einander die Kupplungsmechanismen. Die beiden Raumschiffe sind mit einer Geschwindigkeit von 20 000 km/h unterwegs. Beim Andocken darf sich ihre Relativgeschwindigkeit um nicht mehr als 3 m/s unterscheiden, da sie sonst bersten können. Bildhaft gesprochen müssen die beiden Raumschiffe „verschoben" werden.



Genau genommen wäre es auf Grund der Bewegung der beiden Schiffe im Schwerefeld der Erde falsch, von einem Schiff direkt zum anderen „zu zielen" und Schub zu geben. Es muss „richtig" vorbei gezielt werden. Derartige Manöver im freien, lebensfeindlichen Raum müssen mit großer Präzision durchgeführt werden.

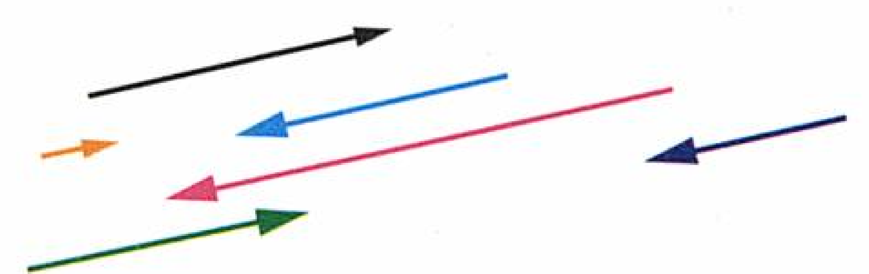
Gleich lange Pfeile:



Wie kann man nun eine „Schiebung" in der Ebene möglichst einfach angeben? Nun: Man braucht nur einen einzigen Schiebungspfeil zu kennen.

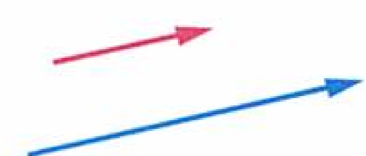
Bei einer Schiebung sind **alle** Pfeile gleich lang, parallel und gleich orientiert.

Parallele Pfeile:



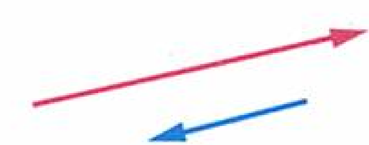
> Die Menge aller zu $\overrightarrow{PP'}$ gleich langen, parallelen und gleich orientierten Pfeile bezeichnet man als den zu $\overrightarrow{PP'}$ gehörigen **Vektor**[1] $\vec{v}$ (gesprochen: v Pfeil). Der Pfeil $\overrightarrow{PP'}$ heißt ein **Repräsentant (Stellvertreter)** des Vektors $\vec{v}$.
> Auch jeder andere parallele Pfeil ist ein Repräsentant des Vektors $\vec{v}$, wenn er die gleiche Länge und Orientierung hat. Der Vektor $\vec{v}$ besteht also aus allen seinen Repräsentanten.

Parallele, gleich orientierte Pfeile:



Genau genommen ist $\vec{v}$ eine Menge von Pfeilen, $\overrightarrow{PP'}$ aber nur ein Pfeil. Statt $\vec{v} = \overrightarrow{PP'}$ müsste man eigentlich Folgendes schreiben: $\vec{v}' = \{\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AB}$ ist „parallelgleich" zu $\overrightarrow{PP'}\}$. Dennoch ist es üblich, $\overrightarrow{PP'}$ zu schreiben, da diese Schreibweise kürzer ist und praktisch nie zu Missverständnissen führen kann. Wir werden deshalb statt „$\overrightarrow{PP'}$ ist Repräsentant des Vektors $\vec{v}$" einfach vom Vektor $\overrightarrow{PP'}$ sprechen.

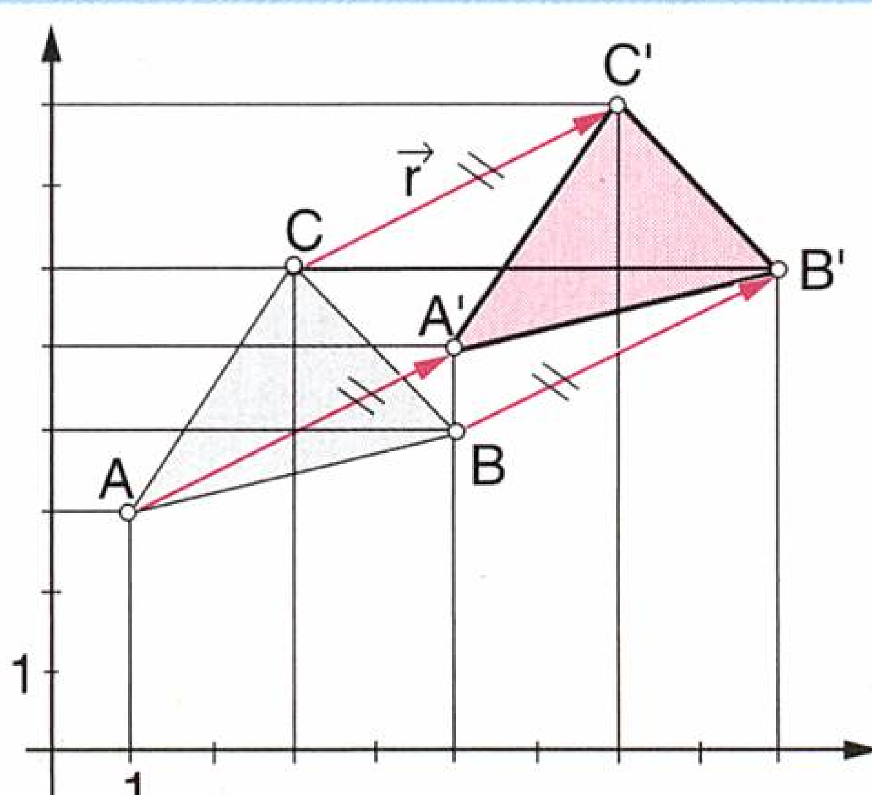
Parallele, verschieden orientierte Pfeile:



Beispiel:

Das Dreieck ABC[A(1, 3), B(5, 4), C(3, 6)] ist um jenen Vektor zu verschieben, der den Punkt C in C′(7, 8) verschiebt.

Lösung:



Konstruktionsbeschreibung:

(1) Zunächst zeichnet man den Vektor $\vec{r}$ von C nach C′.

(2) Dann verschiebt man $\vec{r}$ parallel durch die Punkte A und B.

(3) Die Endpunkte der Vektoren sind in entsprechender Reihenfolge zu verbinden.

---

[1]) vehere (lat.): führen, bewegen, schieben.

Beispiel:
Welche Möglichkeiten haben wir bislang kennen gelernt, um Vektoren von anderen Größen zu unterscheiden? Anders gefragt: Durch welche Schreibweise werden Vektoren charakterisiert?

Lösung:
Wir kennzeichneten Vektoren auf zwei verschiedene Arten:

(1) Anfangs- und Endpunkt eines Vektors wurden hintereinander — und darüber ein Pfeil — geschrieben: $\overrightarrow{PP'}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$, $\overrightarrow{AB}$ usw.

(2) Wir verwendeten Kleinbuchstaben, über die ein Pfeil gesetzt wurde: $\vec{v}$, $\vec{r}$, $\vec{s}$ usw.

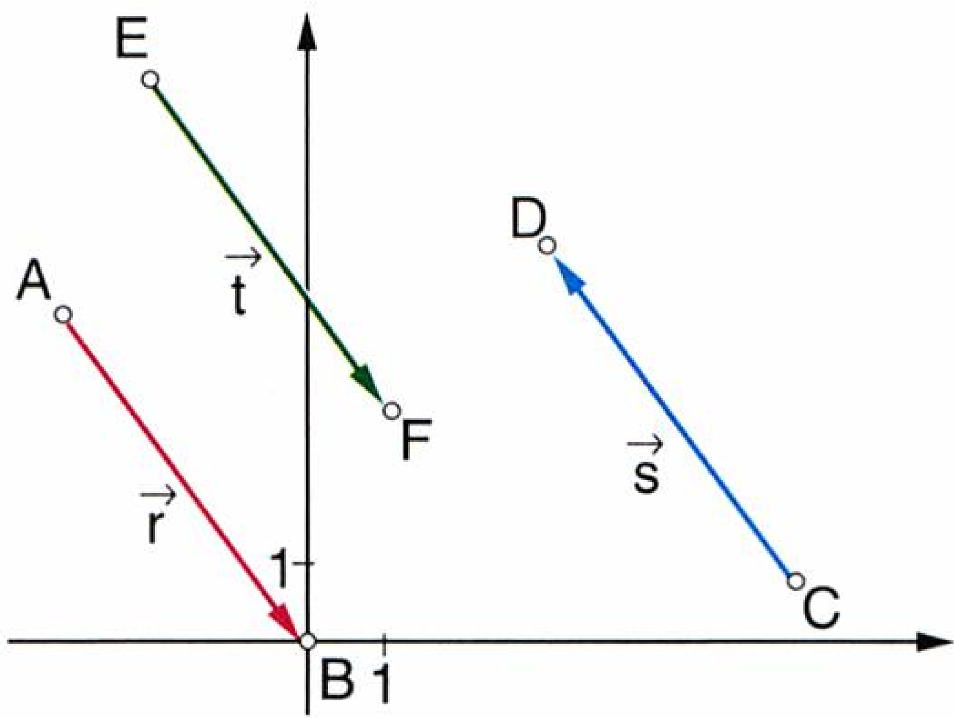
Gleichheit von Vektoren:

Zwei Vektoren sind genau dann gleich, wenn sie die selbe Pfeillänge haben, parallel und gleich orientiert sind.

Ob die Pfeile im Anfangspunkt oder Endpunkt überein stimmen, ist für die Gleichheit der Vektoren unbedeutend.

Beispiel:
Gegeben sind die Punkte A(−3, 4), B(0, 0), C(6, 1), D(3, 5), E(−2, 7) und F(1, 3). Sind die Vektoren **a)** $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{s} = \overrightarrow{CD}$ **b)** $\vec{t} = \overrightarrow{EF}$ und $\vec{r}$ gleich?

Lösung:

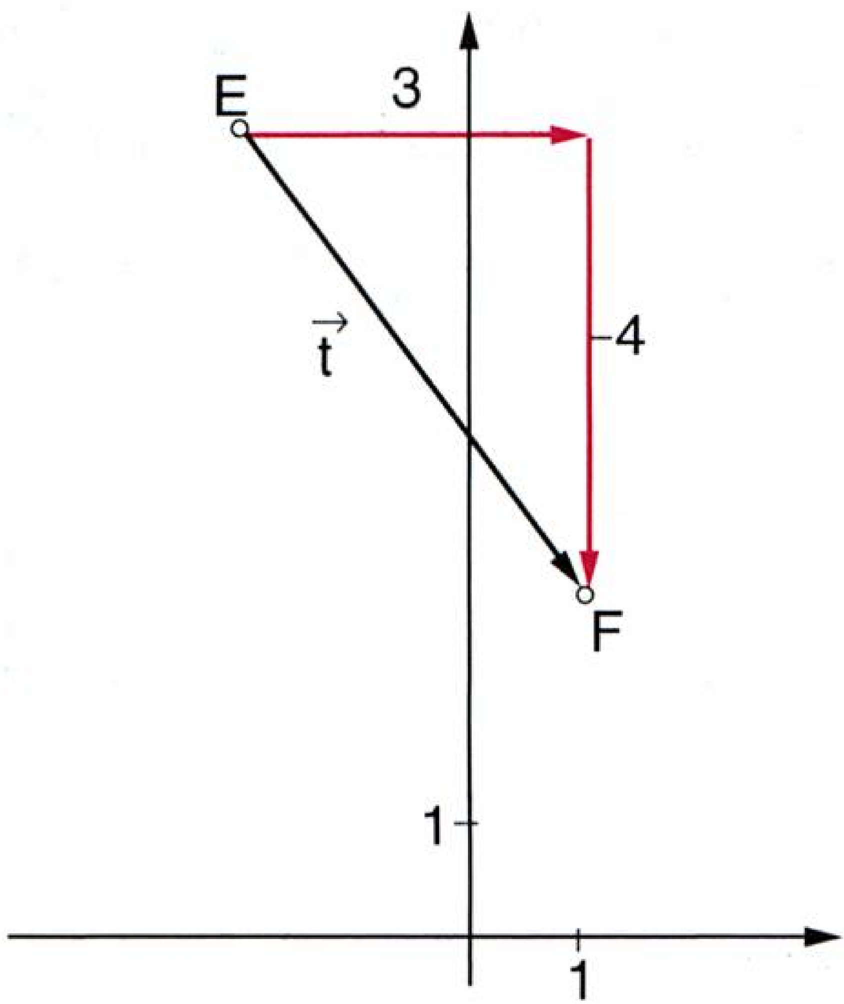


a) $\vec{r}$ und $\vec{s}$ sind gleich lang und parallel zueinander. Die Orientierung ist aber verschieden.

$\Rightarrow \vec{r} \neq \vec{s}$

b) $\vec{t}$ und $\vec{r}$ sind gleich lang, parallel und gleich orientiert.

$\Rightarrow \vec{r} = \vec{t}$

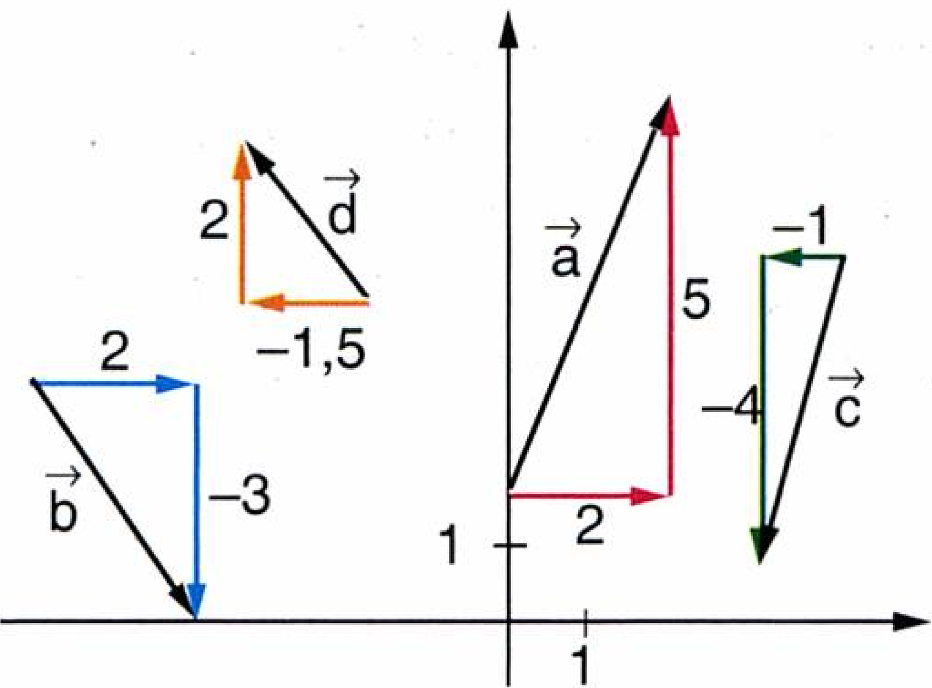


In der Außenspalte wurden in roter Farbe zwei Vektoren gezeichnet, in die $\vec{t}$ zerlegt werden kann: $\vec{x}$ und $\vec{y}$.
$\vec{x}$ ist der Vektor parallel zur x-Achse, $\vec{y}$ der Vektor parallel zur y-Achse.
Wenn man also die x-Koordinate und die y-Koordinate eines Vektors kennt, ist dieser Vektor eindeutig festgelegt. Die x-Koordinate unseres Vektors $\vec{t}$ lautet 3, die y-Koordinate ist − 4. Man schreibt kurz: $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ und spricht von der **Koordinatendarstellung** des Vektors $\vec{t}$.

$\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ heißt: $\vec{t}$ ist eine Schiebung um 3 Längeneinheiten nach rechts und 4 Längeneinheiten nach unten. Schiebungen nach rechts oder oben erhalten also positives Vorzeichen, solche nach links oder unten negatives Vorzeichen.

Beispiel:
Die in Koordinatendarstellung gegebenen Vektoren **a)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind in ein kartesisches Koordinatensystem zu zeichnen.

Lösung:



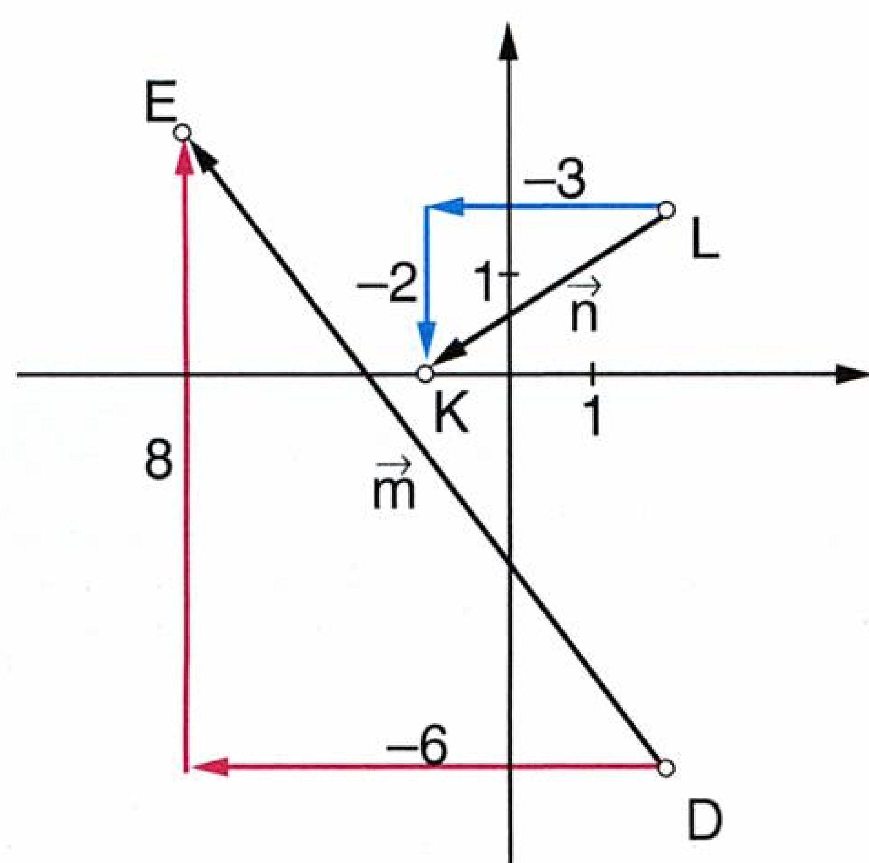
Es ist vollkommen gleichgültig, wo man die Anfangspunkte der Pfeile ansetzt. In unserer Lösung wurden die Anfangspunkte so gewählt, dass die Pfeile einander nicht schneiden und nicht zu viel Platz für die Zeichnung gebraucht wird.

Bemerkung: Man unterscheide die Schreibweisen $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\left(\frac{2}{5}\right)$ voneinander! $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist die Koordinatendarstellung eines Vektors, während $\left(\frac{2}{5}\right)$ nur ein Bruch in einer Klammer und **kein** Vektor ist.

Beispiel:

Gegeben sind die Punkte D(2, −5), E(−4, 3), L(2, 2) und K(−1, 0). Die Vektoren **a)** $\vec{m} = \overrightarrow{DE}$ **b)** $\vec{n} = \overrightarrow{LK}$ sind in Koordinatendarstellung anzugeben.

Lösung:



Wir zeichnen die Vektoren $\vec{m}$ und $\vec{n}$ in ein kartesisches Koordinatensystem und messen die x- und y-Koordinaten ab:

a) $\vec{m} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Das obige Beispiel haben wir grafisch gelöst. Hier nun eine **rechnerische Methode,** um die x- und y-Koordinaten eines Vektors $\overrightarrow{PP'}$ mit $P(x_1, y_1)$ und $P'(x_2, y_2)$ zu ermitteln:[1]

$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Differenz der x- Werte} \\ \text{Differenz der y- Werte} \end{pmatrix}$$

} Kurz: „Spitze minus Schaft"

„Spitze minus Schaft" heißt: Von den Koordinaten des Endpunkts (der Spitze) sind die Koordinaten des Anfangspunkts (des Schafts) zu subtrahieren.

Beispiel:

Gegeben sind die Punkte D(2, −5), E(−4, 3), L(2, 2) und K(−1, 0). Die Koordinatendarstellung der Vektoren **a)** $\vec{m} = \overrightarrow{DE}$ **b)** $\vec{n} = \overrightarrow{LK}$ ist rechnerisch zu ermitteln.

Lösung:

a) $\vec{m} = \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} -4-2 \\ 3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{m} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$

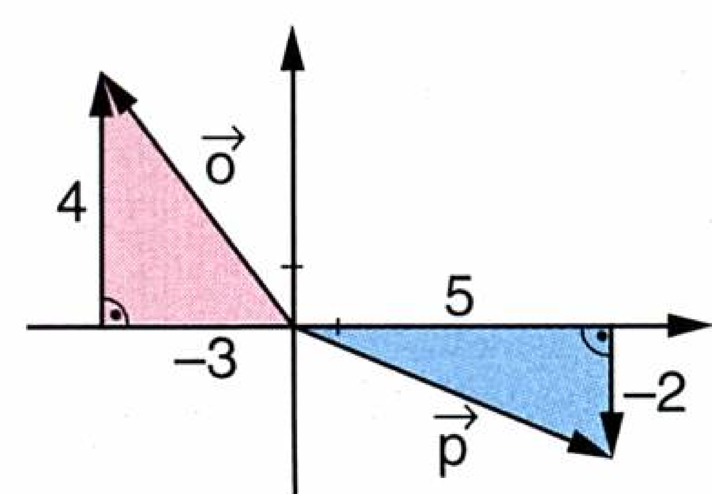
b) $\vec{n} = \overrightarrow{LK} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Beispiel:

Welche Länge haben die Vektoren **a)** $\vec{o} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösung:

Die Längen können abgemessen oder durch Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes berechnet werden:



a) $|\vec{o}| = 5$ (durch Messung)

$|\vec{o}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

b) $|\vec{p}| = 5{,}3$ (durch Messung)

$|\vec{p}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29} = 5{,}4$

Definition:

Unter der **Länge** (dem **Betrag**) eines Vektors versteht man die Länge eines (beliebigen) seiner Repräsentanten.

Statt „Länge von $\vec{v}$" bzw. „Betrag von $\vec{v}$" schreibt man „$|\vec{v}|$".

Im nebenstehenden Beispiel wurden die Anfangspunkte der Vektoren $\vec{o}$ und $\vec{p}$ in den Ursprung gelegt. Solche Vektoren nennt man **Ortsvektoren**.

[1]) Hinsichtlich der Begründung für diese Methode vgl. Aufgabe **1367**.

Beispiel:
Die Distanz (Entfernung) d der Punkte $P_1(3, -6)$ und $P_2(8, 6)$ ist zu berechnen.

Lösung:
Wir berechnen zunächst den Vektor von P_1 nach P_2 und anschließend seinen Betrag:

$\overrightarrow{P_1P_2} = \binom{8-3}{6+6} = \binom{5}{12} \qquad |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13 \qquad \mathbf{d = 13}$

Beispiel:
Ist das Dreieck ABC[A(9, −3), B(−3, 2), C(−3, −3)] gleichschenkelig?

Lösung :
Wir berechnen die Länge aller Seiten und vergleichen, ob irgendwelche Seiten gleich lang sind:

$\overrightarrow{AB} = \binom{-3-9}{2+3} = \binom{-12}{5} \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-12)^2+5^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$

$\overrightarrow{AC} = \binom{-3-9}{-3+3} = \binom{-12}{0} \qquad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-12)^2+0^2} = \sqrt{144} = 12$

$\overrightarrow{BC} = \binom{-3+3}{-3-2} = \binom{0}{-5} \qquad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2+(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

$|\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{AC}|,\ |\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{BC}|,\ |\overrightarrow{AC}| \neq |\overrightarrow{BC}| \Rightarrow$ **Das Dreieck ist nicht gleichschenkelig.**

Beispiel:
Vom Dreieck ABC[A(−8, 13), B(−2, −4), C(8, 2)] wurde der Umfang u ermittelt:

(1) $\overrightarrow{AB} = \binom{-2-8}{-4-13} = \binom{-10}{-17} \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-10)^2+(17)^2} = \sqrt{100+289} = \sqrt{389} = 19{,}72$

(2) $\overrightarrow{AC} = \binom{8+8}{2-13} = \binom{16}{-11} \qquad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16^2+(-11)^2} = \sqrt{256+121} = \sqrt{377} = 19{,}41$

(3) $\overrightarrow{BC} = \binom{8+2}{2-4} = \binom{10}{-2} \qquad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{10^2+(-2)^2} = \sqrt{100+4} = \sqrt{104} = 10{,}2$

u = 49,33

Ist das richtig?

Lösung:
In der obigen Berechnung stecken folgende Fehler:

(1) Vorzeichenfehler! $\qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2+(-17)^2} = \sqrt{36+289} = \sqrt{325} = 18{,}03$

(2) Rundungsfehler! $\qquad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16^2+(-11)^2} = \sqrt{256+121} = \sqrt{377} = 19{,}42$

(3) Vorzeichenfehler! $\qquad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{10^2+6^2} = \sqrt{100+36} = \sqrt{136} = 11{,}66$

u = 49,11

Wie das letzte Beispiel zeigt, können sich mitunter Fehler teilweise gegenseitig aufheben, sodass sich der falsche Wert nur geringfügig vom richtigen unterscheidet. Auch bei einer kleinen Abweichung des eigenen Ergebnisses vom Resultat im Lösungsheft sollte man kritisch sein!

2. Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl, Nullvektor

Vektoren sind durch ihre Richtung und Länge charakterisiert. Der Wind ist durch seine Richtung und Windstärke gekennzeichnet. „Die Windstärke hat sich heute Vormittag verdreifacht, die Richtung ist gleich geblieben", diesen Satz kann man mit Vektoren wie folgt veranschaulichen:

Vektoren $\vec{v}$ kann man mit reellen Zahlen multiplizieren. Der Vektor $\lambda\vec{v}$ hat als Repräsentanten Pfeile mit gleicher Richtung und λ-facher Länge.

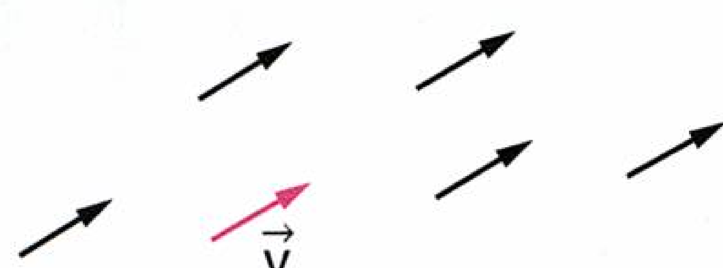
Berechnung:

Multiplikation der Koordinaten des Vektors mit der reellen Zahl.

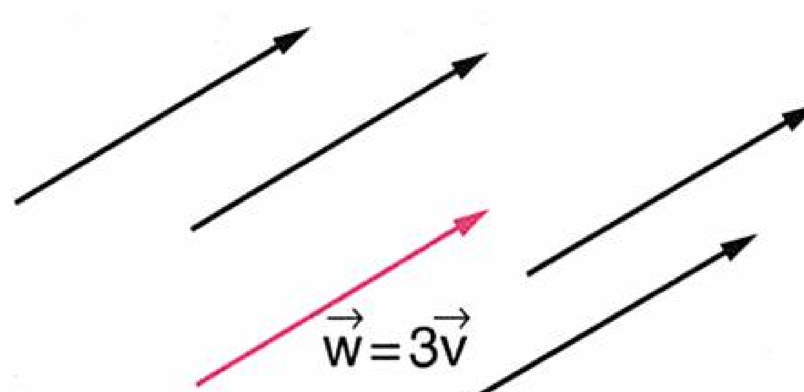
$$c\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\cdot a_x\\c\cdot a_y\end{pmatrix}$$

z. B.: $3\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\9\end{pmatrix}$

Ursprüngliche Windstärke



Dreifache Windstärke



Bei der Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl c ändert sich der Betrag. ($c \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$)

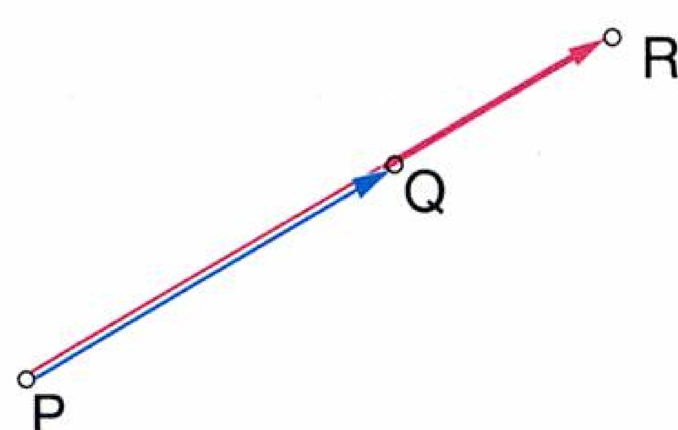
Beispiel:

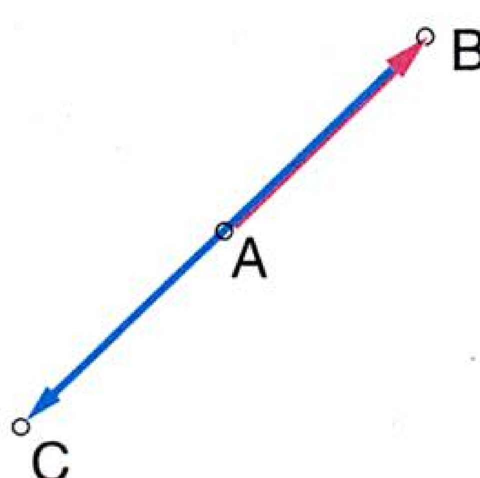
Aus den nachstehenden Vektoren ist so „herauszuheben", dass die Koordinaten möglichst einfach, d. h. „bruchfrei" werden:

a) $\vec{u}=\begin{pmatrix}5\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{v}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{7}\\1\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{w}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\vec{u}=\begin{pmatrix}5\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}15\\2\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{v}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{7}\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{w}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}=\frac{2}{15}\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$





Multipliziert man einen Vektor mit einer negativen reellen Zahl, dann dreht sich der Pfeil um, d. h. die Orientierung des Vektors ändert sich.

Unter dem Vektor $-\vec{v}$ versteht man den Vektor $(-1)\vec{v}$, also den Vektor, dessen Repräsentanten zwar gleiche Länge wie die Repräsentanten von $\vec{v}$ haben, aber entgegen gesetzte Orientierung. $-\vec{v}$ heißt der zu $\vec{v}$ **inverse Vektor**.

$$-\vec{v}=(-1)\vec{v}$$
$$|-\vec{v}|=|\vec{v}|$$

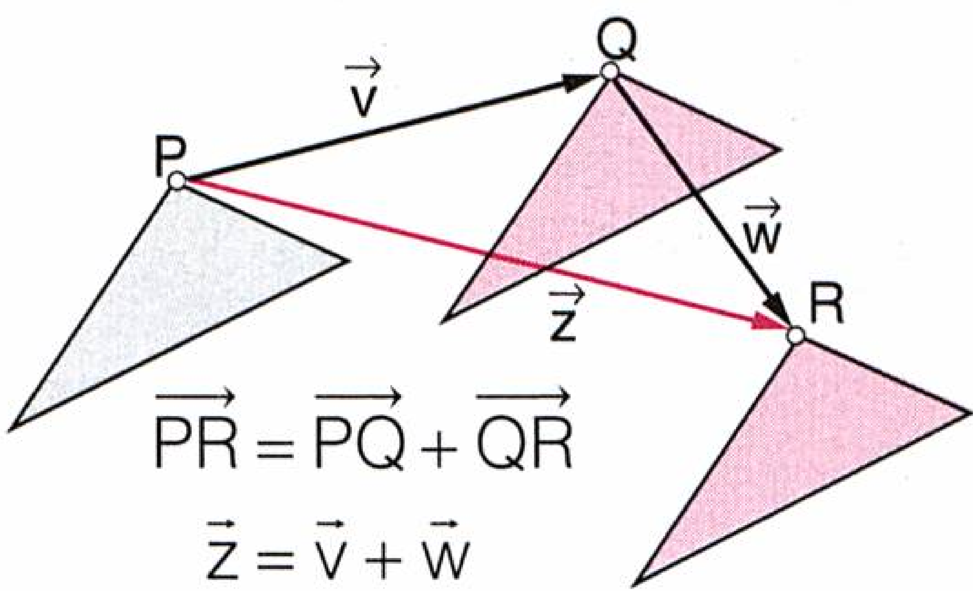
Im Sinne der bisherigen Ausführungen kann man einen Vektor $\vec{v}$ auch mit der Zahl $\lambda = 0$ multiplizieren: $\vec{o} = 0\cdot\vec{v}$. Das Ergebnis muss demzufolge ein Vektor sein, dessen Repräsentanten die 0-fache Länge von $\vec{v}$ haben, also $|\vec{o}| = 0\cdot|\vec{v}| = 0$. Die Repräsentanten von $\vec{o}$ sind somit Punkte („ausgeartete Pfeile der Länge Null"). $\vec{o}$ heißt der **Nullvektor**. Der Nullvektor $\vec{o}$ ist von der Zahl 0 zu unterscheiden!

Nullvektor:

$$0\cdot\vec{v}=\vec{o}$$
$$|\vec{o}|=0$$

3. Addition von Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ werden grafisch addiert, indem man den Anfangspunkt von $\vec{v}$ mit dem Endpunkt von $\vec{w}$ verbindet, wobei die Spitze des Vektors $\vec{v}$ der Anfangspunkt von $\vec{w}$ ist.



Die beiden Schiebungen um $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ und um $\vec{w} = \overrightarrow{QR}$ werden durch die einzige Schiebung um den Vektor $\vec{z} = \overrightarrow{PR}$ ersetzt. Man nennt $\vec{z}$ die „Summe" der zu den Pfeilen $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{QR}$ gehörigen Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ und schreibt $\vec{z} = \vec{v} + \vec{w}$.

Beispiel:

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ sind grafisch und rechnerisch zu addieren.

Lösung:

Die Vektoren werden in einer „Pfeilkette" gezeichnet. Dann verbindet man den Anfangspunkt des ersten Vektors mit dem Endpunkt des letzten Vektors.

Die Koordinaten des Summenvektors erhält man rechnerisch durch entsprechende Addition: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+5 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die nebenstehende Figur zeigt die beim Zusammenfließen zweier Flüsse entstehende neue Strömung.

Dabei setzen wir der Einfachheit halber voraus, dass die Strömung an allen Punkten gleich verläuft, also z. B. ohne Reibung am Ufer usw.

Nach dem gleichen Prinzip kann man auch **Kräfte** addieren, die beide an einem Punkt angreifen. Die nebenstehende Figur zeigt das sogenannte **Kräfteparallelogramm**: $\overrightarrow{PR}$ und $\overrightarrow{QS}$ sind Repräsentanten des Vektors $\vec{a}$, $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{RS}$ sind Repräsentanten des Vektors $\vec{b}$.

$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stellen Kräfte dar, die gleichzeitig am Punkt P angreifen. Die daraus resultierende Kraft wird durch den Summenvektor $\vec{c}$ veranschaulicht: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Beispiel:

Um eine Last (vgl. Figur) zu halten, ist eine Kraft von $\vec{F} = 200\,\text{N}$ aufzuwenden. Wie schwer ist die Last und mit welcher Kraft $\vec{R}$ wird der Stab, der die Rolle hält, (in Stabrichtung) gedrückt?

Bemerkung: Last und Gegenkraft werden durch die Vektoren $\vec{L}$ und $\vec{F}$ dargestellt. Für deren Beträge $|\vec{L}|$ und $|\vec{F}|$ schreiben wir einfach L und F. $\vec{L}$ und $\vec{F}$ sind also Vektoren, L und F sind hingegen reelle Zahlen.

Lösung:

Da $\alpha = 45°$ und $|\vec{F}| = |\vec{L}|$ ist, wirkt $\vec{R}$ in Stabrichtung, also gilt: $\vec{R} = \vec{F} + \vec{L}$

$\Rightarrow R^2 = F^2 + L^2 = F^2 + F^2 = 2F^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R = F\sqrt{2} = 283\,\text{N}$ $\qquad$ **R = 283 N**

Beispiel:

Ein Sportflugzeug mit der Eigengeschwindigkeit $v_1 = 240$ km/h wird nach Norden gesteuert. Wie schnell über Boden und in welche Richtung fliegt es, wenn ein Nordost-Sturm mit einer Geschwindigkeit von $v_2 = 90$ km/h herrscht?

Lösung:

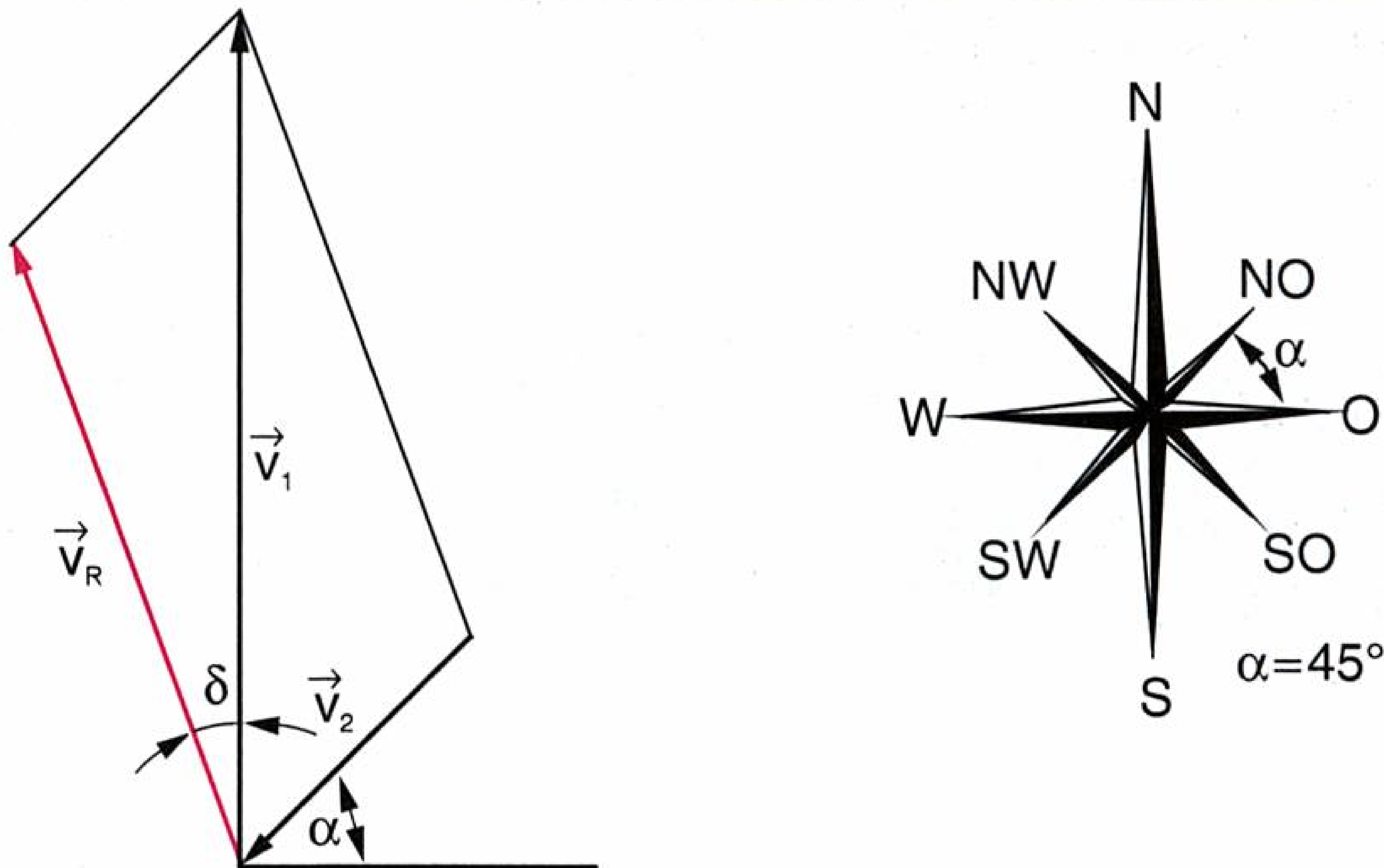
Wir wählen als Vektormaßstab 1 cm $\hat{=}$ 60 km/h,

$\Rightarrow v_1 = 4$ cm, $v_2 = 1{,}5$ cm

Aus der Zeichnung lesen wir ab:

$v_R = 3{,}1$ cm $\hat{=}$ **186 km/h**

Kursabweichung: $\delta =$ **20°**

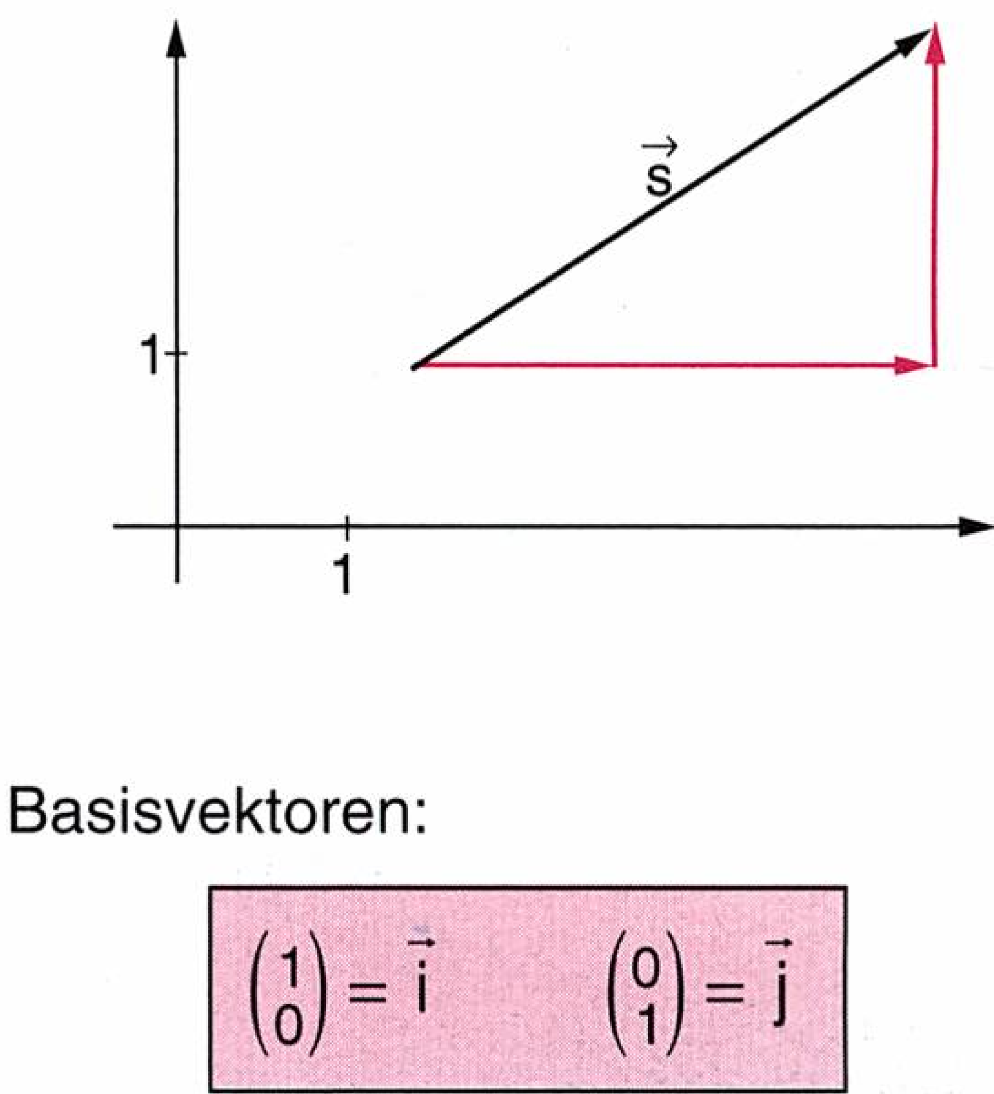


4. Basisvektoren, Einheitsvektor

„Zwei Vektoren sind gegeben, der Summenvektor ist gesucht." Damit haben wir uns unter anderem im letzten Abschnitt beschäftigt. Drehen wir die Sache jetzt um: Ein Summenvektor, z. B. $\vec{s} = \binom{3}{2}$ soll in zwei Vektoren zerlegt werden. Dieses Problem hat unendlich viele Lösungen. Wir interessieren uns aber — vgl. Außenspalte — nur für die zwei Vektoren, die parallel zur x-Achse und parallel zur y-Achse sind, und erhalten: $\binom{3}{2} = \binom{3}{0} + \binom{0}{2} = 3\binom{1}{0} + 2\binom{0}{1}$

Die Vektoren $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$, die sogenannten **Basisvektoren**, werden mit $\vec{i}$ und $\vec{j}$ abgekürzt, und es ergibt sich: $\binom{3}{2} = 3\binom{1}{0} + 2\binom{0}{1} = \mathbf{3\vec{i} + 2\vec{j}}$

$3\vec{i} + 2\vec{j}$ ist die **Komponentendarstellung** von $\binom{3}{2}$.



Basisvektoren:

$\binom{1}{0} = \vec{i} \qquad \binom{0}{1} = \vec{j}$

Beispiel:

Gegeben sind die Punkte A(−3, 1) und B(4, −1). Die Koordinaten- und Komponentendarstellung der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$ ist anzugeben.

Lösung:

$\overrightarrow{AB} = \binom{4+3}{-1-1} = \binom{7}{-2} = 7\vec{i} - 2\vec{j}$

Koordinatendarstellung: $\overrightarrow{AB} = \binom{7}{-2}$

Komponentendarstellung: $\overrightarrow{AB} = 7\vec{i} - 2\vec{j}$

$\overrightarrow{BA} = \binom{-3-4}{1+1} = \binom{-7}{2} = -7\vec{i} + 2\vec{j}$

Koordinatendarstellung: $\overrightarrow{BA} = \binom{-7}{2}$

Komponentendarstellung: $\overrightarrow{BA} = -7\vec{i} + 2\vec{j}$

Ein Vektor mit der Länge 1 heißt **Einheitsvektor**. Dividiert man einen vom Nullvektor $\vec{o} = \binom{0}{0}$ verschiedenen Vektor $\vec{a}$ durch seinen Betrag $|\vec{a}|$, dann erhält man einen Vektor mit dem Betrag 1, also den Einheitsvektor $\vec{a}_0$. Dieser Vorgang wird **„Normieren eines Vektors"** genannt.

Einheitsvektor:

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Beispiel:

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \binom{3}{4}$. Einheitsvektor $\vec{a}_0 = ?$

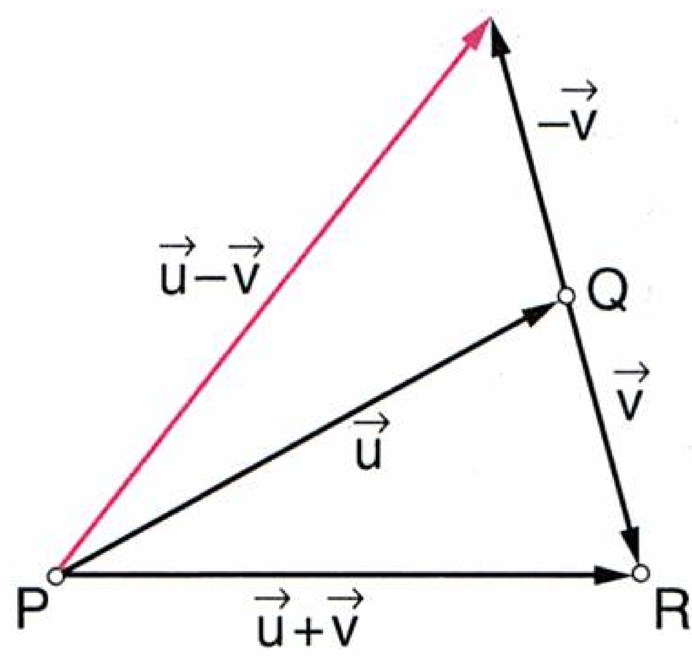
Lösung:

$$\vec{a}_0 = \frac{\binom{3}{4}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{\binom{3}{4}}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{\binom{3}{4}}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}\binom{3}{4} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

5. Subtraktion von Vektoren

Was könnte die Gleichung $\vec{z} = \vec{u} - \vec{v}$ bedeuten?

Ein Vektor wird subtrahiert, indem man den inversen Vektor addiert.



Nun, $\vec{u} - \vec{v}$ ist eine Kurzschreibweise für $\vec{u} + (-\vec{v})$.

Es wird zum Vektor $\vec{u}$ der inverse Vektor von $\vec{v}$ addiert.

Beispiel:
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{a} - \vec{b} = ?$

Lösung:

Zunächst zeichnet man einen Repräsentanten von $\vec{a}$. Dann wird der Vektor $-\vec{b}$ derart eingezeichnet, dass die Vektoren eine Pfeilkette bilden. Schließlich wird der Anfangspunkt von $\vec{a}$ mit dem Endpunkt von $-\vec{b}$ verbunden.

Die Pfeilspitze des Differenzvektors zeigt also immer zum inversen Vektor!

Die Koordinaten des Differenzvektors erhält man rechnerisch durch entsprechende Subtraktion: $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix}$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+5 \\ -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Das folgende Beispiel veranschaulicht den Nullvektor als Ergebnis einer Subtraktion.

Beispiel:
Gegeben sind die Punkte P(1, 2) und Q(3, 4). Der Vektor $\vec{z} = \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{v} - \vec{v}$ ist zu bestimmen, wenn $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ ist.

Lösung:

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} \Rightarrow -\vec{v} = \overrightarrow{QP}$$

$$\Rightarrow \vec{z} = \vec{v} - \vec{v} = \vec{v} + (-\vec{v}) = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP}$$

$$\vec{z} = \vec{v} - \vec{v} = \vec{o}$$

Beispiel:
Die Koordinaten des Eckpunktes D des Parallelogramms ABCD [A(–5, –3), B(2, –1), C(6, 5), D(x_4, y_4)] sind zu berechnen. Anschließend ist die Länge der Diagonale BD zu ermitteln.

Lösung:

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -5-2 \\ -3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x_4 - 6 \\ y_4 - 5 \end{pmatrix}$$

$$-7 = x_4 - 6 \qquad -2 = y_4 - 5$$

$$x_4 = -1 \qquad y_4 = 3$$

D(–1, 3)

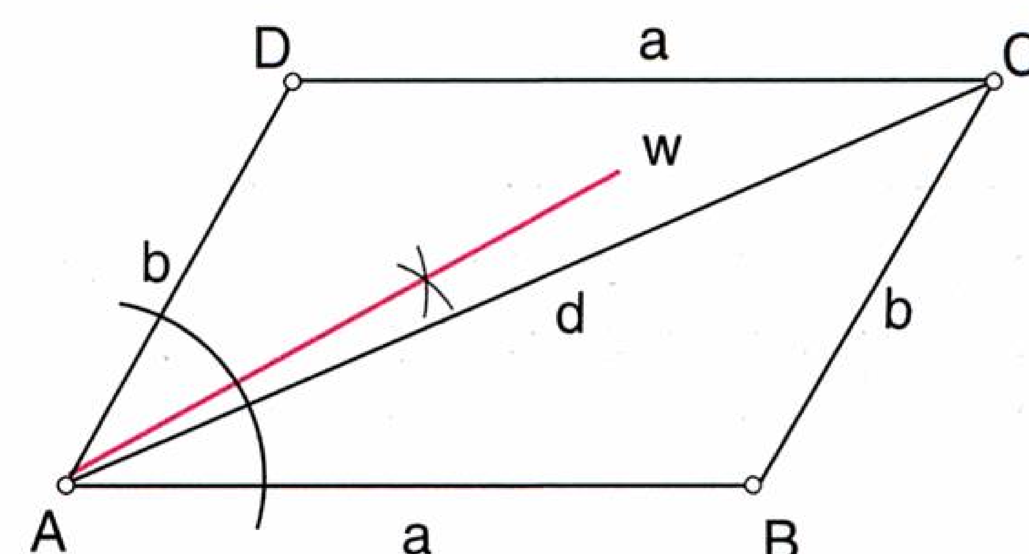
$$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

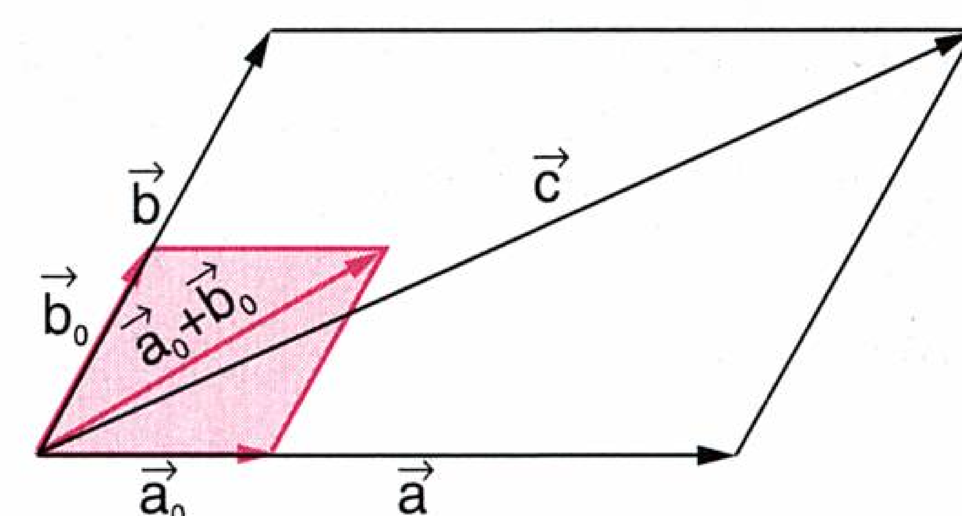
$$|\overrightarrow{BD}| = 5$$

6. Winkelsymmetrale

Sind die Diagonalen eines Parallelogramms auch Winkelsymmetralen der Seiten a und b? Wer für tiefe mathematische Überlegungen nicht empfänglich ist, wird — um diese Frage zu beantworten — am besten ein Parallelogramm mit Diagonale d und Winkelsymmetrale w zeichnen. Aus der nebenstehenden Figur ist ersichtlich, dass d und w nicht zusammen fallen. Die Diagonalen eines Parallelogramms sind also nicht Winkelsymmetralen. Gibt es eine Ausnahme? Ja, nämlich den Fall, dass a und b gleich lang sind, dass also ein Rhombus vorliegt.



Und wenn wir jetzt die Winkelsymmetralen der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ermitteln wollen überlegen wir ähnlich: Durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird ein Parallelogramm aufgespannt. Die Diagonale ist der Summenvektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.



Die Diagonale eines Parallelogramms ist genau dann eine Winkelsymmetrale, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleich lang sind. Denn in einem Rhombus sind die Diagonalen zugleich Winkelsymmetralen.

Es liegt daher nahe, dass man von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ jeweils den Einheitsvektor $\vec{a}_0$ bzw. $\vec{b}_0$ berechnet und anschließend die Summe $\vec{a}_0 + \vec{b}_0$ bildet.

Beispiel:

Die Ortsvektoren $\vec{a} = \binom{24}{7}$ und $\vec{b} = \binom{-5}{-12}$ sind gegeben. Die bruchfreie Darstellung des Vektors $\vec{c}$ in Richtung der Winkelsymmetralen ist zu berechnen.

Lösung:

$$\vec{a}_0 = \frac{\binom{24}{7}}{\sqrt{24^2+7^2}} = \frac{\binom{24}{7}}{\sqrt{576+49}} = \frac{\binom{24}{7}}{\sqrt{625}} = \frac{1}{25}\binom{24}{7} \qquad \vec{b}_0 = \frac{\binom{-5}{-12}}{\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}} = \frac{\binom{-5}{-12}}{\sqrt{25+144}} = \frac{\binom{-5}{-12}}{\sqrt{169}} = \frac{1}{13}\binom{-5}{-12}$$

Beim Addieren muss durch geeignetes Erweitern auf gleichen Nenner gebracht werden:

$$\vec{a}_0 + \vec{b}_0 = \frac{1}{25}\binom{24}{7} + \frac{1}{13}\binom{-5}{-12} = \frac{13}{325}\binom{24}{7} + \frac{25}{325}\binom{-5}{-12} = \frac{1}{325}\left[13\binom{24}{7} + 25\binom{-5}{-12}\right] =$$

$$= \frac{1}{325}\binom{312-125}{91-300} = \frac{1}{325}\binom{187}{-209} = \frac{11}{325}\binom{17}{-19} \Rightarrow \vec{c} = \binom{17}{-19}$$

$\vec{c}$ ist länger als der Vektor $\frac{11}{325}\binom{17}{-19}$, aber es ist der einfachste Vektor in Richtung der Winkelsymmetralen.

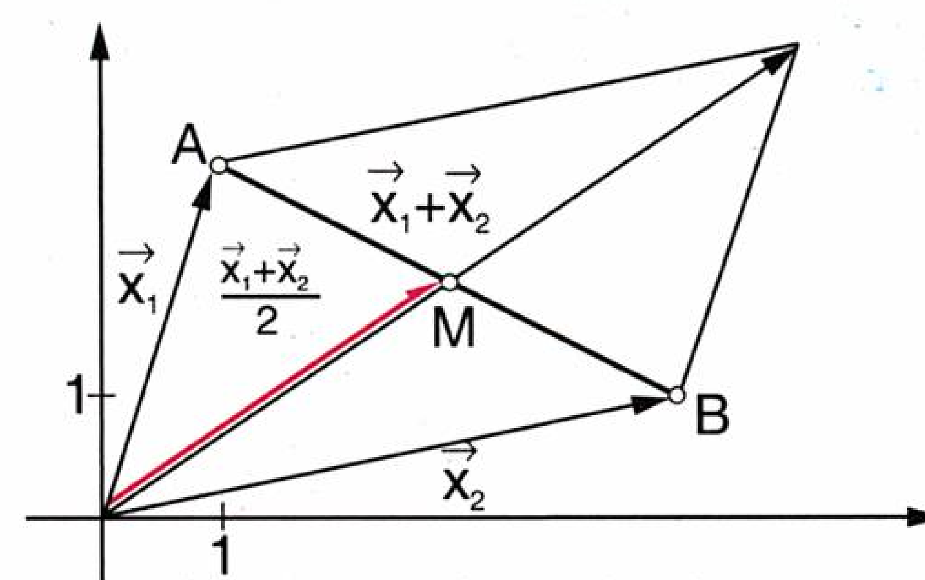
7. Mittelpunkt einer Strecke

Beispiel:

Es ist der Mittelpunkt M der Strecke AB[A(1, 3), B(5, 1)] zu bestimmen.

Lösung:

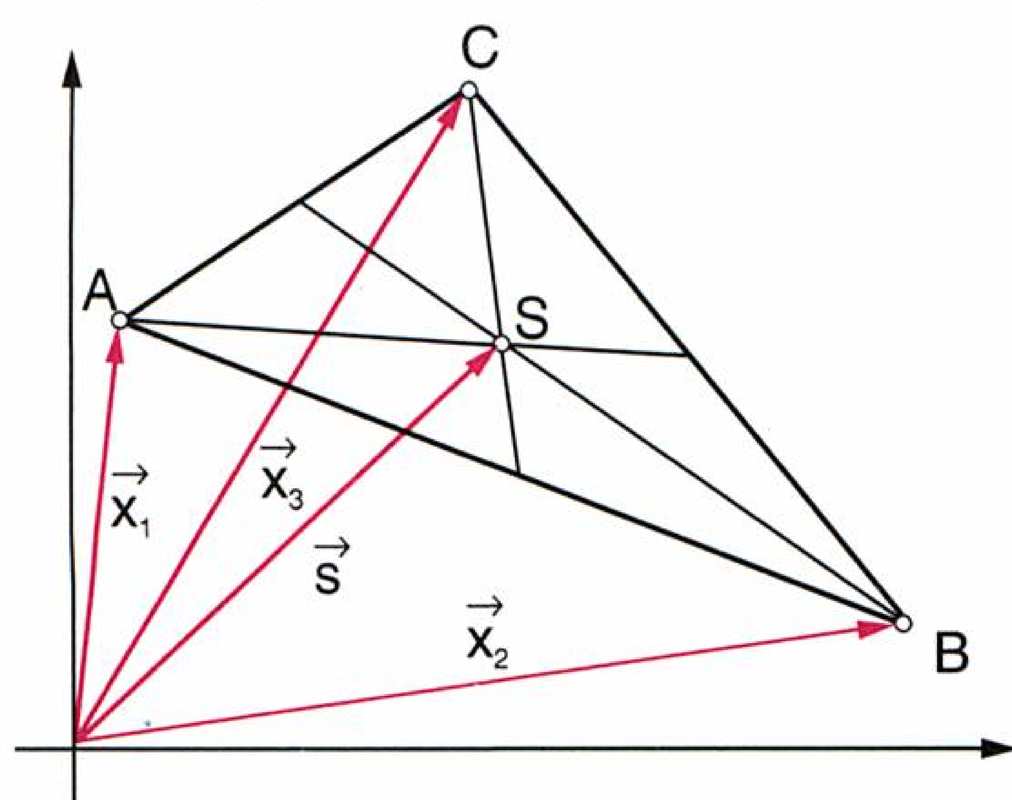
Wird der Ortsvektor $\vec{x}_1$ des Punktes A und der Ortsvektor $\vec{x}_2$ des Punktes B addiert, ergibt sich der „Diagonalvektor" $\vec{d}$ des dargestellten Parallelogramms: $\vec{d} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$.



Aus der Figur ist ersichtlich, dass der halbe Diagonalvektor der Ortsvektor des Mittelpunktes M ist.

$$\overrightarrow{0M} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B}) = \frac{1}{2}\left[\binom{1}{3} + \binom{5}{1}\right] = \frac{1}{2}\binom{1+5}{3+1} = \frac{1}{2}\binom{6}{4} = \binom{3}{2}$$

Da für den Ortsvektor $\overrightarrow{0M}$ die Koordinaten des Endpunktes M mit den Koordinaten des Ortsvektors überein stimmen, gilt: M(3, 2)



Bezeichnungen:

$\vec{x}_1 = \overrightarrow{0A}$, $\vec{x}_2 = \overrightarrow{0B}$, $\vec{x}_3 = \overrightarrow{0C}$, $\vec{s} = \overrightarrow{0S}$

$$\vec{s} = \frac{1}{3}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3)$$

Hinsichtlich der Herleitung obiger Formel vgl. Aufgabe **1364**.

8. Schwerpunkt eines Dreiecks

Die Schwerlinien s_a, s_b und s_c eines Dreiecks sind Gerade, die den Mittelpunkt einer Seite mit dem gegenüber liegenden Eckpunkt verbinden. Im Dreieck schneiden einander die drei Schwerlinien in einem Punkt, dem Schwerpunkt S. Der Schwerpunkt teilt die Schwerlinien im Verhältnis 2 : 1!

Beispiel:

Der Schwerpunkt S des Dreiecks ABC [A (1, 1), B (5, 2), C (3, 6)] ist zu berechnen.

Lösung:

Wir setzen in die in der Außenspalte angeführte Formel
$\vec{s} = \frac{1}{3}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3)$ ein und erhalten:

$$\vec{s} = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+5+3\\1+2+6\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}9\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

Somit gilt: **S (3, 3)**

AUFGABEN

1323. Zitat aus „Mathematik — eine faszinierende Wissenschaft" von Richard KNERR: „*Bei vielen Rechenbeispielen, mit denen wir es bisher zu tun hatten, habe ich einen sehr wichtigen Aspekt völlig außer acht gelassen: Ich habe stets so getan, als seien alle Größen durch* ***eine*** *Zahl gegeben. In Wirklichkeit trifft das nur für einige wenige in der Natur vorkommende Größen zu, wie z. B. für die Temperatur oder auch die Zeit. Beide lassen sich tatsächlich mit einer einzigen Zahl umreißen. Man nennt solche Größen* ***Skalare****; sie besitzen keinerlei Richtungssinn. Die meisten anderen Begriffe sind aber keineswegs Skalare. Die Geschwindigkeit beispielsweise, die wir stets mit einer Zahl angegeben haben, hat in Wirklichkeit auch eine Richtung! Es ist ja ein Unterschied, ob ein Auto in eine Links- oder Rechtskurve, vorwärts oder rückwärts fährt! Um die Geschwindigkeit eines Körpers vollständig zu beschreiben, ist es deshalb notwendig, auch die Richtung anzugeben, in der er sich bewegt. ... Im allgemeinen reicht es nicht aus, nur die Größe einer Kraft durch eine Zahl auszudrücken. Die Richtung, in der sie wirkt, ist mindestens genauso wichtig! Stellen Sie sich vor, die Schwerkraft würde nicht senkrecht nach unten, sondern schräg seitlich oder gar nach oben wirken! Geschwindigkeiten und Kräfte sind also sogenannte* ***gerichtete*** *Größen. Man nennt sie...*" Ja, wie nennt man sie? Und was könnte man — nach der obigen Erklärung — unter einem Skalar verstehen? Ist ein Skalar vielleicht nur einfach eine ganz „normale" Zahl?

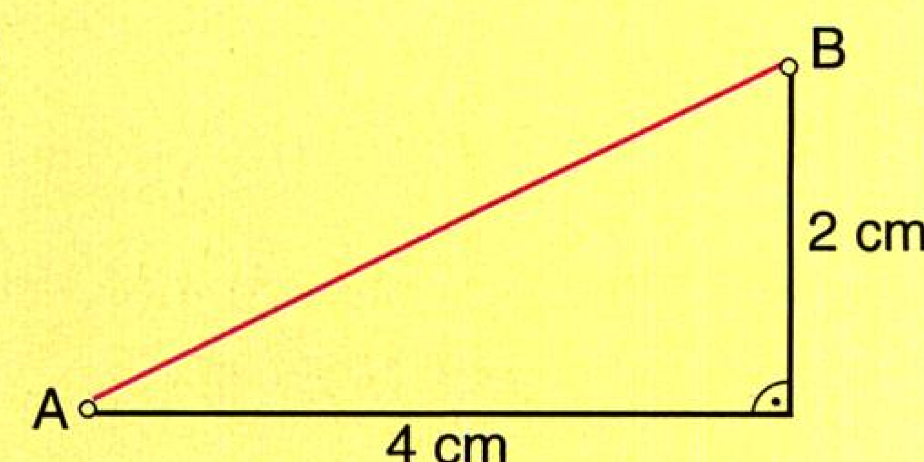
1324. Es ist anzugeben, ob es sich um eine skalare oder um eine vektorielle Größe handelt:

a) Volumen **b)** Druck **c)** Dichte **d)** Länge
e) Beschleunigung **f)** Masse **g)** Kraft **h)** Arbeit

1325. Gegeben sind die Punkte P (2, 4) und Q (3, 5). Das Viereck ABCD [A (0, 2), B (5, 5), C (2, 8), D (0, 4)] ist um den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ zu verschieben.

1326. Ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge 3 cm ist zu zeichnen und um den Vektor $\overrightarrow{AB}$ (vgl. nebenstehende Figur) zu verschieben.

Bemerkung: Es genügt den Mittelpunkt M zu verschieben und um M′ das entsprechende Sechseck zu konstruieren. ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$)



1327. Es ist anzukreuzen, welche der folgenden Vektoren gleich sind:

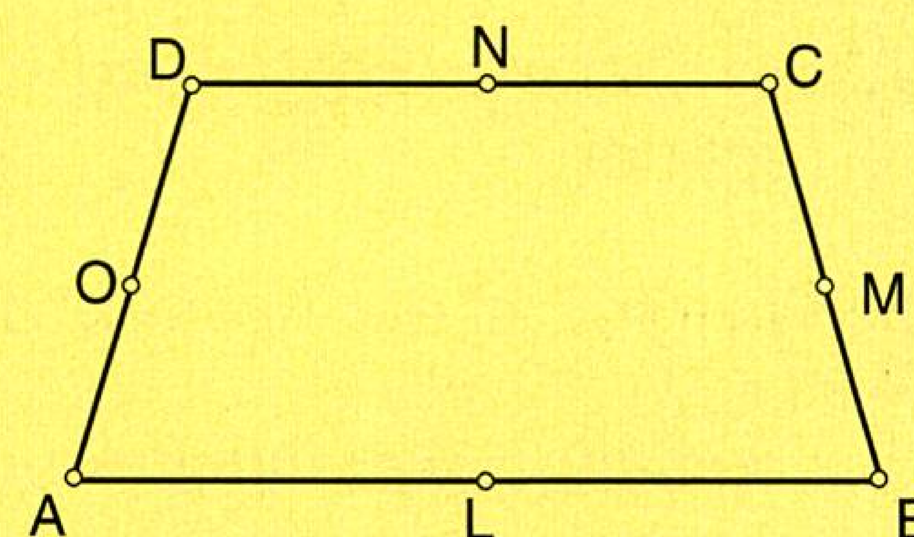
○ **a)** $\vec{a}$ $\vec{b}$ ○ **b)** $\vec{a}$ $\vec{b}$ ○ **c)** $\vec{a}$ $\vec{b}$ ○ **d)** $\vec{a}$ $\vec{b}$

○ **e)** $\vec{a}$ $\vec{b}$ ○ **f)** $\vec{a}$ $\vec{b}$ ○ **g)** $\vec{a}$ $\vec{b}$ ○ **h)** $\vec{a}$ $\vec{b}$

1328. L, M, N und O sind Seitenmittelpunkte des Trapezes ABCD. Welche Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründung?

a) $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{MB}$ **b)** $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AL}$ **c)** $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB}$ **d)** $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{LB}$

e) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$ **f)** $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ **g)** $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{NC}$ **h)** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

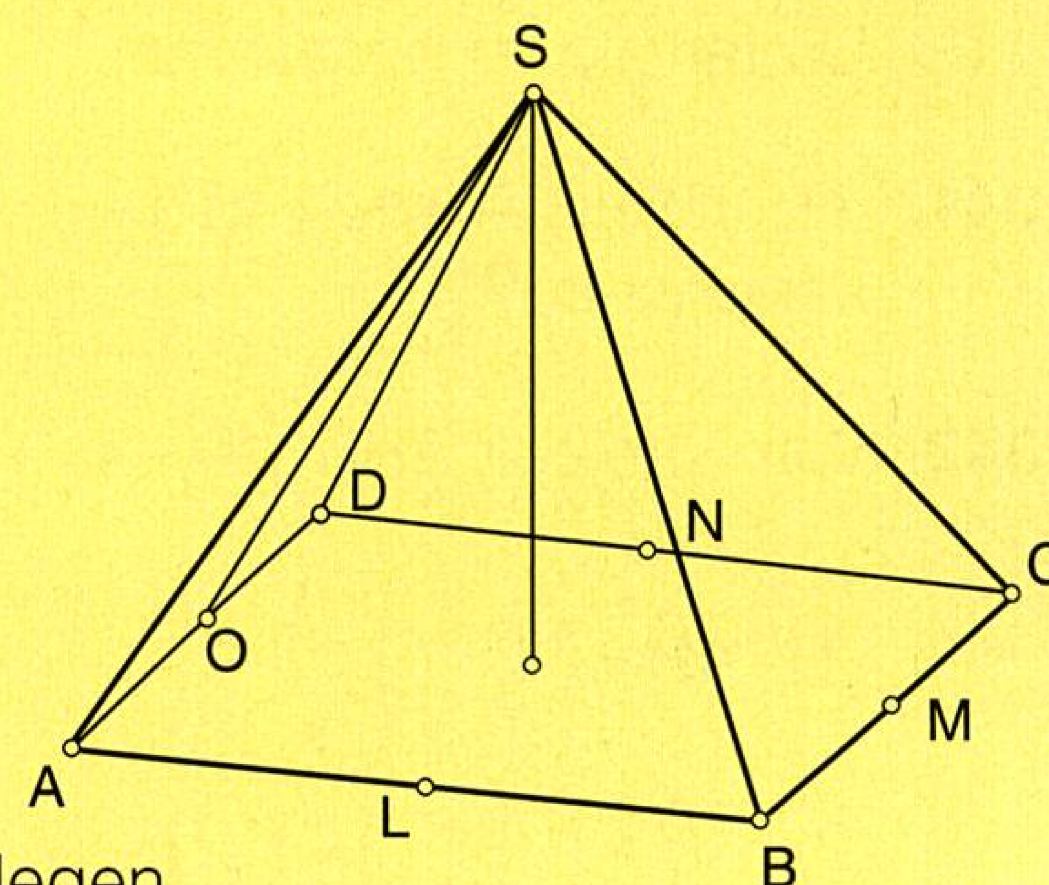


Bisher habe wir lediglich Vektoren in der Ebene behandelt. Es sind jedoch auch Vektoren im Raum sinnvoll. In der Praxis wählt man meist jene Pfeile als Repräsentanten des dreidimensionalen Vektors $\vec{v}$, die in den Flächen räumlicher Körper liegen und insbesondere den Körperkanten bzw. den Flächen- und Raumdiagonalen entsprechen.

1329. L, M, N und O sind Seitenmittelpunkte der Basis der nebenstehenden quadratischen Pyramide. Welche Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründung?

a) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BO}$ **b)** $\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{SD}$ **c)** $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{MC}$ **d)** $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{AM}$

e) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BM}$ **f)** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LO}$ **g)** $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{CN}$ **h)** $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AL}$



1330. Die wahren Aussagen sind anzukreuzen:

○ **a)** Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie die selbe Schiebung festlegen.

○ **b)** Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie die selbe Pfeillänge aber entgegen gesetzten Richtungssinn haben.

○ **c)** Ob Vektoren gleichen Anfangs- oder Endpunkt haben, ist für ihre Gleichheit unbedeutend.

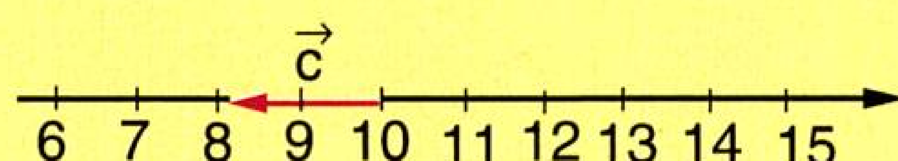
○ **d)** „Gleich orientiert" heißt: Zeichnet man die Verbindungsgerade der Anfangspunkte der Pfeile, so liegen sämtliche Pfeilspitzen auf der selben Seite der Geraden.

○ **e)** „Verschieden orientiert" bedeutet: Zeichnet man die Verbindungsgerade der Anfangspunkte der Pfeile, so liegen sämtliche Pfeilspitzen auf verschiedenen Seiten der Geraden.

○ **f)** Die Koordinaten eines Vektors sind Zahlen, die Komponenten eines Vektors sind Vektoren.

○ **g)** $\binom{a}{b}$ ist die Schreibweise für einen Vektor in Koordinatendarstellung. $(a, b \in \mathbb{R})$

○ **h)** Es gilt: $|\vec{c}| = -2$



1331. Die in Koordinatendarstellung gegebenen Vektoren **a)** $\vec{a} = \binom{1}{3}$ **b)** $\vec{b} = \binom{-3}{2}$ **c)** $\vec{c} = \binom{-2}{-4}$ **d)** $\vec{d} = \binom{0}{1}$ sind in ein kartesisches Koordinatensystem zu zeichnen.

1332. Gegeben sind die Punkte D(1, −3), E(3, −4), L(1, 1) und K(−2, 0). Die Vektoren **a)** $\vec{k} = \overrightarrow{DE}$ **b)** $\vec{l} = \overrightarrow{LK}$ **c)** $\vec{m} = \overrightarrow{KD}$ **d)** $\vec{n} = \overrightarrow{LE}$ sind in Koordinatendarstellung anzugeben.

1333. Die Seitenvektoren des Dreiecks ABC [A (2, 4), B (5, 3), C (3, 6)] sind zu zeichnen und zu berechnen.

1334. Die Diagonalvektoren des unregelmäßigen Vielecks ABCDE [A (−4, −2), B (−1, −5), C (6, −2), D (4, 4), E (−6, 7)] sind zu zeichnen und deren Länge ist zu berechnen!

1335. Welche Längen haben die Vektoren **a)** $\vec{r} = \binom{6}{8}$ **b)** $\vec{s} = \binom{24}{7}$ **c)** $\vec{t} = \binom{16}{12}$ **d)** $\vec{u} = \binom{8}{15}$?
Gleichwertige Formulierung: Welchen Betrag haben die gegebenen Vektoren?

1336. Gegeben sind die Punkte $P(x_1, y_1)$ und $Q(x_2, y_2)$. Die Entfernung d dieser Punkte ist zu bestimmen, d. h. die sogenannte **„Distanzformel"** $d = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ist herzuleiten.

1337. Die Distanz (Entfernung) d der Punkte **a)** $P_1(3, 5)$, $P_2(12, -35)$ **b)** $P_3(-16, 0)$, $P_4(0, -30)$ ist zu berechnen.

1338. Wie groß ist der Abstand des Punktes **a)** A (−21, 20) **b)** B (−10, −24) vom Ursprung?

1339. Die Länge des Ortsvektors des Punktes **a)** P (5, 6) **b)** Q (−2, 4) ist grafisch (durch Abmessen) und rechnerisch zu bestimmen.

Bemerkung: Der Vektor $\overrightarrow{0P}$ vom Ursprung 0 zu einem Punkt P heißt **Ortsvektor**. Für den Ortsvektor $\overrightarrow{0P}$ des Punktes P stimmen die Koordinaten des Endpunktes P mit den Koordinaten des Ortsvektors überein.

1340. Vom Dreieck **a)** ABC [A (−4, −1), B (2, −5), C (−1, 3)] **b)** PQR [P (−5, 2) Q (10, −3), R (−2, 6)] ist der Umfang u zu berechnen.

1341. Ist das Dreieck **a)** [A (−4, −5), B (4, 1), C (−2, 9)] **b)** UVW [U (−1, −6), V (5, 5), W (2, 6)] gleichschenkelig?

1342. Vom Dreieck ABC [A (−4, −5), B (10, 3), C (−5, −7)] wurde der Umfang u ermittelt:

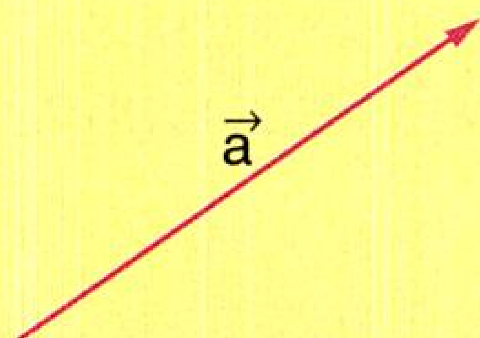
(1) $\overrightarrow{AB} = \binom{10-4}{3-5} = \binom{6}{-2}$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 6{,}32$

(2) $\overrightarrow{AC} = \binom{-5+4}{7+5} = \binom{-1}{12}$ $\quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + 12^2} = \sqrt{1+144} = \sqrt{145} = 12{,}04$

(3) $\overrightarrow{BC} = \binom{-5-10}{7-3} = \binom{-15}{4}$ $\quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-15)^2 + 4^2} = \sqrt{225+16} = \sqrt{241} = 15{,}54$

u = 33,90

Ist das richtig?

1343. Gegeben ist der Vektor 

Es ist **a)** $2\vec{a}$ **b)** $\frac{1}{2}\vec{a}$ zu zeichnen.

1344. Aus den nachstehenden Vektoren ist so herauszuheben, dass die Koordinaten möglichst einfach, d. h. bruchfrei werden!

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

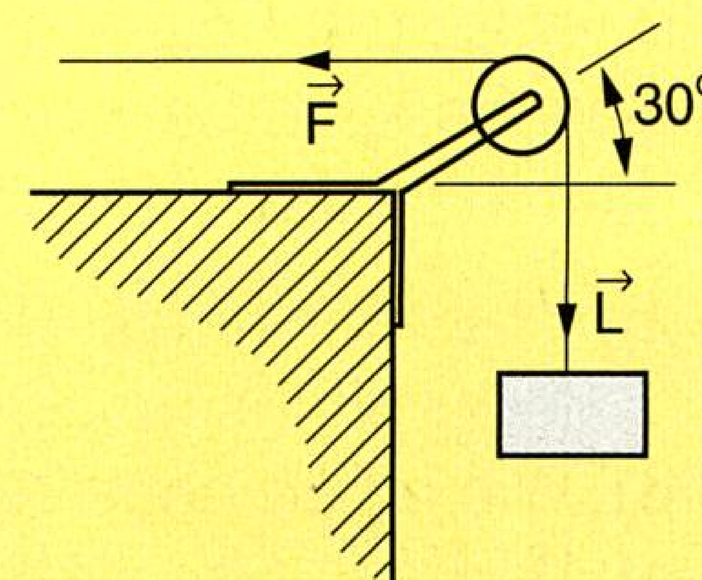
1345. Gegeben: **a)** $|\vec{a}| = a = 4{,}2$ cm, $|\vec{b}| = b = 5{,}6$ cm, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 70°$

b) $|\vec{a}| = a = 3{,}4$ cm, $|\vec{b}| = b = 7{,}9$ cm, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 160°$

Gesucht: grafische Addition von $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

1346. Die Vektoren **a)** $\vec{a} = \binom{4}{-1}$ und $\vec{b} = \binom{-3}{2}$ **b)** $\vec{c} = \binom{-2}{3}$ und $\vec{d} = \binom{-1}{0}$ sind grafisch und rechnerisch zu addieren.

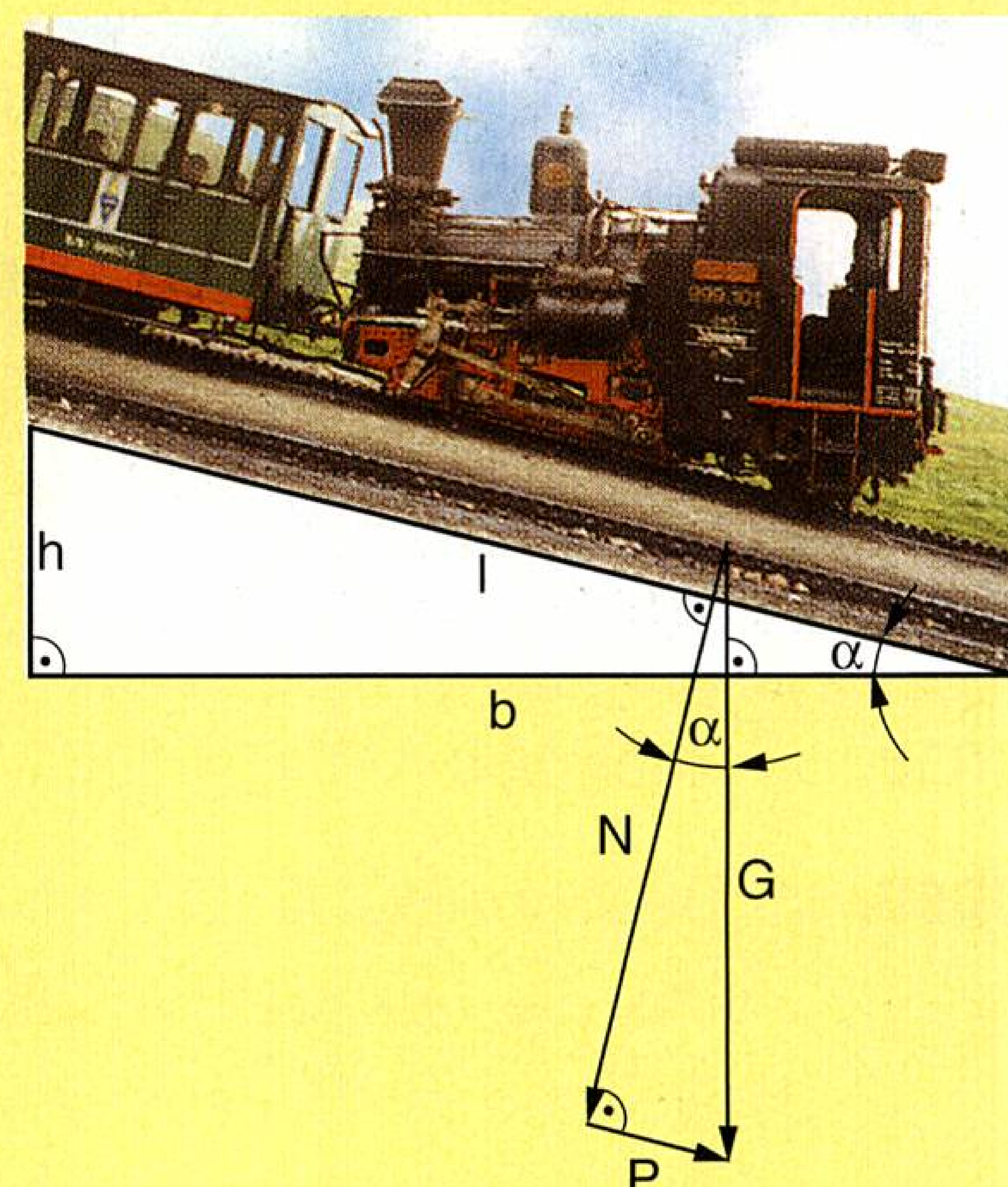
1347. Um eine Last (vgl. Figur) zu halten, ist eine Kraft von $|\vec{F}| = 300\,N$ aufzuwenden.



a) Wie schwer ist die Last?

b) Mit welcher Kraft $|\vec{R}|$ wird der Stab, der die Rolle hält, beansprucht?

1348. Schiefe Ebene: $b = 12\,m$, $h = 5\,m$, $l = 13\,m$. Diese Steigung von fast 42% entspricht den Verhältnissen einer Zahnradbahn.

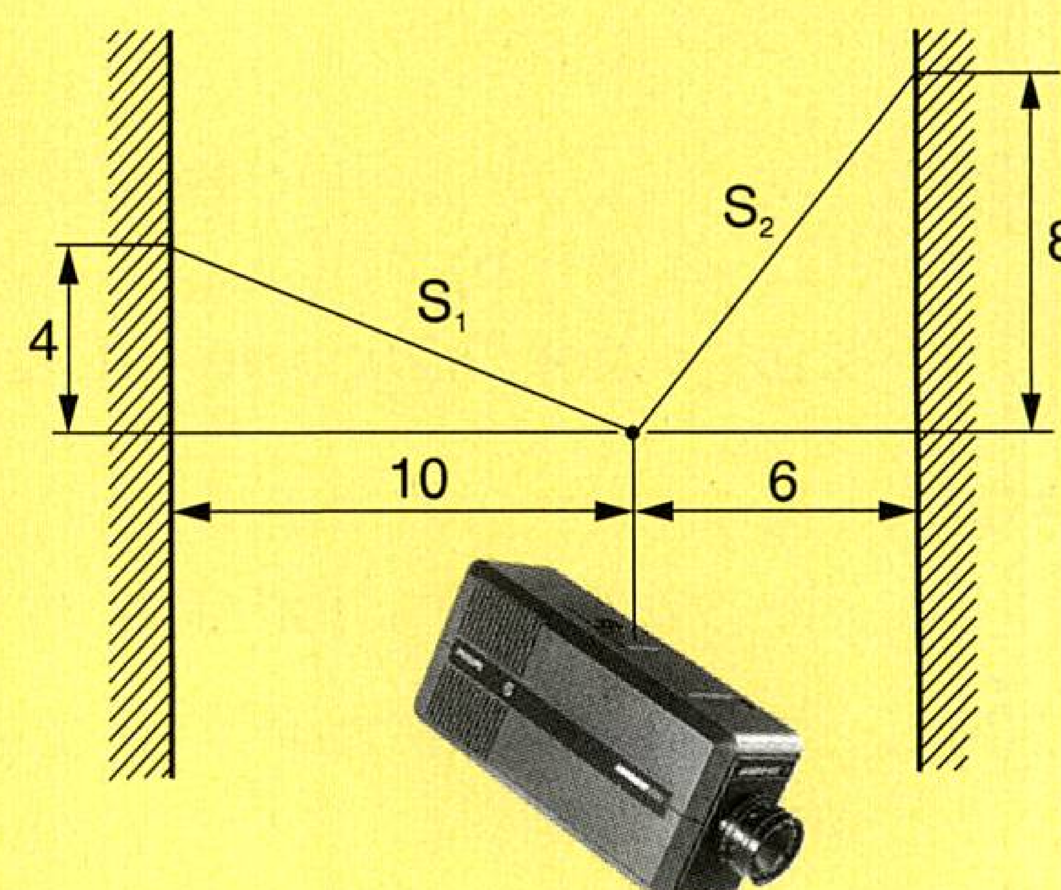


a) Mit welcher Kraft N wird die Schiene belastet, wenn das Gewicht der Lokomotive $G = 195\,kN$ beträgt?

b) Welche Kraft P wirkt auf die Zahnstange?

Anleitung: Das „Vektordreieck“ und das Dreieck, das die schiefe Ebene bildet, sind ähnlich. $G : N = l : b$ bzw. $G : P = l : h$

1349. Eine $G = 25\,N$ schwere Videokamera wird mittels zweier Seile verspannt. (Vgl. Figur.) Wie groß sind die Kräfte in S_1 und S_2? (Vektormaßstab: $1\,cm \mathrel{\hat{=}} 10\,N$)



1350. Gegeben: **a)** $\vec{c} = \binom{2}{4}$ **b)** $\vec{c} = \binom{-1}{-5}$

Gesucht: Komponentendarstellung des Vektors

1351. Gegeben: A(−7, 0), B(2, 5), C(−8, −7), D(3, −9).

Gesucht: Koordinaten und Komponentendarstellung der Vektoren **a)** $\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{CD}$ **c)** $\overrightarrow{DA}$ **d)** $\overrightarrow{CB}$

1352. Gegeben: **a)** $\vec{c} = \binom{16}{30}$ **b)** $\vec{c} = \binom{-24}{10}$

Gesucht: Koordinaten des Einheitsvektors $\vec{c}_0$

1353. Gegeben: **a)** $|\vec{a}| = a = 3{,}8\,cm$, $|\vec{b}| = b = 4{,}9\,cm$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 80°$

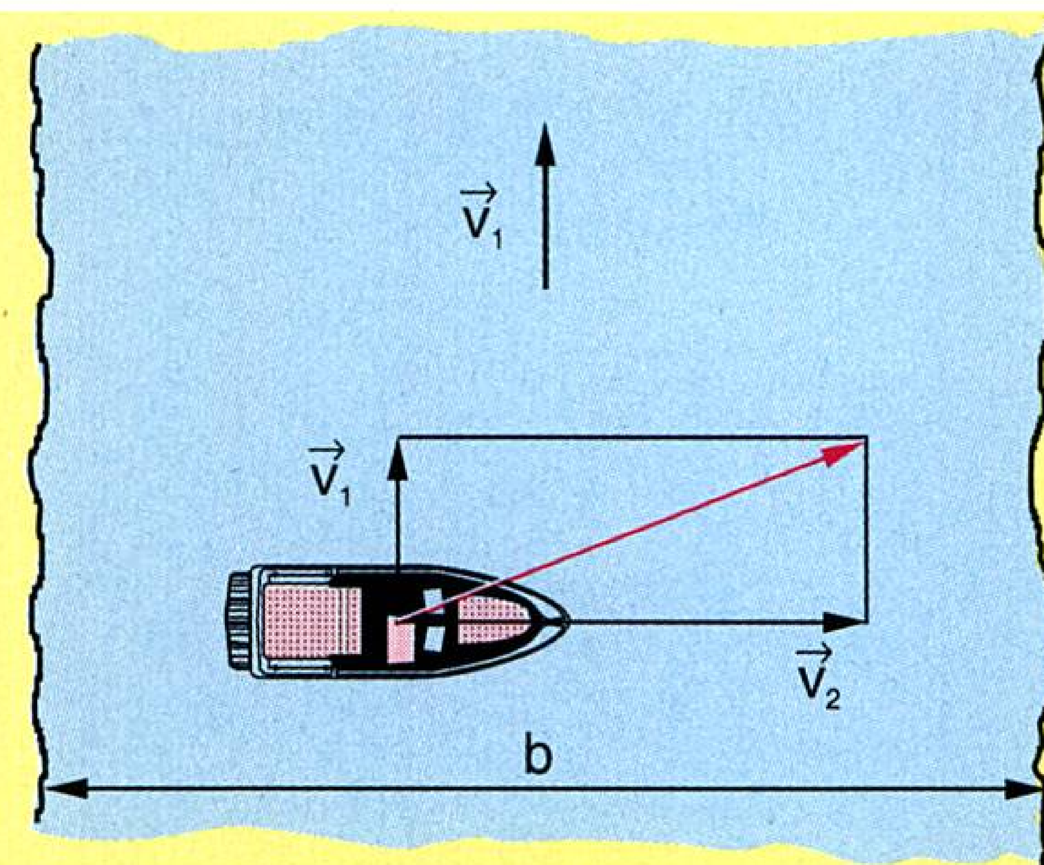
b) $|\vec{a}| = a = 4{,}1\,cm$, $|\vec{b}| = b = 3{,}5\,cm$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 250°$

Gesucht: grafische Subtraktion von $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$

1354. Die Vektoren $\vec{p} = \binom{5}{-2}$ und $\vec{q} = \binom{-4}{-4}$ bzw. $\vec{v} = \binom{-3}{0}$ und $\vec{w} = \binom{2}{-1}$ sind grafisch und rechnerisch zu subtrahieren: **a)** $\vec{p} - \vec{q} = ?$ **b)** $\vec{w} - \vec{v} = ?$

1355. In einem b = 60 m breiten Kanal besteht eine über die Breite gleichmäßige Strömung mit $v_1 = 1{,}6$ m/s. Ein Motorboot entwickelt darin eine Eigengeschwindigkeit von $v_2 = 4$ m/s.

a) Wie muss das Boot gesteuert werden, damit die Überfahrt möglichst schnell erfolgt?
b) Wie lange dauert die Überfahrt?
c) Wie weit wird das Boot abgetrieben?



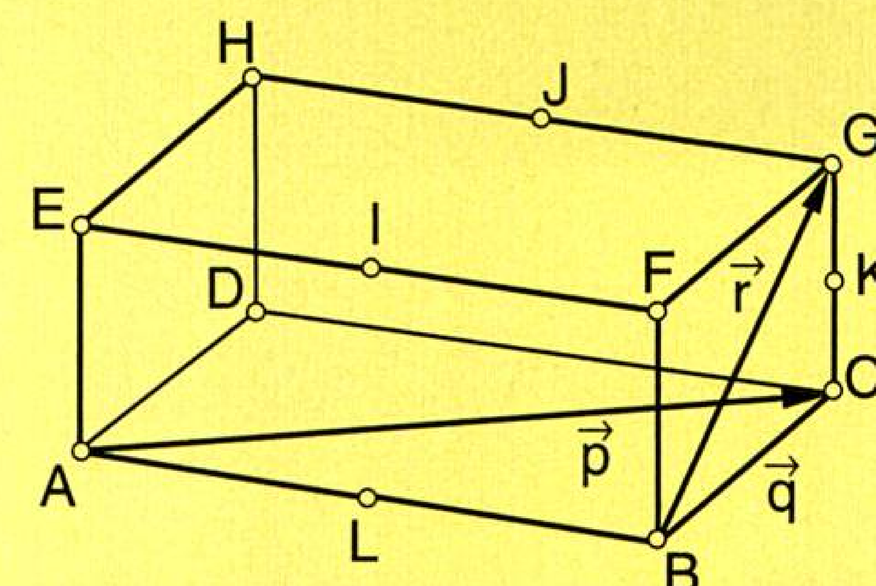
1356. Kanal und Boot wie bei Aufgabe **1355.**, Vektormaßstab: 1 cm ≙ 0,5 m/s .

a) Wie muss das Boot gesteuert werden, damit es genau gegenüber der Ablegestelle ankommt, also nicht abgetrieben wird?
b) Wie lange dauert die Überfahrt?

1357. Im Rhombus ABCD, sind die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{f} = \overrightarrow{BD}$ gegeben. E ist der Halbierungspunkt der Strecke AB, F liegt auf BC, $\frac{2}{3}$ der Strecke $\overrightarrow{BC}$ von B entfernt; G liegt auf CD, $\frac{1}{4}$ von $\overrightarrow{CD}$ von C entfernt. Die Vektoren **a)** $\overrightarrow{AF}$ **b)** $\overrightarrow{FG}$ **c)** $\overrightarrow{EG}$ **d)** $\overrightarrow{GA}$ **e)** $\overrightarrow{FE}$ sind durch $\vec{a}$ und $\vec{f}$ auszudrücken.

1358. Im Rhombus ABCD, Mitte M, sind die Vektoren $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{CA}$ durch $\vec{p} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{q} = \overrightarrow{CD}$ darzustellen.

1359. Im Quader ABCDEFGH mit den Kantenhalbierungspunkten I, J, K, L sind die Vektoren $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{IL}$, $\overrightarrow{JK}$, $\overrightarrow{KL}$ durch die Vektoren $\vec{p} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{q} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{r} = \overrightarrow{BG}$ auszudrücken.



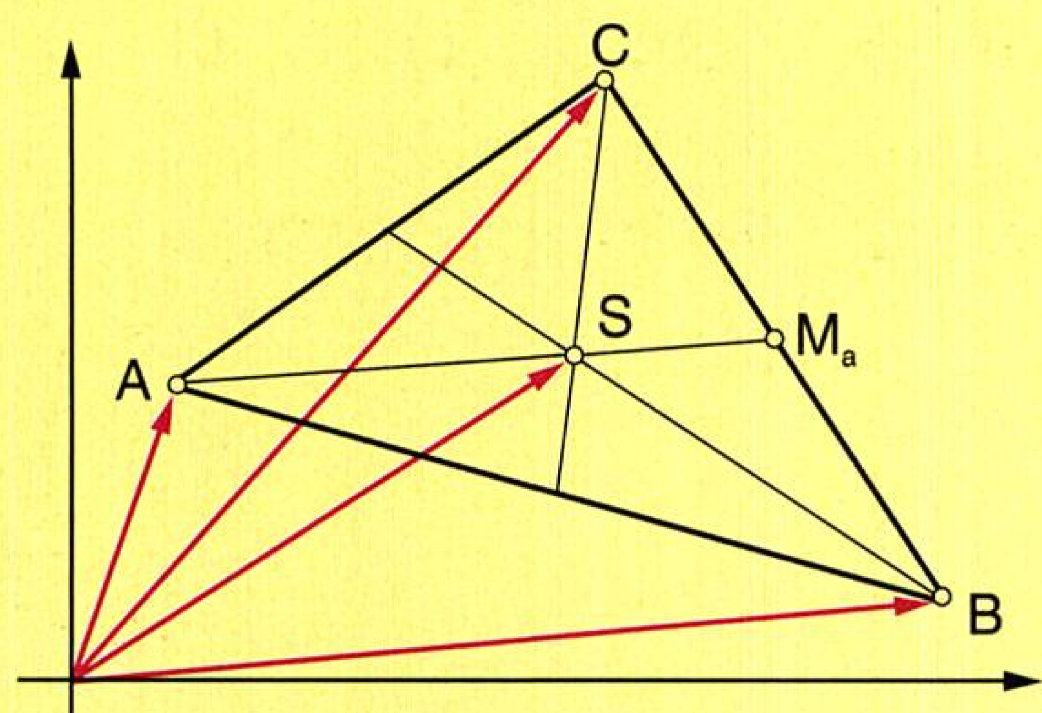
1360. Die Koordinaten des Eckpunkts C des Parallelogramms **a)** ABCD[A(−7, −7), B(5, −2), C(x_3, y_3), D(−3, 4)] **b)** ABCD[A(−5, −2), B(5, −4), C(x_3, y_3), D(−7, 5)] sind zu berechnen. Anschließend ist die Länge der Diagonale $\overrightarrow{BD}$ zu ermitteln.

1361. Gegeben sind die Vektoren **a)** $\vec{a} = \binom{8}{-15}$, $\vec{b} = \binom{3}{4}$ **b)** $\vec{c} = \binom{4}{3}$, $\vec{d} = \binom{-6}{-8}$. Der einfachste Vektor in Richtung der Winkelsymmetralen ist zu berechnen.

1362. Es ist der Mittelpunkt M der Strecke **a)** AB[A(−1, 3), B(−3, 5)] **b)** CD[C(−4, −3), D(6, 5)] zu bestimmen.

1363. Die Vektoren in Richtung der Schwerlinien des Dreiecks **a)** ABC[A(4, 3), B(2, −1), C(−6, 7)] **b)** PQR[P(7, 13), Q(9, 5), R(11, 3)] sind in bruchfreien Koordinaten anzugeben. Weiters sind die Längen der Schwerlinien zu berechnen.

1364.



$\vec{x}_1 = \overrightarrow{0A}$
$\vec{x}_2 = \overrightarrow{0B}$
$\vec{x}_3 = \overrightarrow{0C}$
$\vec{s} = \overrightarrow{0S}$ $\quad \vec{s} = \frac{1}{3}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3)$ Beweis?

Z.B. $\overrightarrow{AS} : \overrightarrow{SM_a} = 2 : 1$

Anleitung: Die Schwerlinien — sie verbinden Eckpunkt mit gegenüberliegendem Seitenmittelpunkt — teilen einander im Verhältnis 2 : 1. Zwischen Eckpunkt und Schwerpunkt liegen zwei Teile, zwischen Schwerpunkt und Seitenmittelpunkt ein Teil der Schwerline. (Vgl. obige Figur.)

Mathematisch ausgedrückt: $\vec{s} = \vec{x}_1 + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_a} = \vec{x}_1 + \frac{2}{3}(\overrightarrow{0M_a} - \overrightarrow{0A})$

M_a lässt sich durch $\frac{1}{2}(\vec{x}_2 + \vec{x}_3)$ ersetzen und so erhält man: $\vec{s} = \vec{x}_1 + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(\vec{x}_2 + \vec{x}_3) - \vec{x}_1\right]$ usw.

1365. In dem Dreieck ABC mit den Seitenmittelpunkten M_a, M_b und M_c und dem Schwerpunkt S sind jeweils nur einige Größen bekannt. Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen:

	A	B	C	M_a	M_b	M_c	S
a)	(−4, 3)	(2, 5)	(−4, 7)				
b)	(10, 2)	(2, 6)					(6, 6)
c)	(12, −6)	(6, −12)	(0, 0)				
d)		(−5, −1)	(−1, −9)				(−5, −5)
e)	(2, −2)				(5, 4)		(6, 4)
f)				(1, 5)	(−5, 2)		(−2, 2)
g)	(5, 1)	(17, 5)		(11, 7)			
h)				(9, 5)	(3, 3)	(9, 1)	

Vermischte Aufgaben

1366. $\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$

a) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$
b) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\vec{e}$
c) $-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\vec{f}$
d) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=\vec{g}$

ist zu konstruieren!

1367. Die x- und y-Koordinate eines Vektors $\overrightarrow{PP_1}$ mit P(x, y) und $P_1(x_1, y_1)$ ermittelt man wie folgt:

$$\overrightarrow{PP_1} = \overrightarrow{0P_1} - \overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \end{pmatrix}$$

Wie könnte man eine Erklärung für diese Methode finden?

1368. Die fehlenden Eckpunkte des Parallelogramms ABCD mit dem Mittelpunkt M sind zu bestimmen:

a) B(1, −4), C(4, 7), M(−2, 0) **b)** A(−2, −2), D(−6, 5), M(1, 1)

1369. In welche Richtung muss eine nach Norden fliegende Cessna 150 mit der Eigengeschwindigkeit $v_1 = 240$ km/h gesteuert werden, wenn ein Nordost-Sturm mit einer Geschwindigkeit von $v_2 = 90$ km/h herrscht? Welche Geschwindigkeit über Boden hat dann das Flugzeug? (Vektormaßstab: 1 cm ≙ 60 km/h)

1370. **Koppelnavigation:**

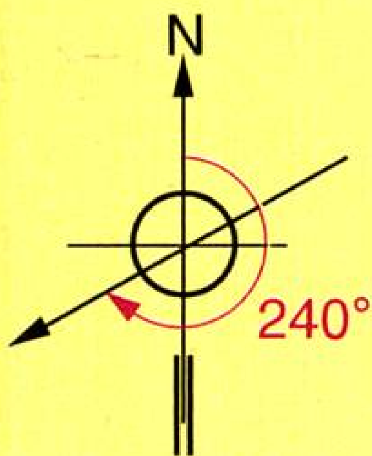
Eine Cessna 150 (80 kts)[1] muss ein Sperrgebiet umfliegen. Zu diesem Zweck steuert der Pilot zunächst für 15 min einen Kurs von 035 Grad, dann für 8 min einen Kurs von 085 Grad und schließlich für 22 min einen Kurs von 170 Grad. Der Wind kommt mit 20 kts aus 240 Grad. In welcher Richtung und Entfernung vom Ausgangspunkt befindet sich das Flugzeug jetzt? (Grafische Lösung!)

Anleitung: Winkel werden in der Luftfahrt anders als in der Mathematik gemessen!

Ein Kurs von 035 Grad bedeutet:



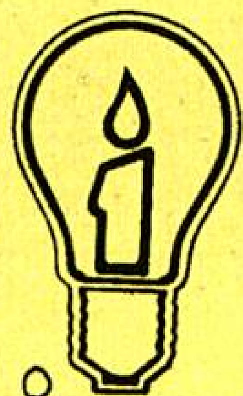
Ein Wind aus 240 Grad bedeutet:



1371. Welchen Steuerkurs hätte unser Pilot zu wählen, wenn das Sperrgebiet überflogen werden darf und er zum Ziel aus Aufgabe **1370.** gelangen möchte?

[1]) Wir verwenden hier die in der Luftfahrt üblichen Maße: Ein Knoten (kt, Mehrzahl: kts) ist eine Nautische Meile pro Stunde. 1 kt = 1 mph = 1,852 km/h.

THINK THINK THINK ThInk THINK THINK ThInk THINK THINK THINK ThInk THINK THINK THINK



THINK ThInk THINK THINK THINK ThInk THINK



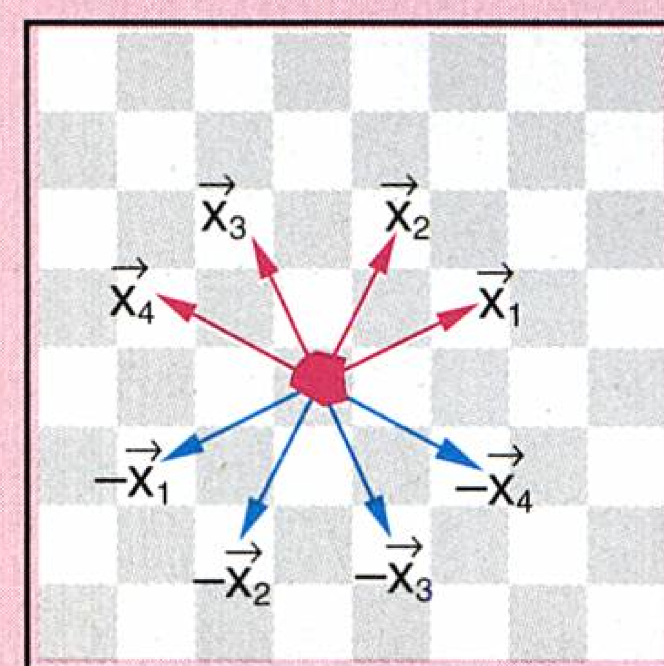
1372. Eine Pferdegeschichte:

Ein schwarzes Rössel stand einst auf einem Schachbrett ganz mutterseelenallein. Plötzlich erblickte es neben sich ein wunderschönes, weißes Pferd. Da sprach es zu sich: „*Wie könnte es mir glücken, auf das selbe Feld wie meine weiße Kollegin zu gelangen. Dann wäre mir nicht so stinklangweilig. Könnte ich mich bewegen wie mein Freund der Turm, so müsste ich bloß ein Feld waagrecht fahren und wäre schon am Ziel. Aber mit meinem Herumgehüpfe brauche ich doch eine Ewigkeit!*"

Aus lauter Kummer begann unser schwarzes Pferdchen ein spannendes Buch über Vektorrechnung zu lesen. Kaum hatte es die ersten Seiten verschlungen, da wieherte es laut vor Freude: „*Heureka, jetzt weiß ich endlich, wie ich mit nur drei Sprüngen mein Ziel erreiche.*"

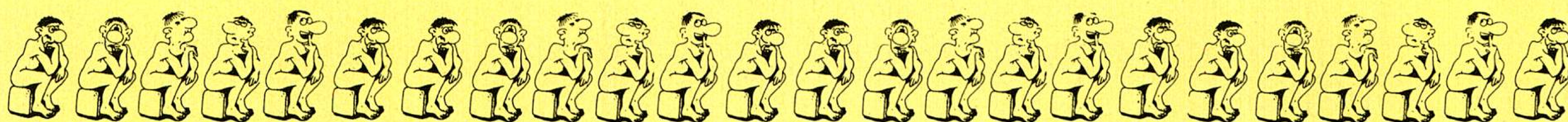
Gesagt, getan, machte sich das Rössel auf den Weg. Wie musste es springen?

Die 8 Rösselsprünge lassen sich durch 4 Vektoren darstellen:



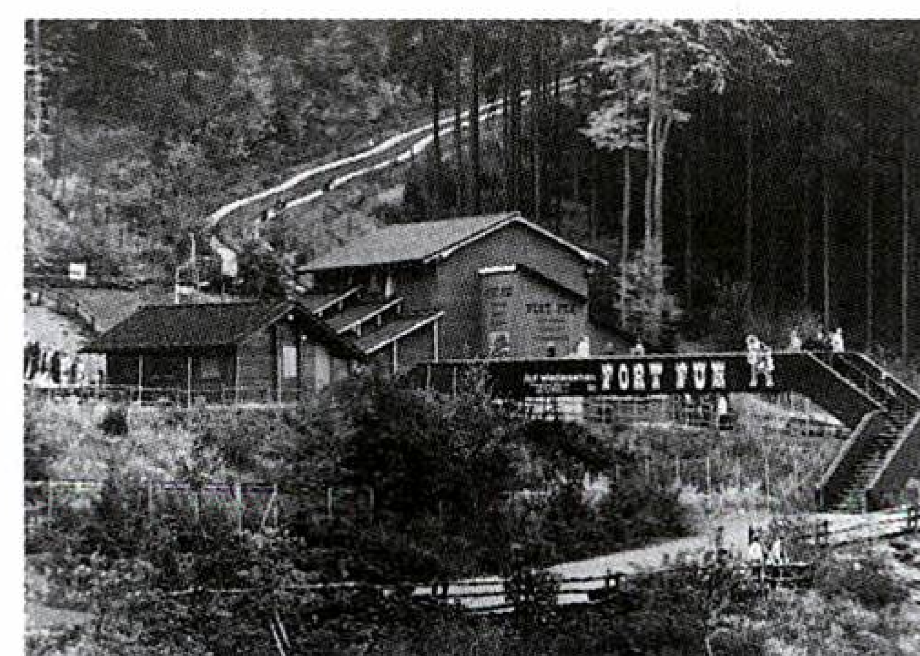
$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$



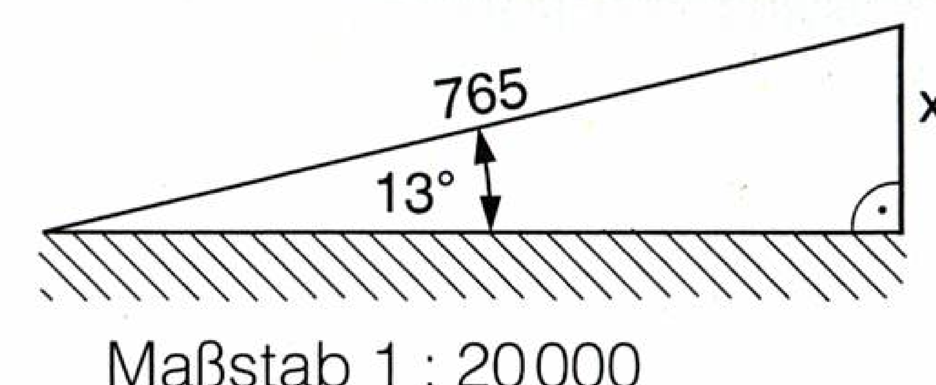
TRIGONOMETRIE

1. Trigonometrische Funktionen spitzer Winkel



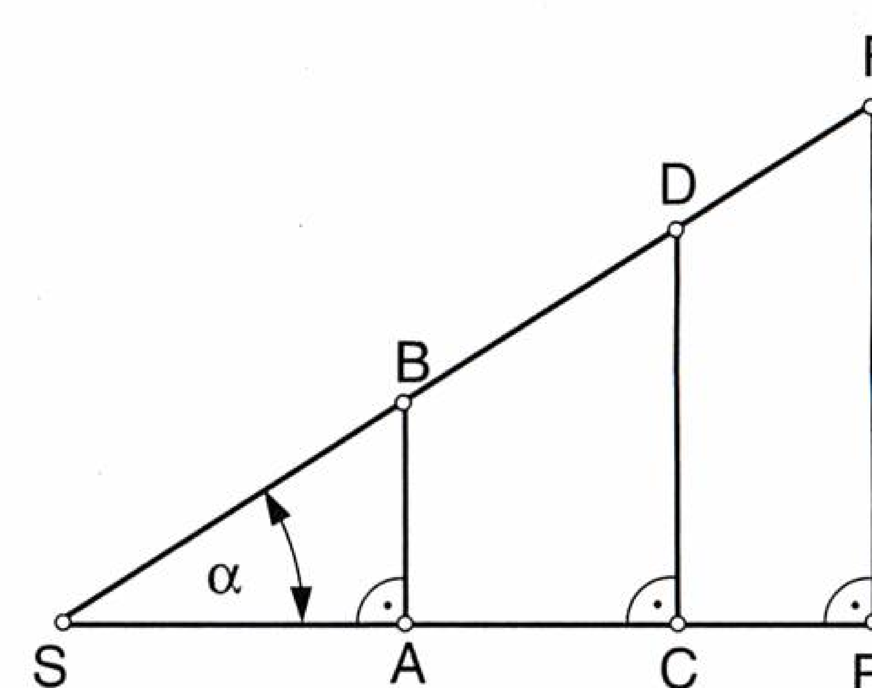
Die auf dem Foto abgebildete Rutschbahn befindet sich in Gevelinghausen/ Sauerland. Sie ist 765 m lang und hat eine Neigung von 13°. Wie kann man ermitteln, welcher Höhenunterschied auf dieser Rutschbahn überwunden wird?

Wir fertigen eine maßstabgerechte Skizze an (vgl. Außenspalte) und bestimmen den Höhenunterschied x durch Messung.



Maßstab 1 : 20000

x = 170 m — Nun, sehr genau wird die Sache ja nicht! Gibt es eine rechnerische Methode, um x genauer zu bestimmen? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir einige theoretische Überlegungen anstellen.



In der nebenstehenden Figur (rechtwinkelige Dreiecke) gilt wegen des Strahlensatzes: $\frac{\overline{AB}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{SF}} = \frac{\text{„Gegenkathete" von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$, wobei das Verhältnis $\frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ eine reelle Zahl ist, **welche nur vom Winkel α abhängt.** Wir bezeichnen diese Zahl mit **sin α** und nennen sie den **„Sinus von α"**.

Nochmals: Für einen bestimmten spitzen Winkel α — z. B. für α = 13° — ist das Verhältnis $\frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ eine reelle Zahl.

Wenn es uns nun gelingt, diese Zahl — also den Sinus von 13° (kurz: sin 13°) — zu bestimmen, dann können wir den Höhenunterschied x berechnen:

$$\sin 13° = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{x}{765} \Leftrightarrow \mathbf{x = 765 \sin 13°}$$

Und wie kann man nun sin 13° berechnen?

Man könnte ein entsprechendes Dreieck zeichnen, die Seitenlängen abmessen und dividieren. Genauer wird die Sache mit Methoden der Höheren Mathematik, sogenannten **unendlichen Reihen**. Schon im 16. Jahrhundert wurden diese Werte aber tabellarisch erfasst und mussten bis vor wenigen Jahren in Tabellenbüchern nachgeschlagen werden. Die Entwicklung leistungsfähiger Taschenrechner macht das umständliche und zeitaufwendige Arbeiten mit Tabellenwerken überflüssig.

Zu jedem spitzen Winkel gehört eine eindeutig bestimmte reelle Zahl sin α. Damit ist eine Funktion festgelegt, f: α ↦ sin α, die wir **Sinusfunktion** nennen.

Die Sinusfunktion ist ein typisches Beispiel einer sogenannten **trigonometrischen Funktion**.

Was lässt sich über die Wertemenge W der Sinusfunktion aussagen? Da die Gegenkathete niemals länger als die Hypothenuse ist, gilt: $W_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$

Wir brauchen bloß mit Hilfe der Taste [sin] den Sinus von 13 zu berechnen.

Je nach Gerät ist also z. B. [1] [3] [sin] bzw. [sin] [1] [3] [=] oder eine andere Tastenkombination zu drücken, und wir erhalten 0,2249511.

Sollte der Taschenrechner den Wert 0,20278... oder 0,42016... anzeigen, dann ist er auf **Neugrad** bzw. auf das **Bogenmaß** eingestellt. In diesem Fall ist die Taschenrechnereinstellung auf Altgrad der Gebrauchsanweisung zu entnehmen.

x = 765 sin 13° = 765 · 0,2249511 = **172 m**

Damit haben wir den Höhenunterschied x auf m genau ausgerechnet.

Achtung! Der 8-stellige Taschenrechner zeigt das Ergebnis auf 10^{-5} m an: Es ist sinnlos, diese Genauigkeit (die im Bereich von $\frac{1}{100}$ mm liegt!) anzuwenden.

Definition:

$\sin\alpha$[1] $\overset{DEF}{=} \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha$[2] $\overset{DEF}{=} \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$

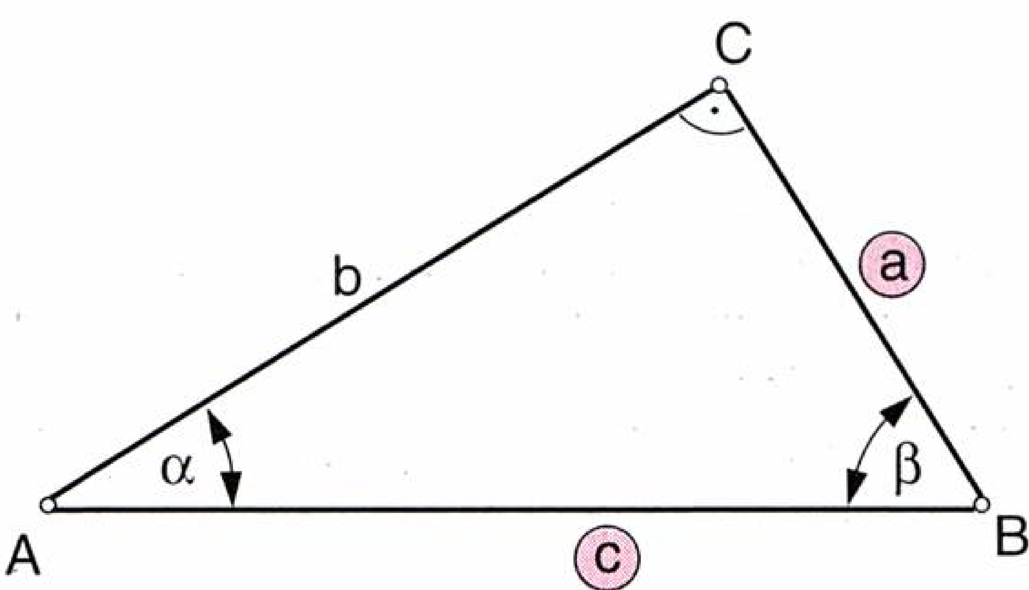
$\tan\alpha$[3] $\overset{DEF}{=} \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$

Zur Ermittlung des Sinuswertes von einem gegebenen Winkel mit Hilfe des Taschenrechners gibt es bei fast allen Geräten eine Taste [sin]. Lediglich die Tastenfolge ist je nach Gerät unterschiedlich.

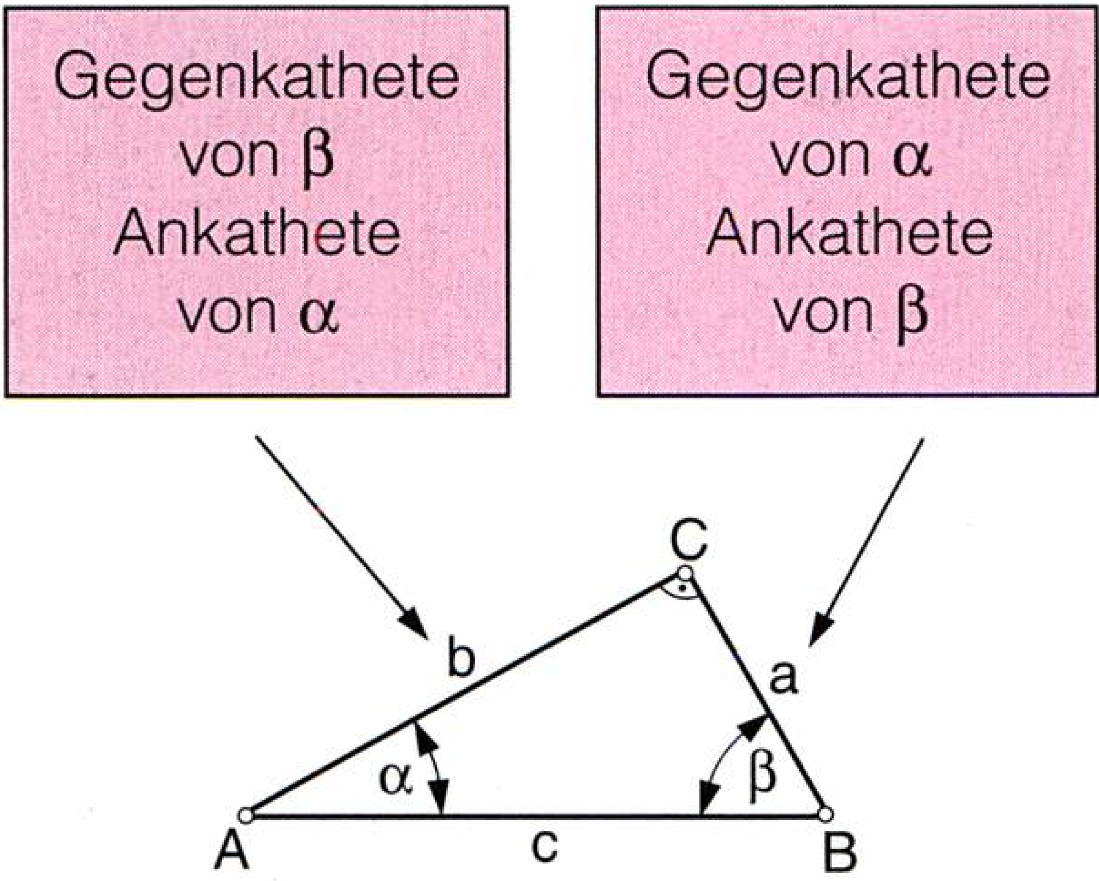
Anders sieht es aus, wenn zu einem gegebenen Sinuswert der zugehörige Winkel zu bestimmen ist. Hier findet man auf manchen Geräten Tasten wie [INV] oder [arc], die zusätzlich zur Taste [sin] zu betätigen sind.

Auf anderen Geräten findet man die Umkehrung der trigonometrischen Funktionen (die sogenannten **Arkusfunktionen**, daher auch die Abkürzung arc) als **„Zweitfunktionen"**, die mit Hilfe der Taste [2nd] aktiviert werden können. Die Zweitfunktionen werden dann z. B.mit [invsin], [arcsin] oder [$\sin^{-1}$] bezeichnet.

Die obigen Feststellungen gelten sinngemäß auch für die Kosinus- und Tangensfunktionen und deren Umkehrung.



Wir wissen bereits: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$. Analog legen wir auch andere Seitenverhältnisse am rechtwinkeligen Dreieck fest — vgl. nebenstehende Definition.



$\sin\beta = \cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\cos\beta = \sin\alpha = \frac{a}{c}$

Wenn $\sin\alpha = 0{,}5$ ist, wie groß ist dann α?

Es liegt also der Fall vor, dass zu einem gegebenen Funktionswert das Argument zu ermitteln ist. In der Außenspalte finden sich einige Hinweise, welche Taschenrechnertasten zur Lösung dieses Problems verwendet werden können.

Unter Verwendung der für den jeweils vorhandenen Taschenrechner gültigen Tastenfolge ist zu prüfen: $\sin\alpha = 0{,}5 \Leftrightarrow \alpha = 30°$

$\cos\alpha = 0{,}2682 \Leftrightarrow \alpha = 74{,}443°$

$\tan\alpha = 17189 \Leftrightarrow \alpha = 89{,}997°$

Der Taschenrechners zeigt uns also für eine sogenannte **„goniometrische Gleichung"** der Form $\sin\alpha = a$, $\cos\alpha = a$, $\tan\alpha = a\ (a \in \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$ genau eine Lösung an. Später werden wir erkennen: Es gibt für goniometrische Gleichungen der obigen Form in $\mathbb{R}$ keineswegs eine eindeutige Lösung!

Zahlreiche Probleme der Technik, Nautik, Physik und Landesvermessung machen die Berechnung von Dreiecken notwendig. Da sich jedes allgemeine Dreieck in zwei rechtwinkelige Dreiecke zerlegen lässt, müssen wir uns zunächst mit der vollständigen Berechnung des rechtwinkeligen Dreiecks vertraut machen.

2. Berechnungen am rechtwinkeligen Dreieck

Beispiel:

Von einem rechtwinkeligen Dreieck sind die Kathete $a = 22{,}4$ cm und die Hypotenuse $c = 42{,}4$ cm gegeben. Man berechne die fehlenden Umfangstücke[4] und den Flächeninhalt des Dreiecks!

Lösung:

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{22{,}4}{42{,}4} \Rightarrow \alpha = \mathbf{31{,}9°}$

$\beta = 90° - \alpha = 90° - 31{,}9° \Rightarrow \beta = \mathbf{58{,}1°}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b = c \cdot \cos\alpha = 42{,}4 \cos 31{,}9° = 36$ **b = 36 cm**

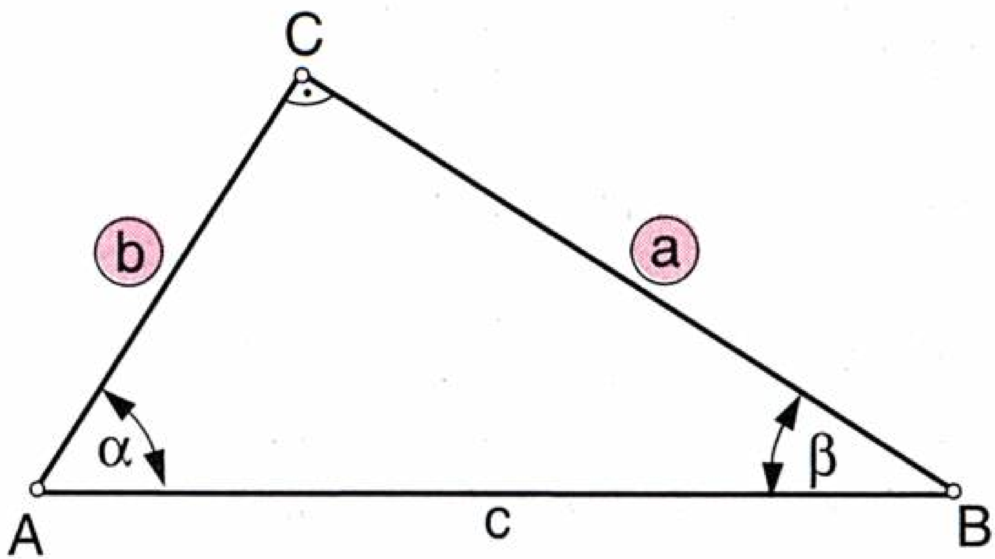
Probe:

$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{42{,}4^2 - 22{,}4^2} = 36$

$A = \frac{a\sqrt{c^2 - a^2}}{2} = \frac{22{,}4 \cdot 36}{2} = 403{,}2$ **A = 403,2 cm²**

[1]) gesprochen: Sinus von Alpha; Plural: Sinus mit lang auszusprechendem u.
[2]) gesprochen: Kosinus von Alpha; Plural: Kosinus mit lang auszusprechendem u.
[3]) gesprochen: Tangens von Alpha; Plural: Tangens.
[4]) Darunter versteht man die Seitenlängen und die Größen der Winkel.

Beispiel:
Von einem rechtwinkeligen Dreieck sind die beiden Katheten $a = 81\,mm$ und $b = 50{,}4\,mm$ gegeben. Man berechne die fehlenden Umfangstücke und den Flächeninhalt des Dreiecks!



Lösung:

$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{81}{50{,}4} \Rightarrow \alpha = \mathbf{58{,}1^\circ}$

$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 58{,}1^\circ \Rightarrow \beta = \mathbf{31{,}9^\circ}$

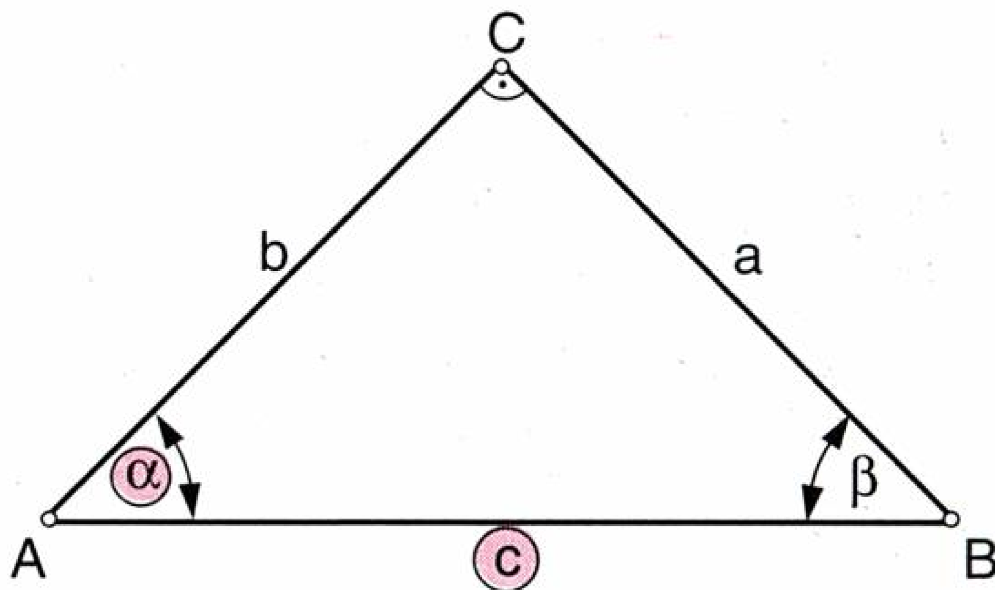
$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Leftrightarrow c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{81}{\sin 58{,}1^\circ} = 95{,}4$ $\qquad$ $c = 95{,}4\,mm$

Probe:

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{81^2 + 50{,}4^2} = 95{,}4$

$A = \frac{ab}{2} = \frac{81 \cdot 50{,}4}{2} = 2041{,}2$ $\qquad$ $A = 2041{,}2\,mm^2$

Beispiel:
Von einem rechtwinkeligen Dreieck sind die Hypotenuse $c = 56{,}5\,cm$ und der Winkel $\alpha = 44{,}5^\circ$ gegeben. Man berechne die fehlenden Umfangstücke und den Flächeninhalt des Dreiecks!



Lösung:

$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 44{,}5^\circ \Rightarrow \beta = \mathbf{45{,}5^\circ}$

$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Leftrightarrow a = c \cdot \sin\alpha = 56{,}5 \sin 44{,}5^\circ = 39{,}6$ $\qquad$ $a = 39{,}6\,cm$

$\cos\alpha = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b = c \cdot \cos\alpha = 56{,}5 \cos 44{,}5^\circ = 40{,}3$ $\qquad$ $b = 40{,}3\,cm$

Probe:

$\sqrt{a^2 + b^2} = c \Leftrightarrow \sqrt{39{,}6^2 + 40{,}3^2} = 56{,}5$

$A = \frac{c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2} = \frac{56{,}5^2 \sin 44{,}5^\circ \cdot \cos 44{,}5^\circ}{2} = 797{,}94$ $\qquad$ $A = 797{,}94\,cm^2$

Die folgende Tabelle ist zu erklären:[1]

gesucht / gegeben	a	b	c	α	β	A
a, c		$\sqrt{c^2 - a^2}$		$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$\cos\beta = \frac{a}{c}$	$\frac{a\sqrt{c^2 - a^2}}{2}$
a, b			$\sqrt{a^2 + b^2}$	$\tan\alpha = \frac{a}{b}$	$\tan\beta = \frac{b}{a}$	$\frac{ab}{2}$
c, α	$c \cdot \sin\alpha$	$c \cdot \cos\alpha$			$90^\circ - \alpha$	$\frac{c^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2}$
a, α		$\frac{a}{\tan\alpha}$	$\frac{a}{\sin\alpha}$		$90^\circ - \alpha$	$\frac{a^2}{2 \cdot \tan\alpha}$
b, α	$b \cdot \tan\alpha$		$\frac{b}{\cos\alpha}$		$90^\circ - \alpha$	$\frac{b^2 \cdot \tan\alpha}{2}$

Berechnung am rechtwinkeligen Dreieck:

Funktionspaket festlegen

Kommt die Hypotenuse vor?

Ja (sin-Fkt) — (tan-Fkt) Nein

Die Kathete liegt dem Winkel gegenüber?

Ja — Nein

Sinus — Cosinus — Tangens

Definition der bestimmten Funktion als Ansatz anschreiben

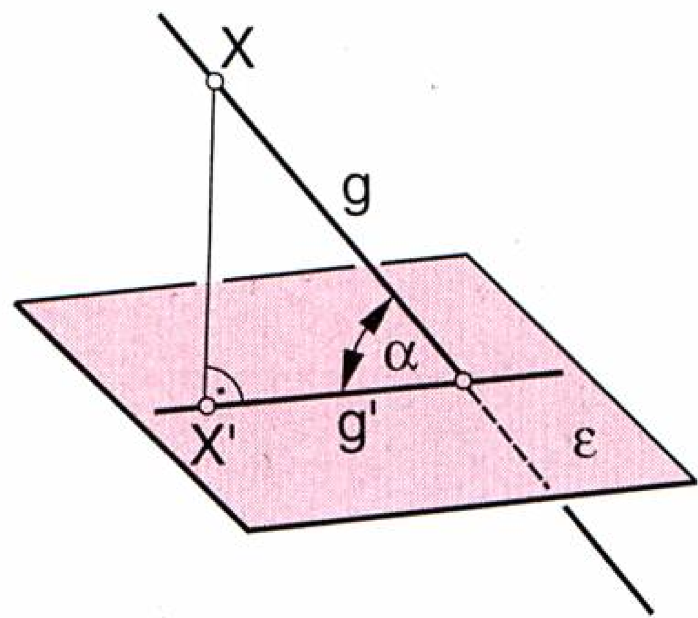
[1]) Damit sind alle Möglichkeiten der Berechnung des rechtwinkeligen Dreiecks erfasst.

3. Stereometrisch-trigonometrische Aufgaben

Bei trigonometrisch zu lösenden Aufgaben aus der Stereometrie tritt wiederholt der Begriff des **„Neigungswinkels"** auf:

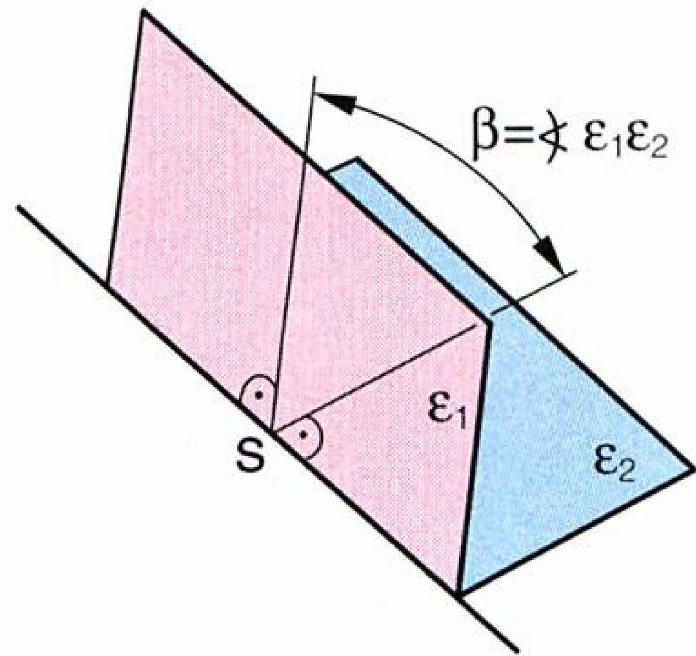
(1) Neigungswinkel einer Geraden g gegen eine Bezugsebene ε — vgl. Figur (1).

(1) $\alpha = \sphericalangle(g, \varepsilon) = \sphericalangle(g, g')$

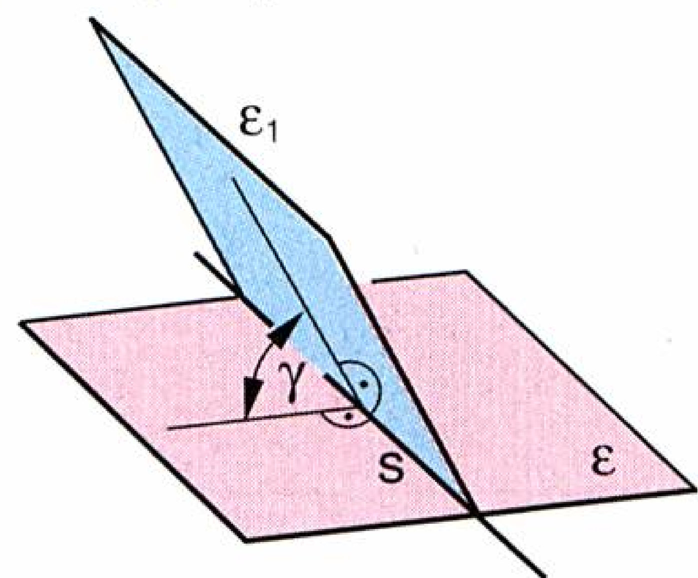


(2) Neigungswinkel zweier Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ zueinander — vgl. Figur (2a). Eine der beiden Ebenen kann auch die Rolle einer Bezugsebene ε spielen (Grundfläche, Basisfläche) — vgl. Figur (2b).

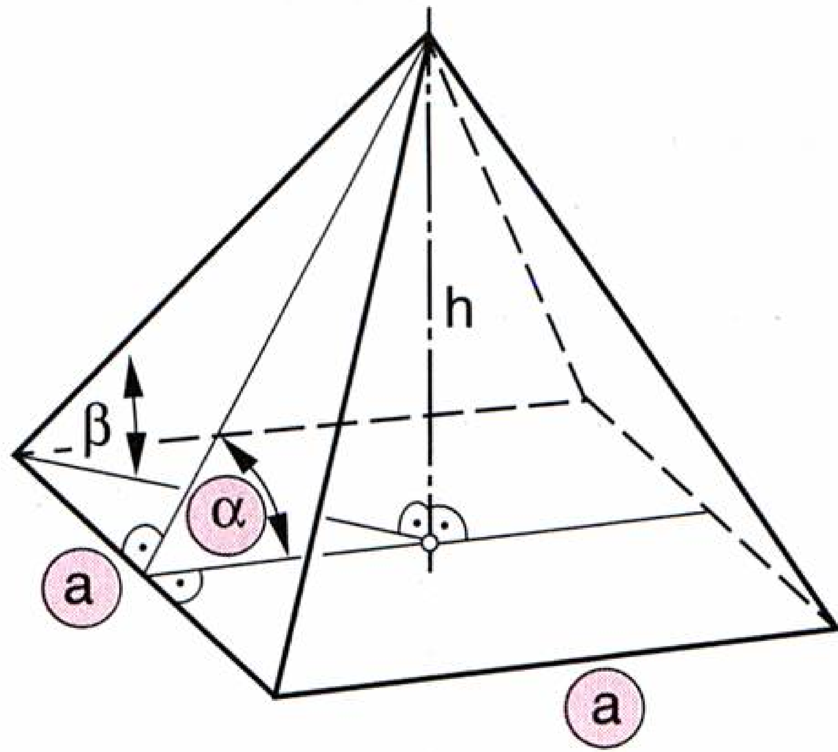
(2a) $\beta = \sphericalangle(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$



(2b) $\gamma = \sphericalangle(\varepsilon, \varepsilon_1)$



Beispiel:
Man berechne **a)** das Volumen V **b)** den Neigungswinkel β der Seitenkante der Cheopspyramide, wenn die Grundkantenlänge $a = 230\,\text{m}$ und der Neigungswinkel der Seitenflächen $\alpha = 52°$ bekannt sind!



Lösung:

a) $\tan\alpha = \frac{2h}{a} \Leftrightarrow h = \frac{a}{2}\tan\alpha$

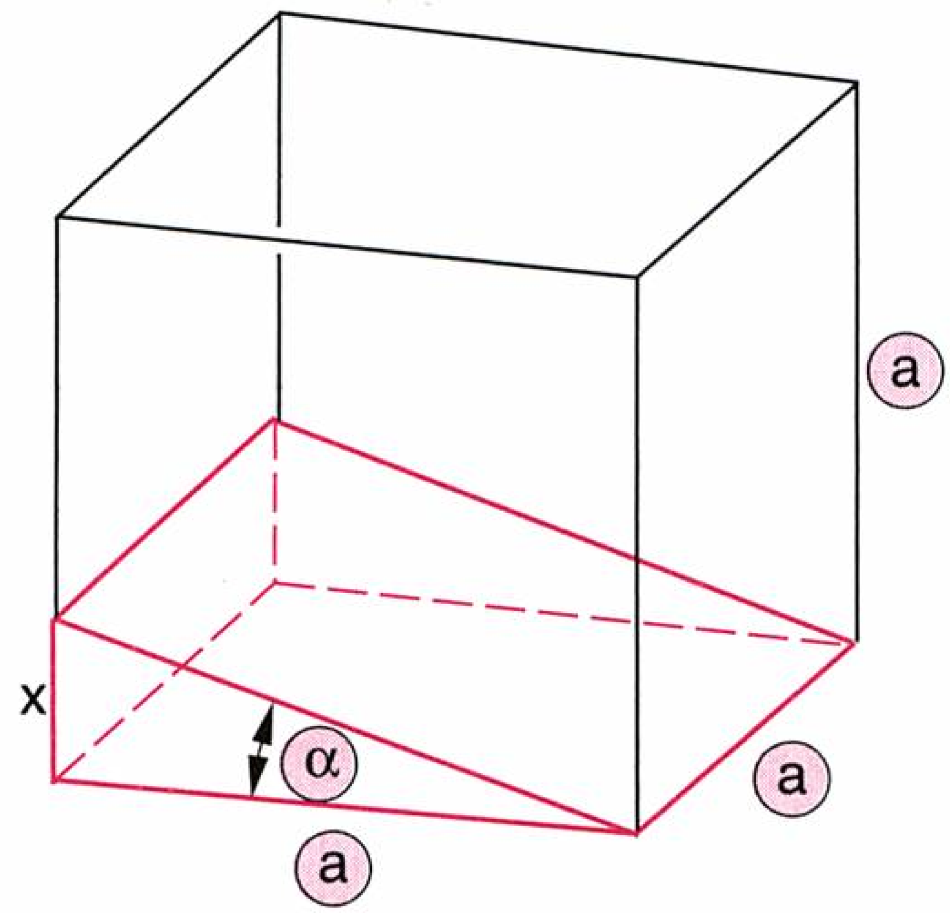
$$V = \frac{a^2 h}{3} = \frac{a^3}{6}\tan\alpha = \frac{230^3}{6}\tan 52° = 2{,}596 \cdot 10^6$$

$$V = 2{,}6 \cdot 10^6\ \text{m}^3$$

b) $\tan\beta = \frac{2h}{d} = \frac{2h}{a\sqrt{2}} = \frac{2a \cdot \tan\alpha}{2a\sqrt{2}} = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{\tan 52°}{\sqrt{2}} \Rightarrow \beta = 42°$

Die Cheopspyramide war die größte bei Gizeh (südwestlich von Kairo/Ägypten) gelegene Pyramide. Nach ihrer Fertigstellung — um 2580 v. Chr. — war sie 146,50 m hoch, jetzt ist sie (nach Abbröckeln der obersten Steine) nur noch 137 m hoch. Rund 4000 Arbeiter waren mit der Errichtung der Cheopspyramide 30 Jahre lang beschäftigt.

Übrigens: Beziehen sich die gegebenen Werte des obigen Beispiels auf die ursprüngliche Größe oder auf die heutige Größe der Cheopspyramide?



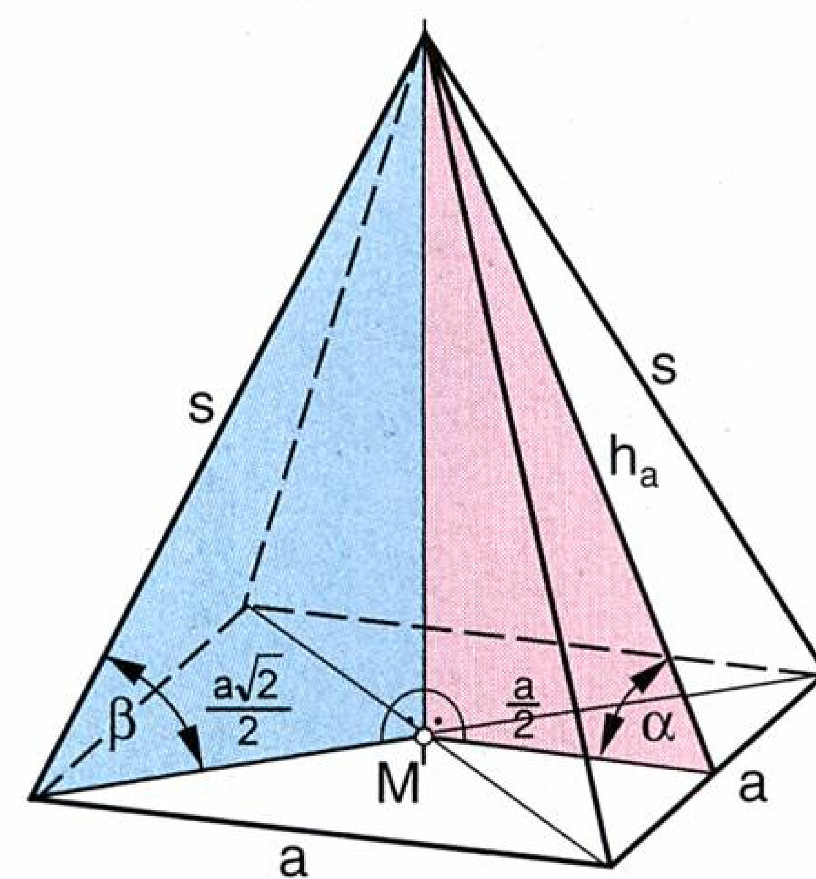
Beispiel:
Durch die Grundkante des Würfels mit der Kantenlänge $a = 10\,\text{cm}$ wird eine Ebene unter dem Winkel $\alpha = 5{,}1°$ gelegt. Wie groß ist der Rauminhalt des kleineren dadurch entstehenden Teils?

Lösung:
Es entsteht ein Prisma, dessen Volumen V zu ermitteln ist!

$\tan\alpha = \frac{x}{a} \Leftrightarrow x = a \cdot \tan\alpha$

$V = \frac{axa}{2} = \frac{a^3}{2}\tan\alpha = \frac{10^3}{2}\tan 5{,}1° = 44{,}62$ $\qquad V = 44{,}6\ \text{cm}^3$

Beispiel:
Die Mantelfläche einer geraden, quadratischen Pyramide ist doppelt so groß wie ihre Grundfläche. Wie groß ist **a)** der Neigungswinkel α der Seitenfläche **b)** der Neigungswinkel β der Seitenkante gegen die Grundfläche?



Lösung:

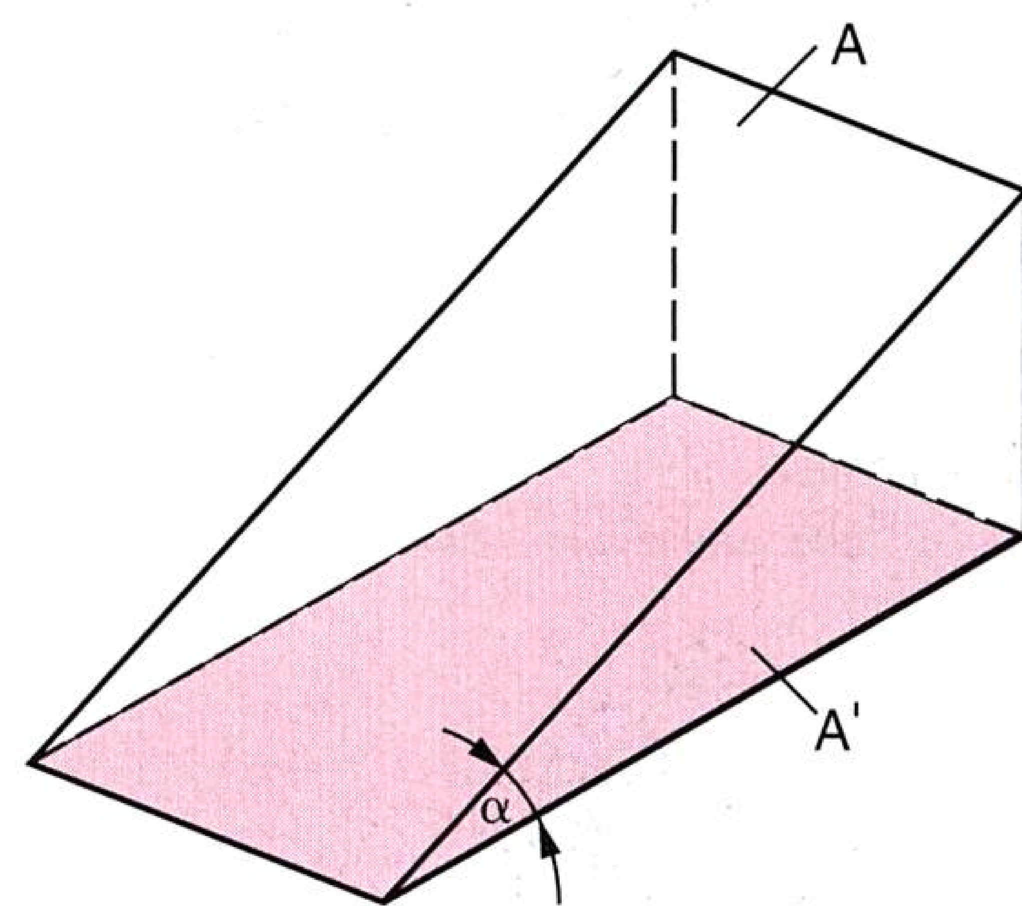
$M = 2ah_a$, $G = a^2$, $M = 2G \Leftrightarrow 2ah_a = 2a^2$ $\qquad h_a = a$

a) $\cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{h_a} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$ $\qquad \alpha = 60°$

b) $s = \sqrt{h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$

$\cos\beta = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{s} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow \beta = 50{,}768°$ $\qquad \beta = 50{,}8°$

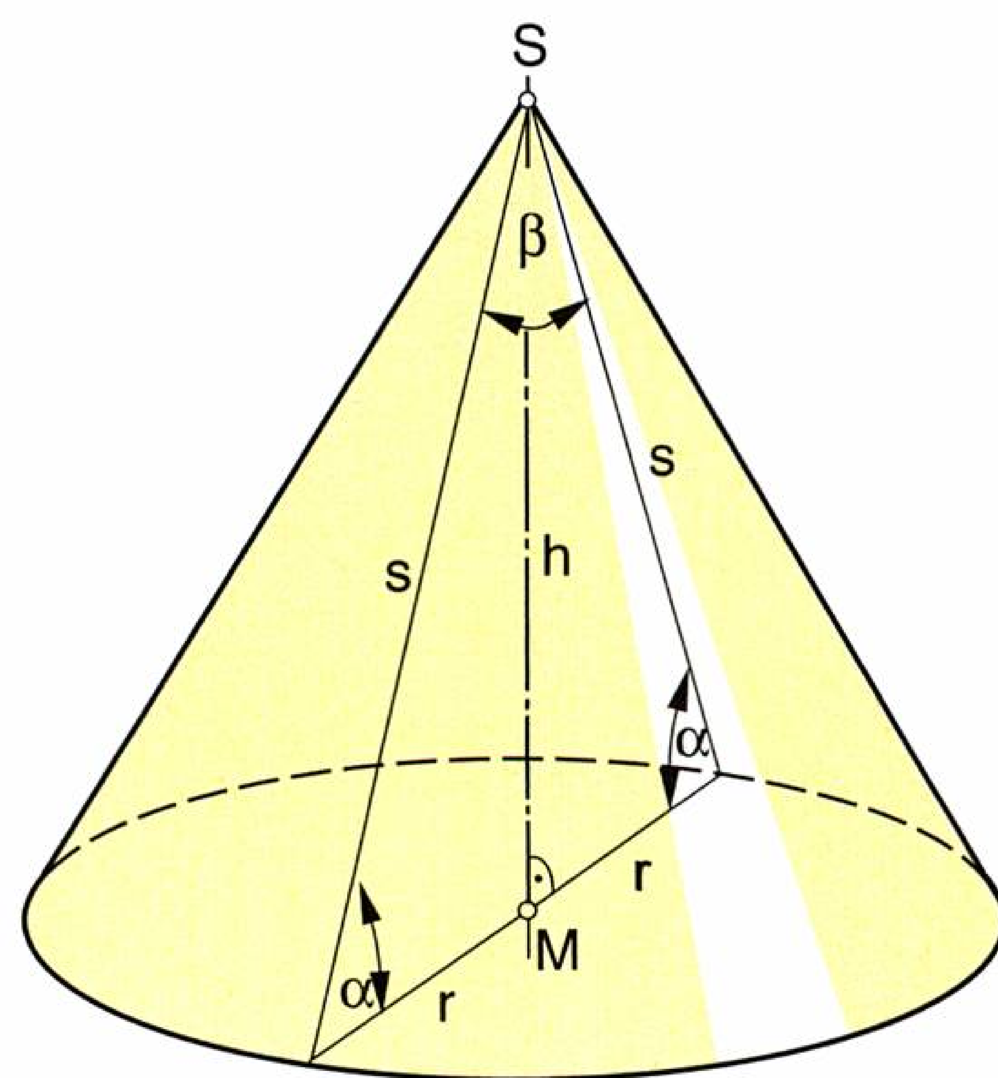
Bei stereometrisch-trigonometrischen Aufgaben kommt oftmals der **Flächenprojektionssatz** zur Anwendung:



Wenn ein beliebiges Flächenstück in allen seinen Punkten unter dem selben Winkel α gegen die Horizontalebene geneigt ist, dann besteht zwischen seinem Flächeninhalt A und dem Inhalt A′ seiner Projektion auf diese Ebene die folgende Beziehung:

$$A' = A \cdot \cos\alpha$$

Beispiel:
Ein Drehkegel mit der Mantelfläche 420 cm² hat die Grundfläche 122 cm². Der Neigungswinkel einer Mantelerzeugenden mit der Grundfläche ist zu berechnen!



Lösung:

Wir verwenden den **„Flächenprojektionssatz“**: Der Kegelmantel ist in allen seinen Punkten unter dem selben Winkel α gegen die Horizontalebene geneigt: A = 420. Der Flächeninhalt A′ seiner Projektion auf diese Ebene ist identisch mit seiner Grundfläche: A′ = 122

Flächenprojektionssatz:

$A' = A \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{A'}{A} = \frac{122}{420} \ldots \Rightarrow \alpha = 73{,}1°$

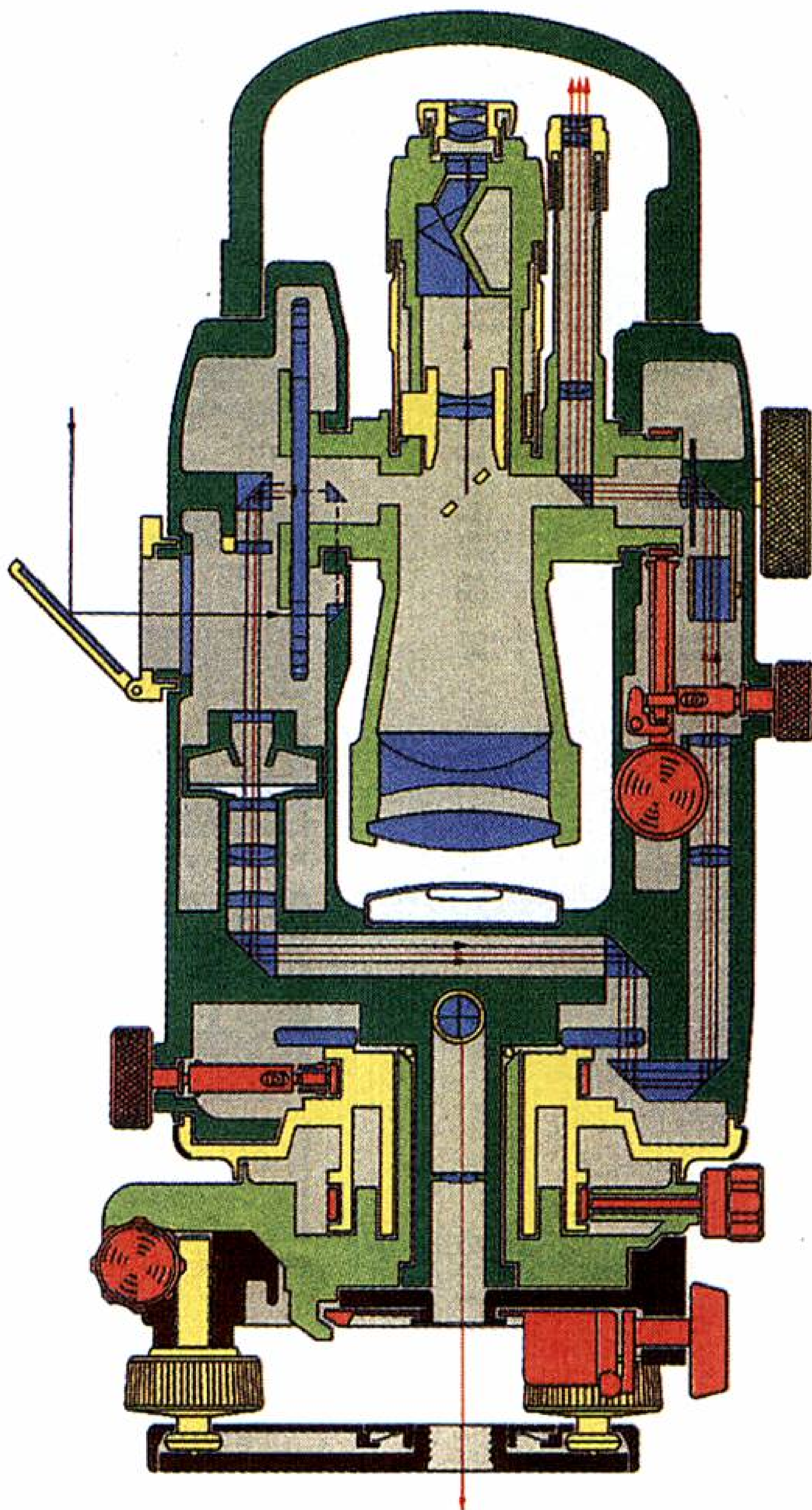
Beispiel:
Unter Verwendung des Flächenprojektionssatzes ist zu zeigen, dass für den Drehkegel $M = \pi rs$ gilt.

Lösung:

$A = M, \quad A' = \pi r^2, \quad \cos\alpha = \frac{r}{s}$

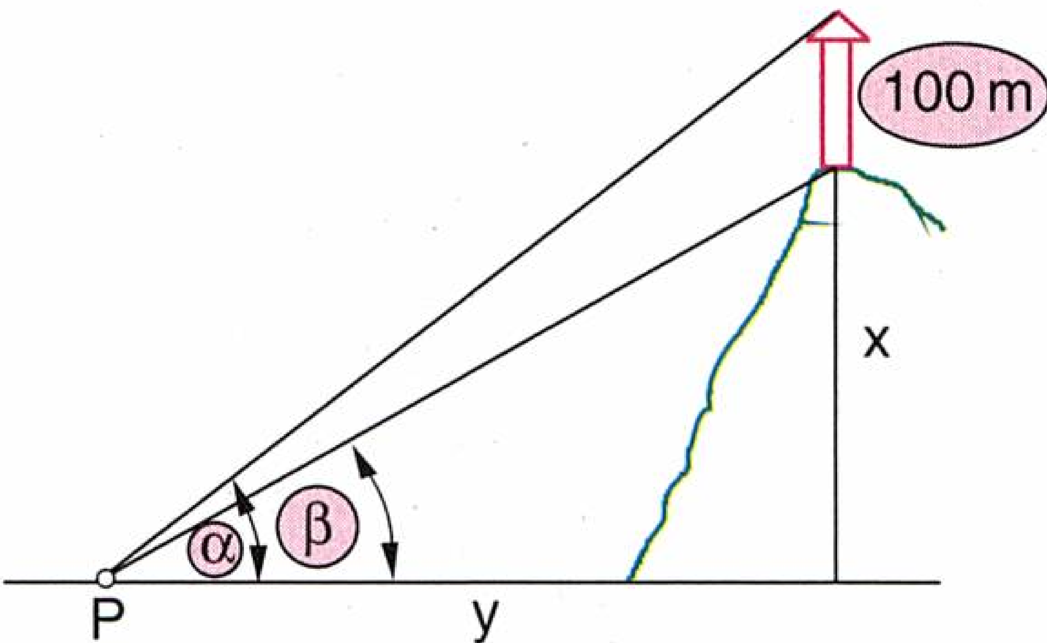
$A' = A \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow A = \frac{A'}{\cos\alpha} = \frac{\pi r^2}{\cos\alpha} = \pi r^2 \cdot \frac{s}{r} = \pi rs$ $\qquad M = \pi rs$

Querschnitt eines Theodoliten:

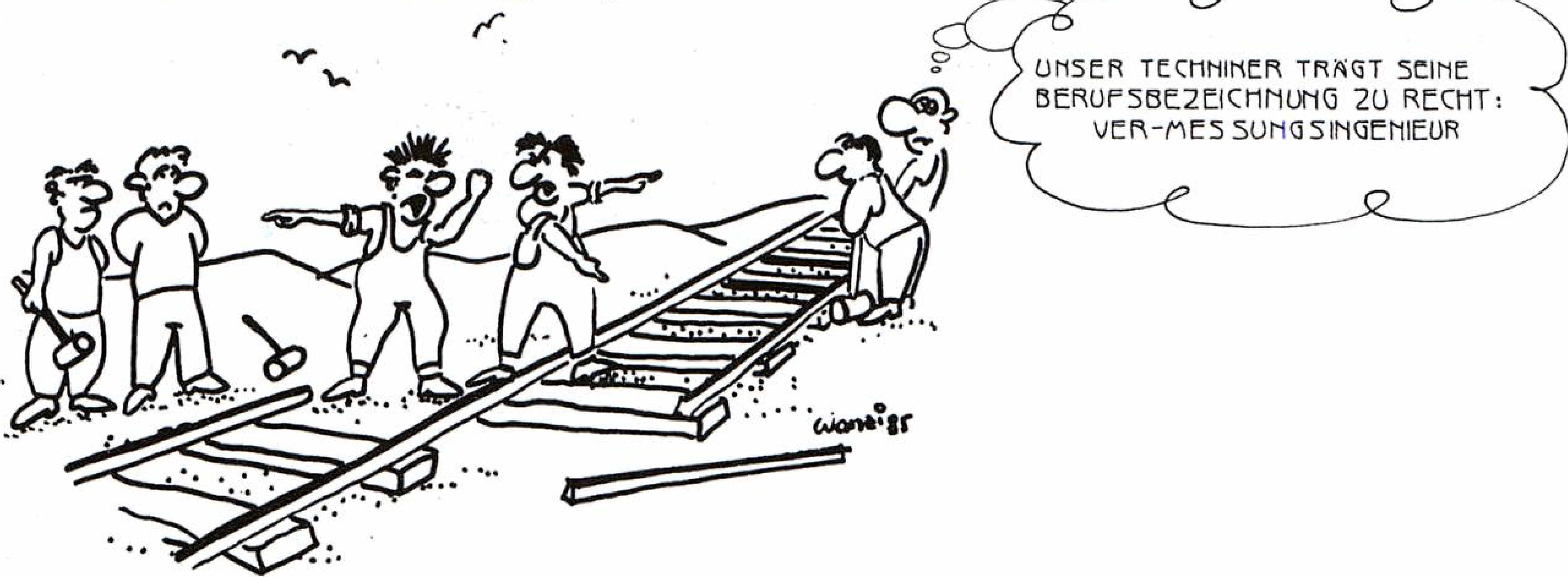


Trotz der Entwicklung der elektronischen Entfernungsmessung sowie von Satellitenmessverfahren, welche beide die Anwendung des Theodoliten etwas reduziert haben, bleibt dieser das charakteristische Berufswerkzeug der Vermessungstechniker(innen).

Der Theodolit besteht unter anderem aus einem Zielfernrohr, das in einer Höhe h über dem Gelände liegt. Der Einfachheit halber verzichten wir wenn keine diesbezügliche Angabe erfolgt auf die Berücksichtigung der Instrumentenhöhe des Theodoliten.



4. Praktische Anwendungen (Vermessungsaufgaben, Höhenmessungen)

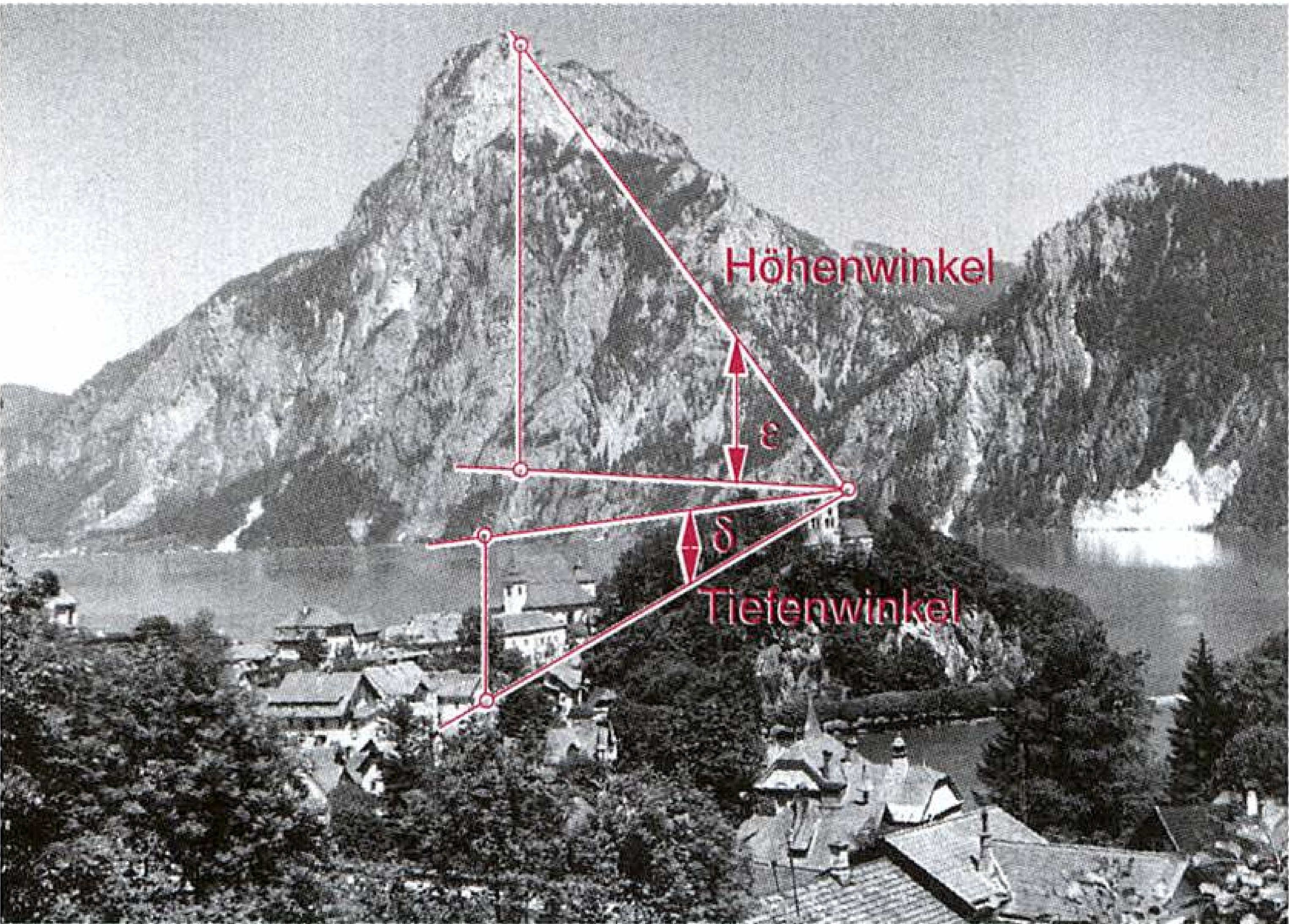


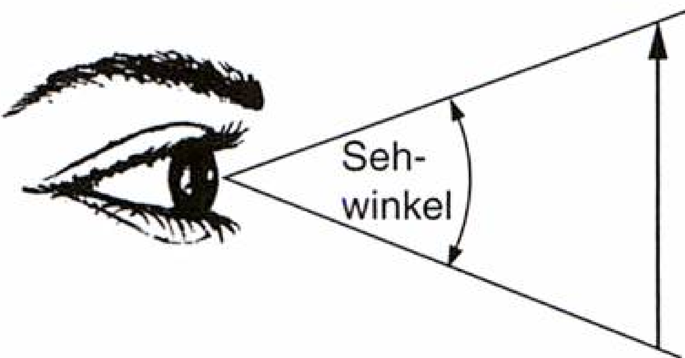
In der Vermessungstechnik muss man Winkel mit hoher Genauigkeit messen und abstecken. Dazu verwendet man den **Theodoliten** — vgl. Querschnittszeichnung in der Außenspalte.

Bei unseren einfachen Vermessungsaufgaben unterscheiden wir folgende Winkel:

— **Höhenwinkel (Elevationswinkel)**
— **Tiefenwinkel (Depressionswinkel)**
} Ein Schenkel ist immer die Horizontale!

— **Sehwinkel (Gesichtswinkel)**, das ist jener Winkel, den die von den Enden eines Gegenstands zu der Pupille des Auges oder des Objektivs eines optischen Instrumentes gezogenen Geraden einschließen.





Beispiel:

Ein vertikaler 100 m hoher Mast steht auf der Spitze eines Berges. Fußpunkt und Spitze des Mastes werden von einem Beobachtungspunkt P des Tales aus unter den Höhenwinkel $\alpha = 12{,}4°$ und $\beta = 11{,}3°$ gesehen. In welcher Höhe über der Horizontalebene des Beobachters befindet sich die Spitze des Berges?

Lösung:

$$\tan\alpha = \frac{100 + x}{y} \Leftrightarrow y = \frac{100 + x}{\tan\alpha}$$

$$\tan\beta = \frac{x}{y} \Leftrightarrow y = \frac{x}{\tan\beta}$$

$$\frac{100 + x}{\tan\alpha} = \frac{x}{\tan\beta} \Leftrightarrow (100 + x)\cdot\tan\beta = x\cdot\tan\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{100\cdot\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} = \ldots = 996{,}88 \qquad x = 997\text{ m}$$

Beispiel:
Auf einer horizontalen Ebene steht ein Haus und ihm gegenüber ein 20 m hoher Mast. Von einem Fenster des Hauses (Beobachtungspunkt P) sieht man die Spitze des Mastes unter dem Höhenwinkel $\alpha = 8{,}5°$ und dessen Fußpunkt unter dem Tiefenwinkel $\beta = 2{,}9°$. Wie hoch liegt der Beobachtungspunkt über der Horizontalebene?

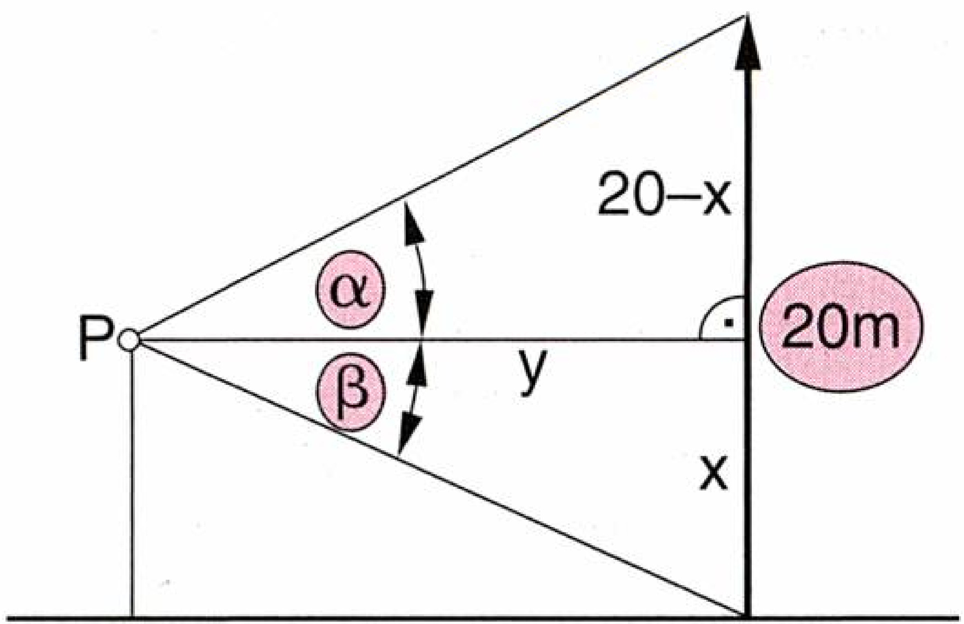
Lösung:

$$\tan\alpha = \frac{20-x}{y} \Leftrightarrow y = \frac{20-x}{\tan\alpha}$$

$$\tan\beta = \frac{x}{y} \Leftrightarrow y = \frac{x}{\tan\beta}$$

$$\frac{20-x}{\tan\alpha} = \frac{x}{\tan\beta} \Leftrightarrow (20-x)\cdot\tan\beta = x\cdot\tan\alpha \Leftrightarrow x = \frac{20\cdot\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta} = \ldots = 5{,}06$$

$$x = 5\text{ m}$$



Beispiel:
Welche Flughöhe h hat ein Hubschrauber H, wenn er gleichzeitig von den Beobachtungsstationen A und B in der selben Richtung unter dem Höhenwinkel $\alpha = 23{,}237°$ bzw. $\beta = 34{,}27°$ gesehen wird und die Stationen $c = 400$ m voneinander entfernt sind?

Lösung:

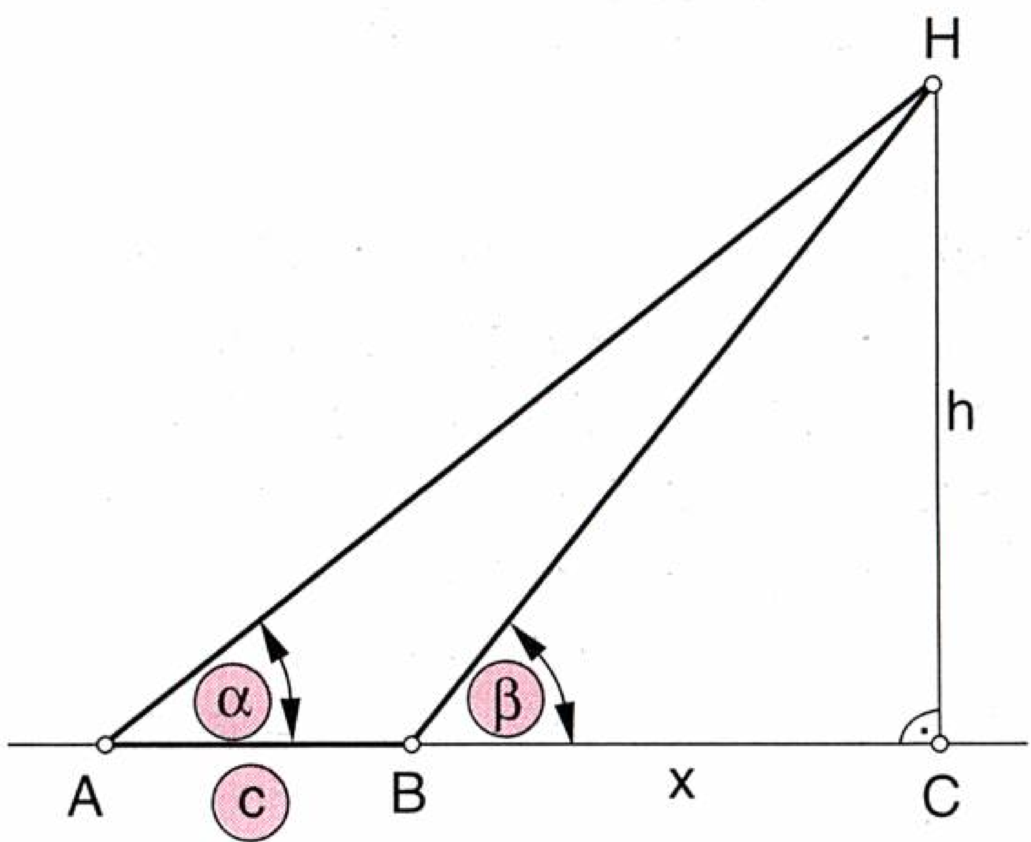
$$\tan\alpha = \frac{h}{c+x} \Leftrightarrow c\cdot\tan\alpha + x\cdot\tan\alpha = h \Leftrightarrow x = \frac{h - c\cdot\tan\alpha}{\tan\alpha}$$

$$\tan\beta = \frac{h}{x} \Leftrightarrow x\cdot\tan\beta = h \Leftrightarrow x = \frac{h}{\tan\beta}$$

$$\frac{h - c\cdot\tan\alpha}{\tan\alpha} = \frac{h}{\tan\beta} \Leftrightarrow h\cdot\tan\beta - c\cdot\tan\alpha\cdot\tan\beta = h\cdot\tan\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(\tan\beta - \tan\alpha) = c\cdot\tan\alpha\cdot\tan\beta \Leftrightarrow h = \frac{c\cdot\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha} = \ldots = 464{,}35$$

$$h = 464{,}35\text{ m}$$



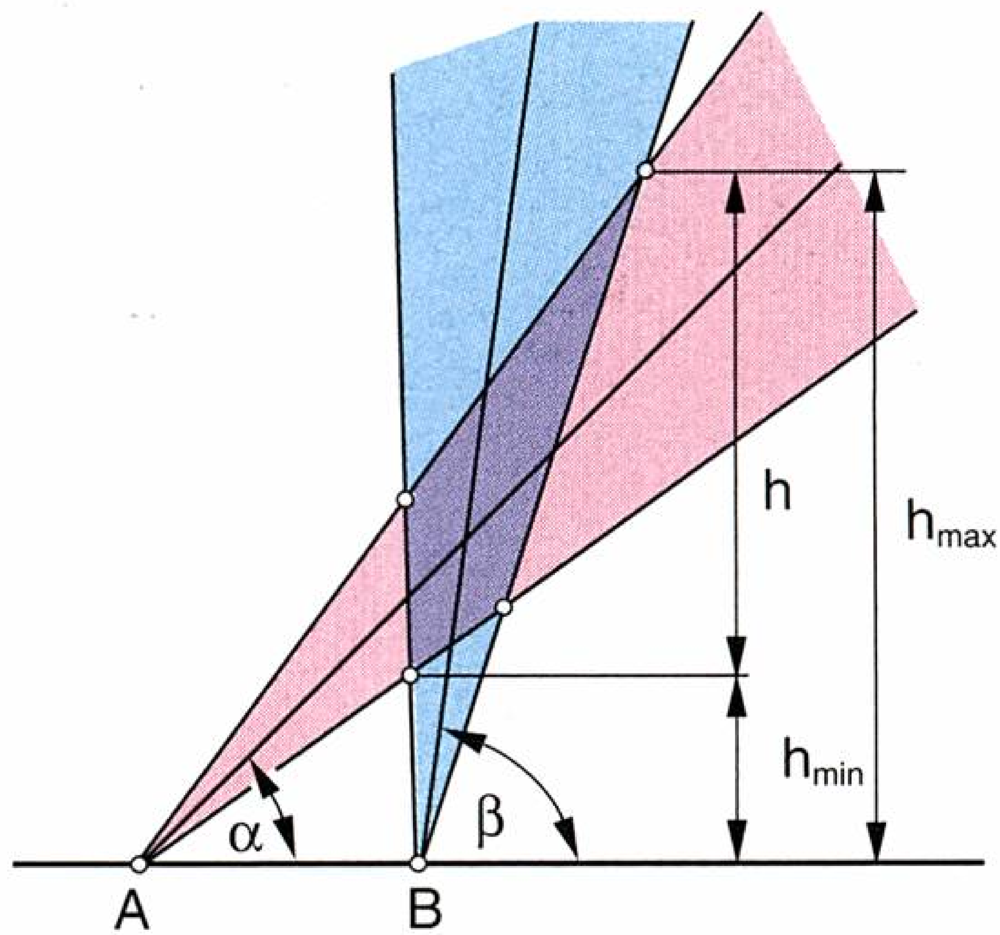
Der Hubschrauber fliegt also in einer Höhe von 464,35 m. Zumindest hat das die Rechnung (die ja mit dem Taschenrechner sehr genau durchgeführt wurde) ergeben. Freilich ist es Bestandteil jeder Problemstellung, das gefundene Resultat kritisch zu analysieren. Dies soll nun geschehen:

— Ein Hubschrauber ist vielleicht 10 m lang, 3 bis 4 m hoch. Wo soll man anvisieren? (10 m Ausdehnung in 400 m Höhe gibt einen Sehwinkel von rund 1°.)

— Sogar im Flachland können die Unebenheiten des Geländes einiges ausmachen. Soll man bis zum Erdboden oder vielleicht nur bis zur Spitze der Grashalme messen?

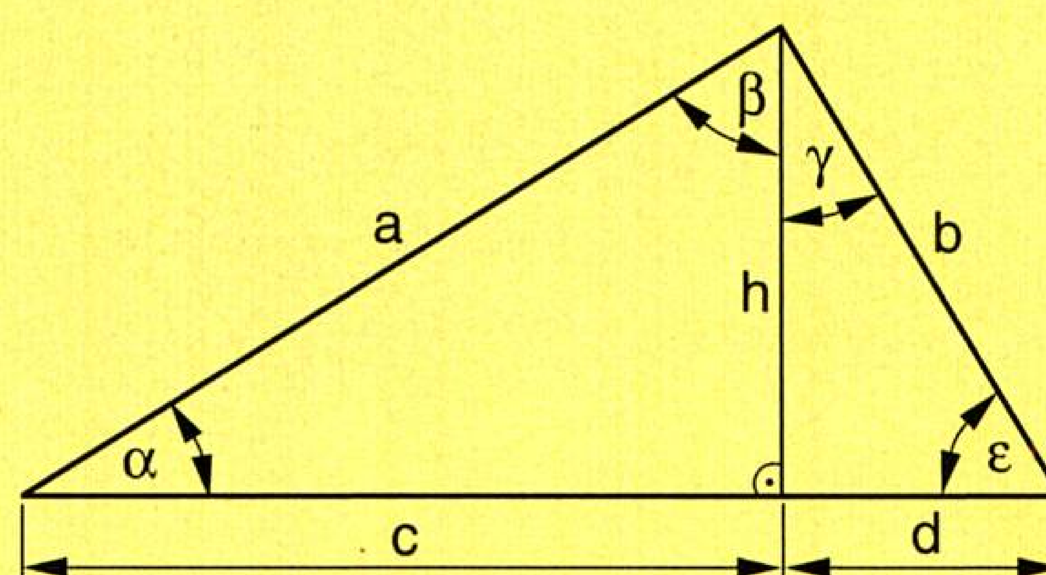
— Die Angabe der Winkel auf Hundertstel bzw. Tausendstel Grad ist wenig sinnvoll. Duch unterschiedliches Anvisieren schwanken die Winkel sicherlich um ± 0,5° und damit die Höhenangaben um ± 4,5 m.

$\alpha = (23 \pm 0{,}5)°$, $\beta = (34 \pm 0{,}5)°$
Gibt es dann eigentlich einen höchsten und tiefsten Punkt für die Flughöhe des Helikopters? Sicherlich! Anhand der nachstehenden Figur kann man diesen Sachverhalt leicht überdenken:

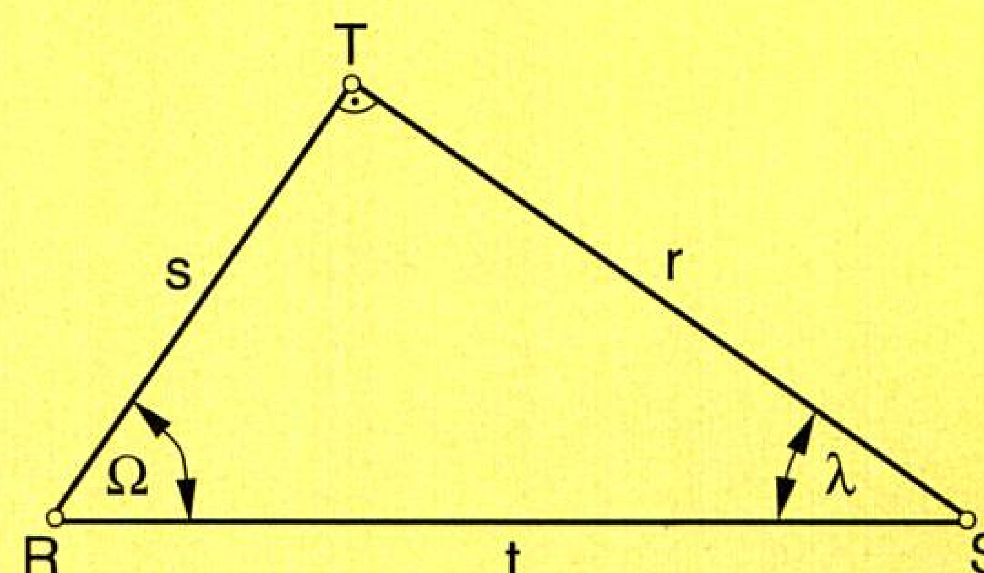


AUFGABEN

1373. Die wahren Aussagen sind anzukreuzen:



- ○ **a)** h ist Gegenkathete von ε.
- ○ **b)** a ist Ankathete von α.
- ○ **c)** c ist Gegenkathete von β.
- ○ **d)** b ist Ankathete von γ.
- ○ **e)** b ist Gegenkathete von α.
- ○ **f)** d ist Gegenkathete von γ.
- ○ **g)** a ist Ankathete von β.
- ○ **h)** h ist Gegenkathete von α.



1374. Der fehlende Text ist einzusetzen:

a) $\sin\Omega = \ldots$ **b)** $\cos\Omega = \ldots$ **c)** $\tan\Omega = \ldots$

d) $\sin\lambda = \ldots$ **e)** $\cos\lambda = \ldots$ **f)** $\tan\lambda = \ldots$

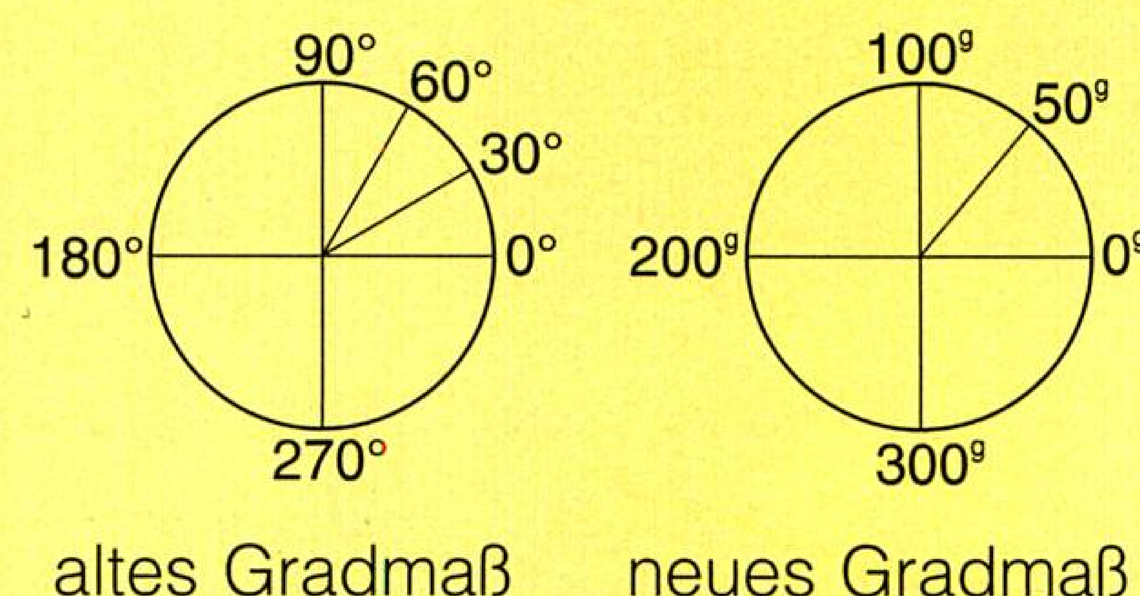
g) Gelten die trigonometrischen Funktionen für **beliebige** Dreiecke? .... (Ja/Nein).

h) Die längste Seite im rechtwinkeligen Dreieck heißt .....

1375. Welche trigonometrische Funktion ist zur Ermittlung eines Winkels anzuwenden, wenn **a)** beide Katheten **b)** Ankathete und Hypotenuse **c)** Gegenkathete und Hypotenuse gegeben sind?

1376. Man berechne mit dem Taschenrechner: **a)** $\sin 77°19'$ **b)** $\tan 7''$ **c)** $15 \cdot \sin 46°$ **d)** $\frac{\cos 18°}{2 \cdot \tan 9°5'}$

1377. Bisher haben wir den Winkel in **(Alt-)Grad** gemessen:



altes Gradmaß neues Gradmaß

> 1 Grad (1°) = $\frac{1}{90}$ des rechten Winkels

Im Vermessungswesen verwendet man oft sogenannte **Neugrad**. Die Einheit des Neugrads ist 1^g (Gon):

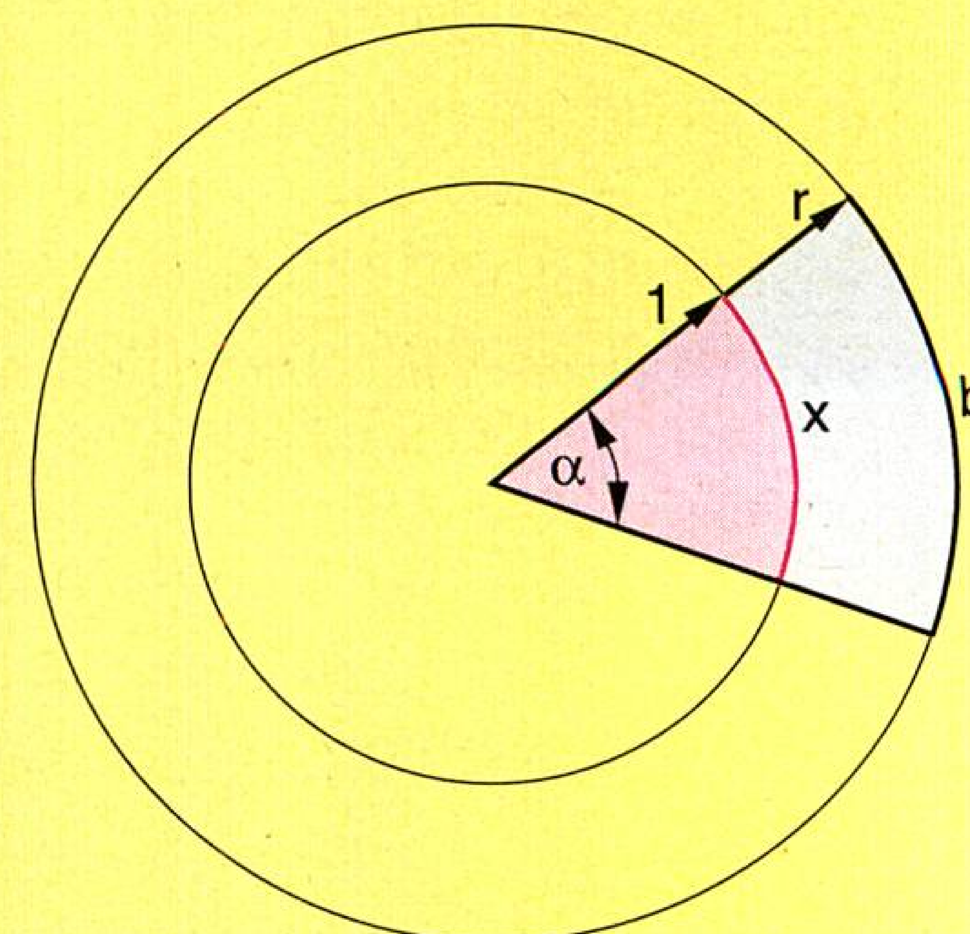
> 1 Neugrad (1^g) = $\frac{1}{100}$ des rechten Winkels

> 1 Neuminute (1^c) = $\frac{1}{100}$ des Neugrads, 1 Neusekunde (1^{cc}) = $\frac{1}{100}$ der Neuminute

Man berechne mit dem Taschenrechner: **a)** $\sin 76^g$ **b)** $\cos 55^g72^c$ **c)** $\tan 1^c98^{cc}$ **d)** $\frac{\sin 92^g}{3 \cdot \tan 1^g2^c}$

1378. Zu jedem Winkel α gehört ein Kreisbogen $b = \frac{\pi r \alpha}{180°}$. Umgekehrt gehört zu jedem Bogen ein Winkel. Die gesamte Länge des Kreisumfangs u zu der Bogenlänge b verhält sich wie der Vollwinkel 360° zu dem Winkelmaß α (in Grad)!

$$\frac{2\pi r}{b} = \frac{360°}{\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{180°\, b}{\pi r} \\ b = \frac{\pi r \alpha}{180°} \end{cases}$$



Die Einheit des sogenannten Bogenmaßes wird durch jenen Winkel repräsentiert, bei dem die Bogenlänge gleich dem Radius ist. Diese Einheit heißt **Radiant (rad)**. Im Gradmaß entsprechen dem Radianten etwa 57,3°.

Die Angabe „rad“ ist nur dann erforderlich, wenn betont werden muss, dass die Zahl einen **Winkel** beschreibt.

1378. (Fortsetzung)

In einem Zusammenhang, bei dem dies ohnehin klar ist, kann die Bezeichnung wegbleiben. Z. B.: Die Winkel im gleichschenkelig-rechtwinkeligen Dreieck sind $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Die folgende Tabelle ist zu ergänzen:

Gradmaß	0°		45°		90°		270°	
Bogenmaß		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		π		2π

Die Maßzahl der Bogenlänge des dem Winkel α (in Grad) zugeordneten Bogens $b = x$ auf dem Einheitskreis[1]) nennt man das **Bogenmaß**.

Ist α das Gradmaß und x das Bogenmaß des selben Winkels, so gilt für die Umrechnung:

$\alpha = \frac{180° x}{\pi}$ bzw. $x = \frac{\pi\alpha}{180°}$

1379. Im Hinblick auf Aufgabe **1378.** ist zu berechnen:

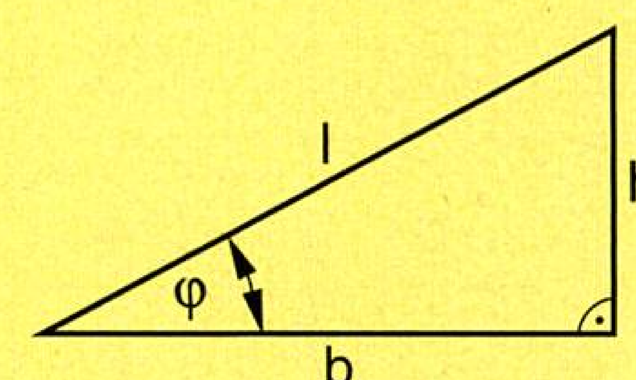
a) $\sin\frac{\pi}{2}$ **b)** $\sin 3°7'$ **c)** $\cos 1{,}2°$ **d)** $\cos 1{,}2$

e) $\tan 3°14'$ **f)** $\tan\frac{\pi}{4}$ **g)** $4 \cdot \sin 3'' \cos 0{,}3$ **h)** $2 \tan 2' \sin\frac{\pi}{3}$

Bemerkung: Angaben ohne ° sind Bogenmaße!

1380. Schiefe Ebene, geg.: l, h

Es sind jene Gleichungen anzukreuzen, die zur unmittelbaren Berechnung von φ geeignet sind:



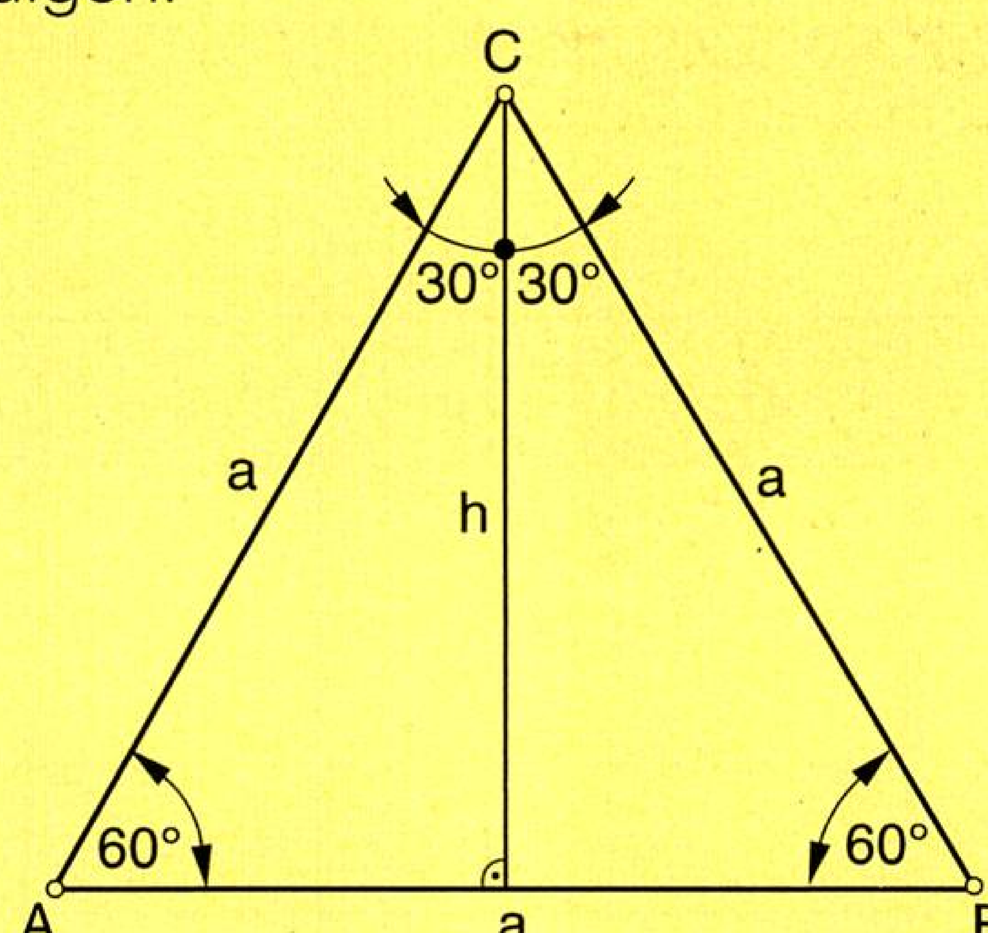
○ **a)** $\sin\varphi = \frac{h}{l}$ ○ **b)** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}$ ○ **c)** $\cos\varphi = \frac{b}{l}$ ○ **d)** $\tan\varphi = \frac{h}{\sqrt{l^2 - h^2}}$

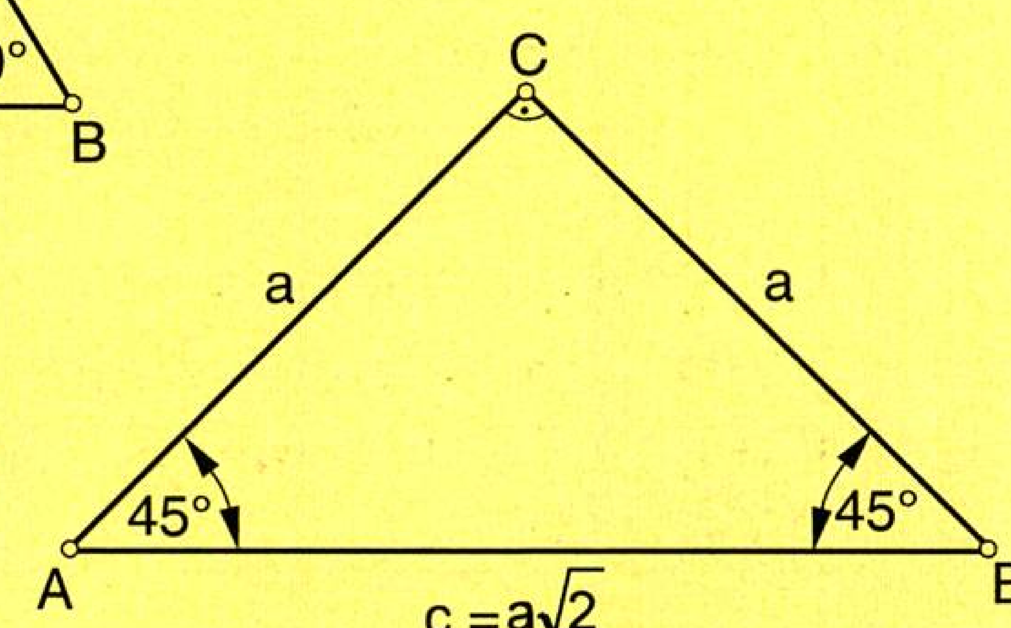
1381. Eine Standseilbahn überwindet auf 3,3 km Länge einen Höhenunterschied von 1735 m. Unter welchem Neigungswinkel steigt diese Seilbahn an?

Die nachstehenden Tabellen sind zu vervollständigen:

1382.

Funktion	$\alpha = 30°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 60°$
$\sin\alpha$			
$\cos\alpha$			
$\tan\alpha$			





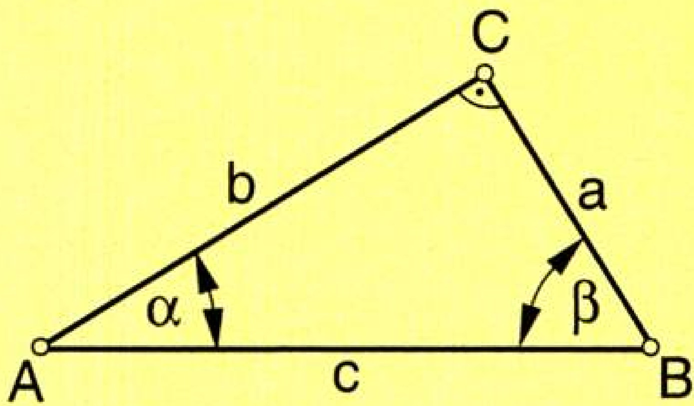
Bei diesen Aufgaben darf **kein** Taschenrechner verwendet werden!

Anleitung: $\sin 30° = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2}$, $\sin 45° = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ usw.

[1]) Den Kreis mit dem Radius $r = 1$ nennt man den **Einheitskreis**. Für den Radius des Einheitskreises kann man jede beliebige Strecke nehmen, die dann allerdings die Maßeinheit für alle anderen Strecken der Figur ist.

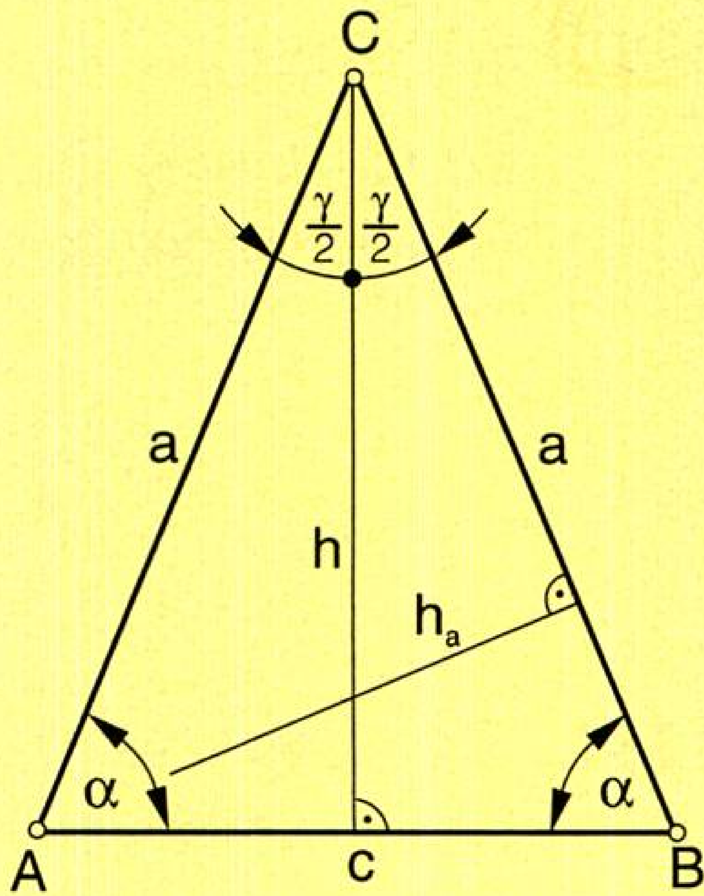
1383. Rechtwinkeliges Dreieck

	a	b	c	α	β	A
a)	84	80				
b)	91		109			
c)	96			41,1°		
d)		182			56,6°	
e)	119					7140
f)			173		17,5°	
g)				36,9°		14 406
h)					39,3°	11970



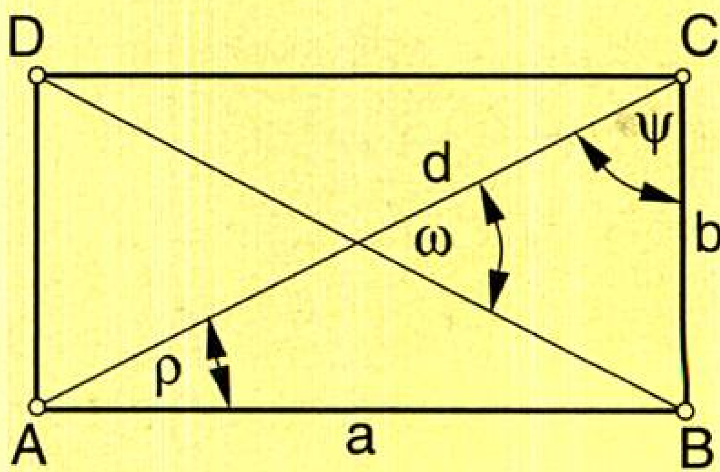
1384. Gleichschenkeliges Dreieck

	a	c	h	h_a	α	γ	A
a)	293	570					
b)	314			285,9			
c)	325					77,8°	
d)	305						37 128
e)			324		53,1°		
f)			243				78 732
g)				386	47,9°		
h)						154,6°	23 040



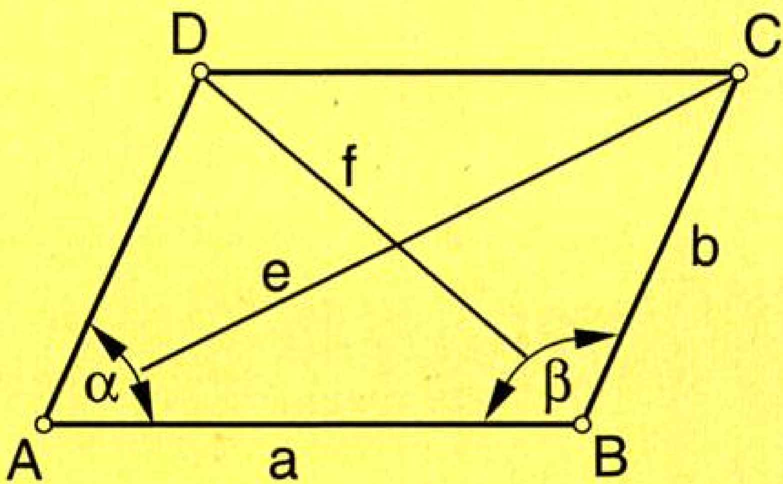
1385. Rechteck

	a	b	d	ρ	ψ	ω	A
a)	112	15					
b)		63	65				
c)	80			26,0°			
d)	64				53,1°		
e)		108				134,8°	
f)		56					5 040
g)			97	47,9°			
h)					77,3°		5 760



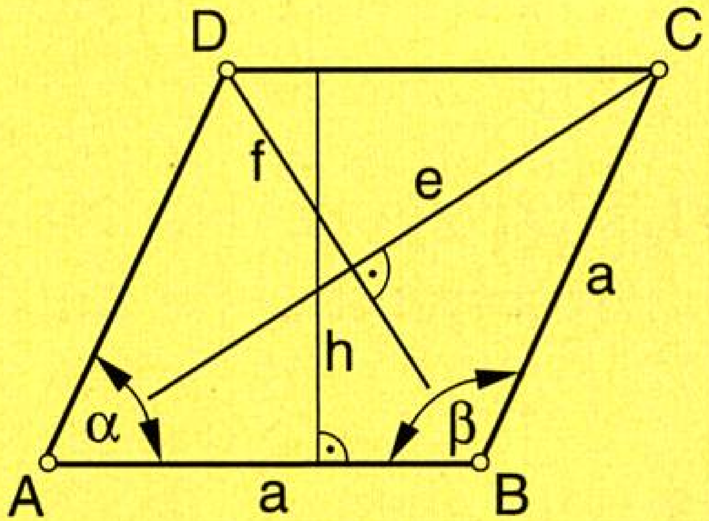
1386. Parallelogramm

	a	b	e	f	α	β	A
a)	25	36	54,8				
b)	52	69		29			
c)	17	120			61,9°		
d)	41	85					3 360
e)		425				105,4°	84 000
f)	125		476				15 708
g)		3 650	3 844,3		80,9°		
h)	829,2	7 909		7 300			



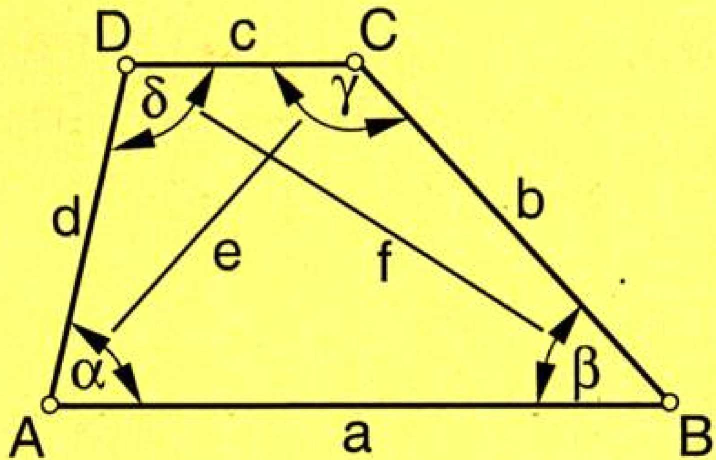
1387. Rhombus

	a	e	f	h	α	β	A
a)	442	880					
b)		864	252				
c)	538			266,8			
d)			864	691,2			
e)	554				49,1°		
f)				556,4	47,6°		
g)			9,8			175,3°	
h)						123,9°	576 240



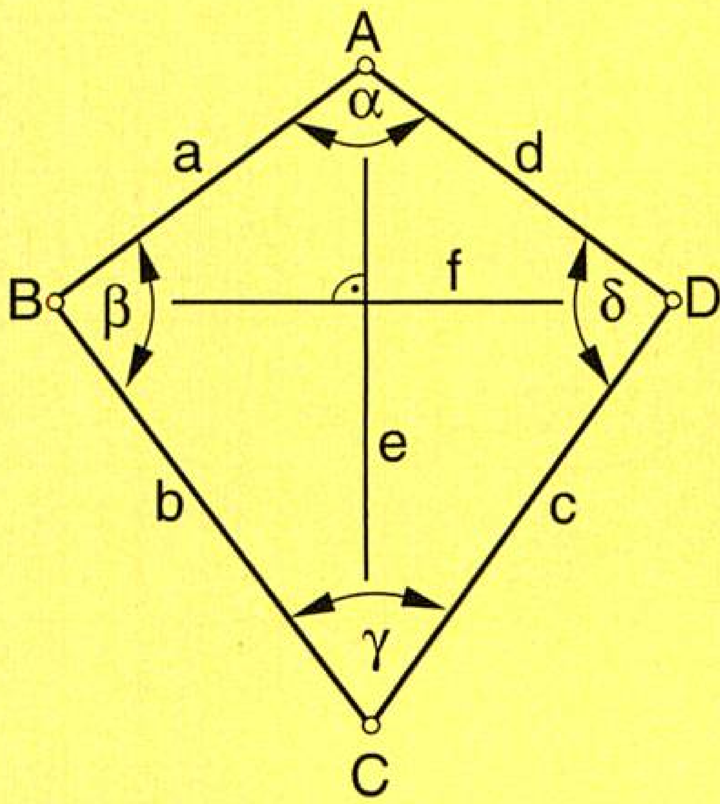
1388. Trapez

	a	b	c	d	e	f	α	β	γ	δ	A
a)	25	15	11	13							
b)	96	29	27		77,6						
c)	22,1	17	10								270
d)	182		59	68			61,9°				
e)		13		15	23,3		53,1°				
f)	112	50						36,9°		118,1°	
g)		40	38				18,9°	36,9°			
h)	55			24			49,2°		114,6°		



1389. Deltoid

	a	b	e	f	α	β	γ	A
a)	156		235	120				
b)				48			19,1°	3672
c)	13			24		75,8°		
d)	26	17	25					
e)	370				37,8°	144,0°		
f)		152	225				92,8°	
g)	100		171		73,7°			
h)				112	63,8°		56,1°	



1390. Die 5 cm langen Diagonalen eines Rechtecks schließen einen Winkel von 73°44′23″ ein. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist zu ermitteln!

1391. Von einem Rechteck sind die Seitenlängen **a)** a = 12 cm, b = 5 cm **b)** a = 15 cm, b = 8 cm gegeben. Man berechne den Winkel, den die Diagonalen mit den Seiten bilden!

1392. Der mittlere Steigungswinkel einer 9700 m langen Bahnstrecke beträgt 1°5′. Der Höhenunterschied ihrer Endpunkte ist zu ermitteln!



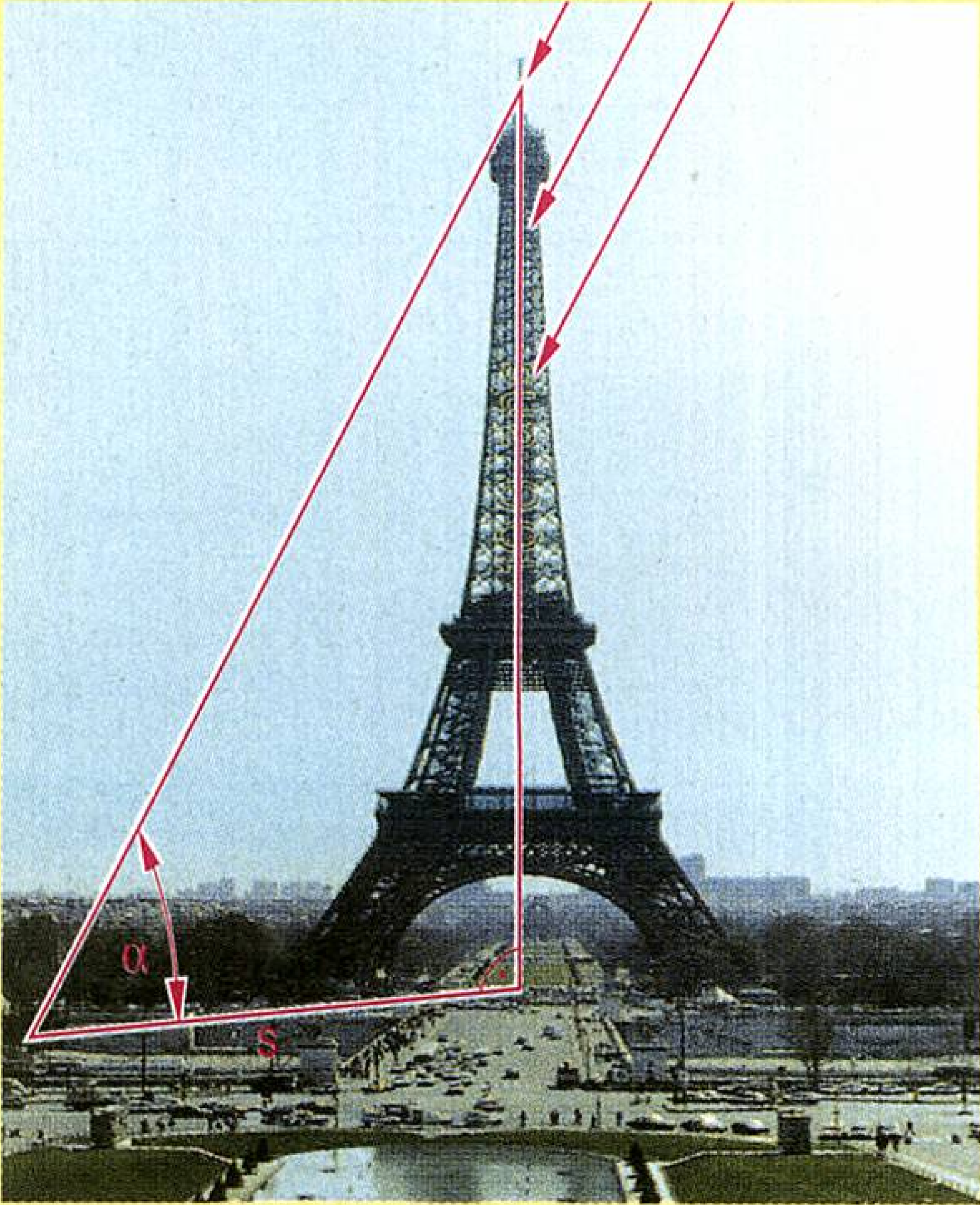
1393. Man berechne den mittleren Steigungswinkel einer Bahnstrecke, deren Steigung 1 : 300 ist!

1394. Der mittlere Steigungswinkel der Zahnradbahn auf dem Schneeberg beträgt 7,78°.

a) Welcher Höhenunterschied wird bei einer Streckenlänge von 9 km überwunden?

b) Wie groß ist die Steigung in Prozent?

1395. In welchem Verhältnis stehen Stufenbreite und Stufenhöhe einer Treppe zueinander, wenn deren Steigung **a)** 26,57° **b)** 18,44° ist?



1396. Wie lang ist der Schatten des 300 m hohen Eiffelturms, wenn die Sonnenhöhe **a)** 63° **b)** 60° beträgt?

Bemerkung: Der Winkel, den die einfallenden Sonnenstrahlen mit der horizontalen Ebene bilden, wird **Sonnenhöhe** genannt.

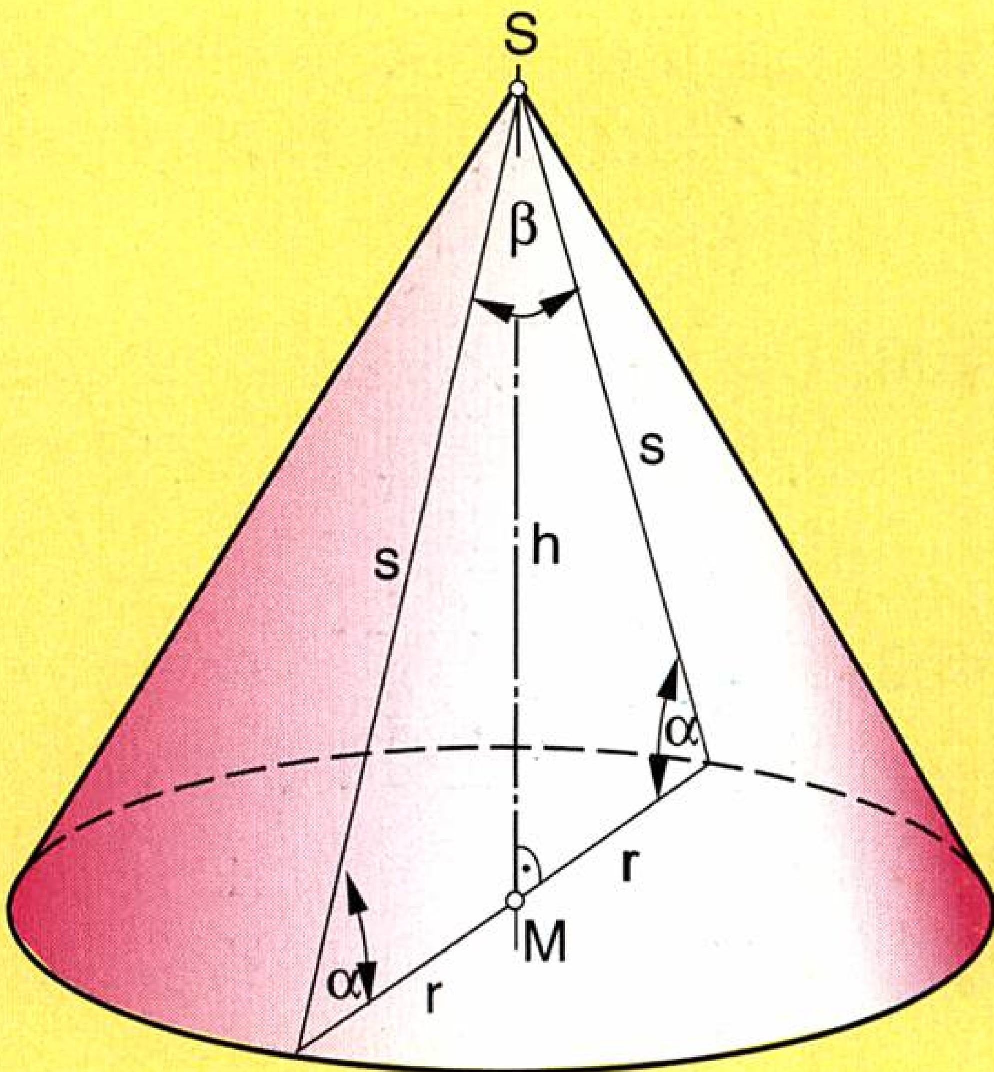
1397. Man berechne die Sonnenhöhe, wenn der Schatten eines 12 m hohen Mastes **a)** 5 m **b)** 35 m lang ist!

1398. Wie hoch ist ein Freileitungsmast, der bei einer Sonnenhöhe von **a)** 53,18° **b)** 47,35° einen 30 m langen Schatten wirft?

Die nachstehenden Tabellen sind zu vervollständigen:

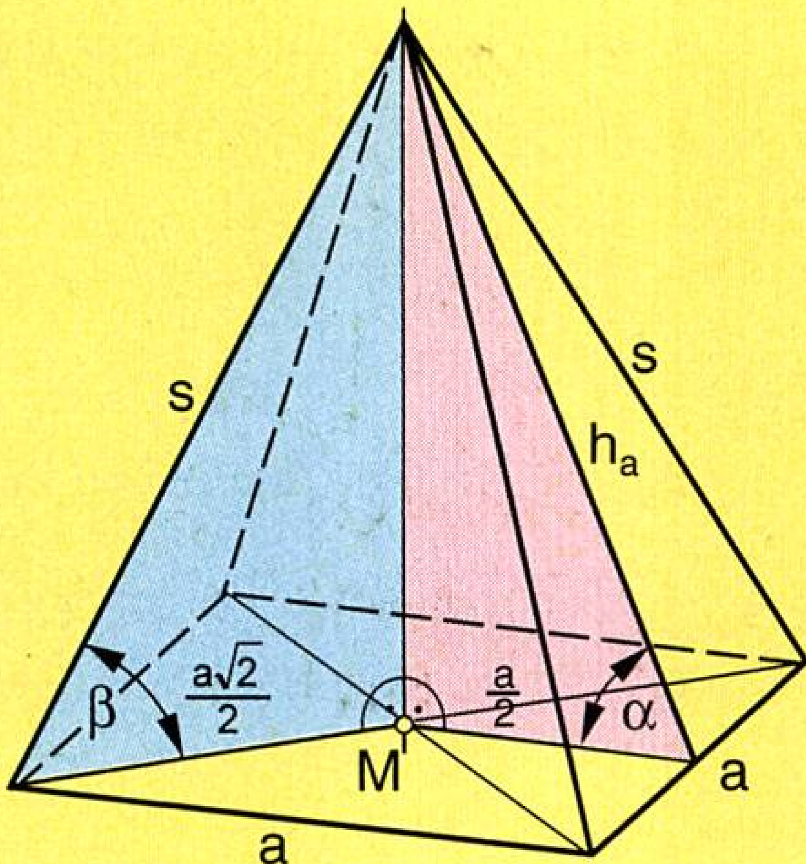
1399. Drehkegel

	r	h	s	α	β	V	O
a)	136	570					
b)		266		40,5°			
c)	192			68,8°			
d)			373		95,0°		
e)		228			109,9°		
f)	240					$25{,}213 \cdot 10^6$	
g)	261						$592 \cdot 10^3$
h)				79,6°		$31{,}14 \cdot 10^6$	



1400. Gerade quadratische Pyramide

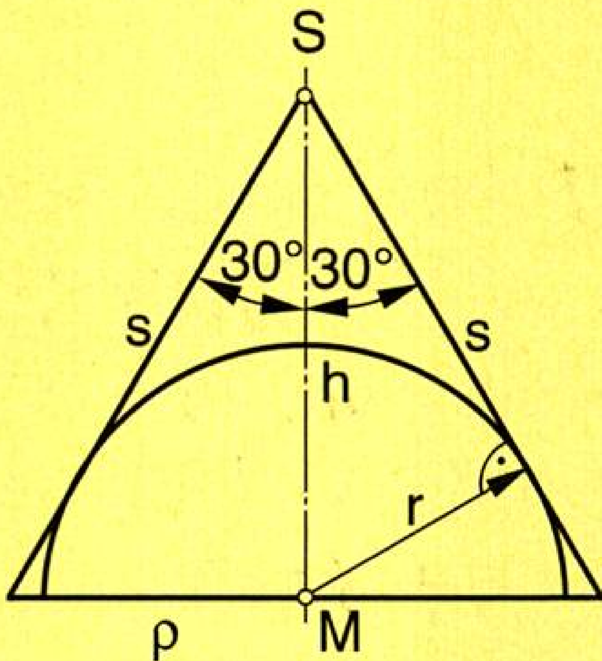
	a	s	h	h_a	α	β	V	O
a)	880	681,94						
b)		684,89				29,8°		
c)	720		319					
d)				445	79,1°			
e)			405		58,1°			
f)			425				$15{,}994{,}10^6$	
g)	400						$20 \cdot 10^6$	
h)	320							$368{,}64 \cdot 10^3$



1401. Durch die Grundkante des Würfels mit der Kantenlänge a wird eine Ebene unter dem Winkel α gelegt. Wie groß ist der Rauminhalt des (1) kleineren (2) größeren dadurch entstehenden Teiles? **a)** $a = 3$ cm, $\alpha = 30°$ **b)** $a = 8$ cm, $\alpha = 10°$

1402. Man berechne im Würfel **a)** den Winkel φ, den eine Raumdiagonale mit einer Seitenfläche einschließt **b)** den Winkel ρ, den eine Raumdiagonale mit einer angrenzenden Kante einschließt **c)** den Winkel ω, den zwei Raumdiagonalen miteinander einschließen!

1403. Die Mantellinien eines Kegels sind 13,475 cm lang und schließen mit der Grundfläche den Winkel 63°48′40″ ein. Man berechne **a)** das Kegelvolumen **b)** die Kegeloberfläche.



1404. Einer Halbkugel ist ein Drehkegel mit dem Öffnungswinkel $\beta = 60°$ umschrieben. Wie verhalten sich die **a)** Volumina **b)** Oberflächen der beiden Körper zueinander?

1405. Eine der Seitenkanten einer schiefen Pyramide mit einem rechtwinkeligen Dreieck ($c = 20$ cm, $\alpha = 21{,}8°$) als Grundfläche hat die Länge $s = 45$ mm und ist unter dem Winkel $\beta = 54{,}2°$ zur Grundfläche geneigt. Man berechne das Volumen der Pyramide.

Bemerkung: Bei einer schiefen Pyramide sind die Seitenkanten verschieden lang.

1406. Die Seitenkante s = 20,7 mm der geraden Pyramide mit dem Volumen $V = 2{,}05\ \text{cm}^3$ ist gegen die Grundfläche unter dem Winkel $\beta = 29°\,30'20''$ geneigt. Man berechne die Grundfläche, wenn diese ein Rechteck darstellt!

1407. Die Mantelfläche einer geraden quadratischen Pyramide ist 4-mal so groß wie ihre Grundfläche. Wie groß ist **a)** der Neigungswinkel α der Manteldreiecke **b)** der Neigungswinkel β der Seitenkante zur Basis?

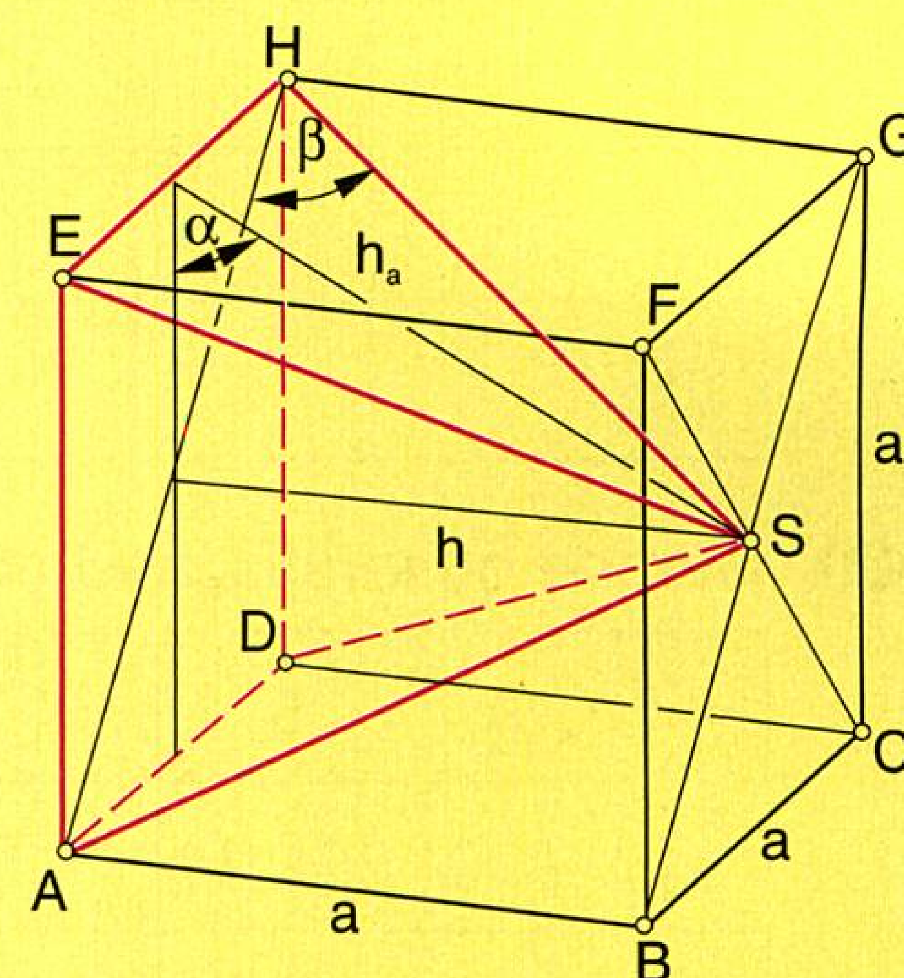
1408. Die Mantelfläche einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide ist doppelt so groß wie ihre Grundfläche. Wie groß ist **a)** der Neigungswinkel α der Seitenfläche **b)** der Neigungswinkel β der Seitenkante gegen die Grundfläche?

1409. Die Mantelfläche einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide ist doppelt so groß wie ihre Grundfläche. Wie groß ist **a)** der Neigungswinkel α der Seitenfläche **b)** der Neigungswinkel β der Seitenkante gegen die Grundfläche?

$s \cdot \cos(\beta) = \frac{2}{3} h$

1410. Die Spitze einer Pyramide liegt im Mittelpunkt des Würfels mit der Kantenlänge a, ihre Basis ist die Grundfläche des Würfels. Man ermittle **a)** Volumen **b)** Oberfläche der Pyramide!

1411. Der Mittelpunkt einer quadratischen Begrenzungsfläche des Würfels mit der Kantenlänge a wird mit den Eckpunkten der parallelen Begrenzungsfläche verbunden. Man ermittle **a)** Volumen **b)** Oberfläche **c)** Winkel α **d)** Winkel β der dadurch entstehenden Pyramide! (Vgl. nebenstehende Figur)



1412. Ein rechtwinkeliges Dreieck ($c = 25$ cm, $\alpha = 53{,}1°$) rotiert um die Hypotenuse. Man berechne **a)** Volumen **b)** Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers!

1413. Ein Dreieck ($c = 6$ cm, $\alpha = 56{,}3°$, $A = 9\ \text{cm}^2$) rotiert um die Seite c. Man berechne **a)** Volumen **b)** Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers!

1414. Ein Trapez ($a = 7$ cm, $d = 3$ cm, $\alpha = 67{,}4°$, $\beta = 50{,}4°$) rotiert um die Seite a. Man berechne **a)** Volumen **b)** Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers!

1415. Ein Trapez ($a = 25$ cm, $d = 13$ cm, $\alpha = 63{,}4°$, $\beta = 44{,}4°$) rotiert um die Seite a. Man berechne **a)** Volumen **b)** Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers!

1416. Ein Dreieck ($a = 27$ cm, $b = 13$ cm, $\alpha = 48{,}2°$) rotiert um die längste Seite. Man berechne **a)** Volumen **b)** Oberfläche des entstehenden Doppelkegels!

1417. Wir betrachten die nebenstehende Figur: Das Rechteck MNOP hat den Grundriss M'N'O'P' und den Neigungswinkel α gegen die Horizontalebene E.

a) Wie groß ist A'?

○ (1) $\overline{MN} \cdot \overline{NO}$ ○ (2) $(\overline{MN})^2$

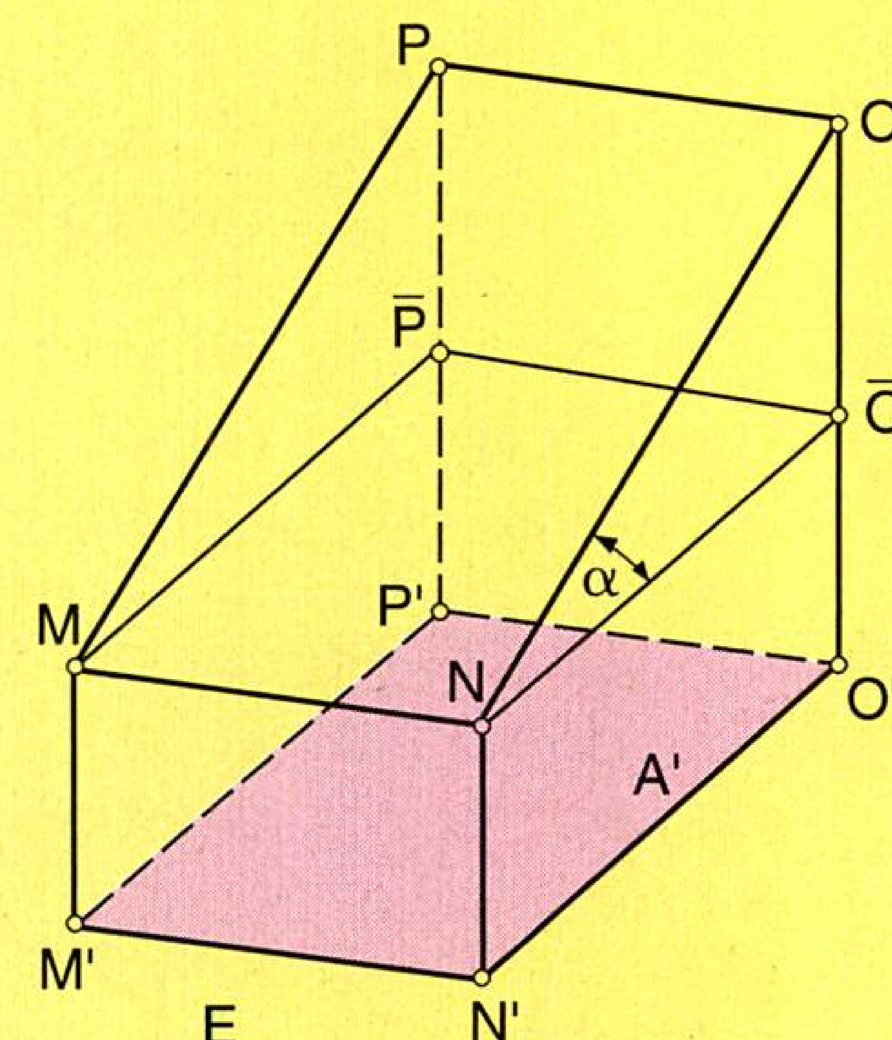
○ (3) $\overline{MN} \cdot \overline{\overline{NO}}$ ○ (4) $\overline{M'N'} \cdot \overline{O'P'}$

b) Zwischen $\overline{NO}$, $\overline{\overline{NO}}$ und $\cos\alpha$ besteht der Zusammenhang:

○ (1) $\overline{\overline{NO}} = NO \cdot \cos\alpha$ ○ (2) Es gibt keinen Zusammenhang.

c) Wie groß ist A?

d) Der Flächenprojektionssatz $A' = A \cdot \cos\alpha$ ist für das Rechteck MNOP zu beweisen!



1418. Ein Drehkegel mit der Mantelfläche $336\ \text{cm}^2$ hat die Grundfläche $174\ \text{cm}^2$. Der Neigungswinkel einer Mantelerzeugenden mit der Grundfläche ist zu berechnen!

1419. Bei welchem Neigungswinkel φ ergibt die Mantelfläche eines Drehkegels die 3-fache Grundfläche?

Bei den nachstehenden Vermessungsaufgaben wird stets horizontales Gelände vorausgesetzt:

1420. Das Innsbrucker Rathaus (20,1m hoch) erscheint unter dem Höhenwinkel 38,2°. Um welche Strecke muss man sich ihm nähern, damit es unter dem doppelten Höhenwinkel zu sehen ist?



1421. Von einem Berggipfel C sieht man zwei Punkte A und B im ebenen Flachland in der selben Richtung unter den Tiefenwinkeln $\alpha = 12{,}7°$ und $\beta = 36{,}5°$. Die Punkte A und B liegen 1940 m voneinander entfernt. Wie hoch liegt der Berggipfel über der Ebene?

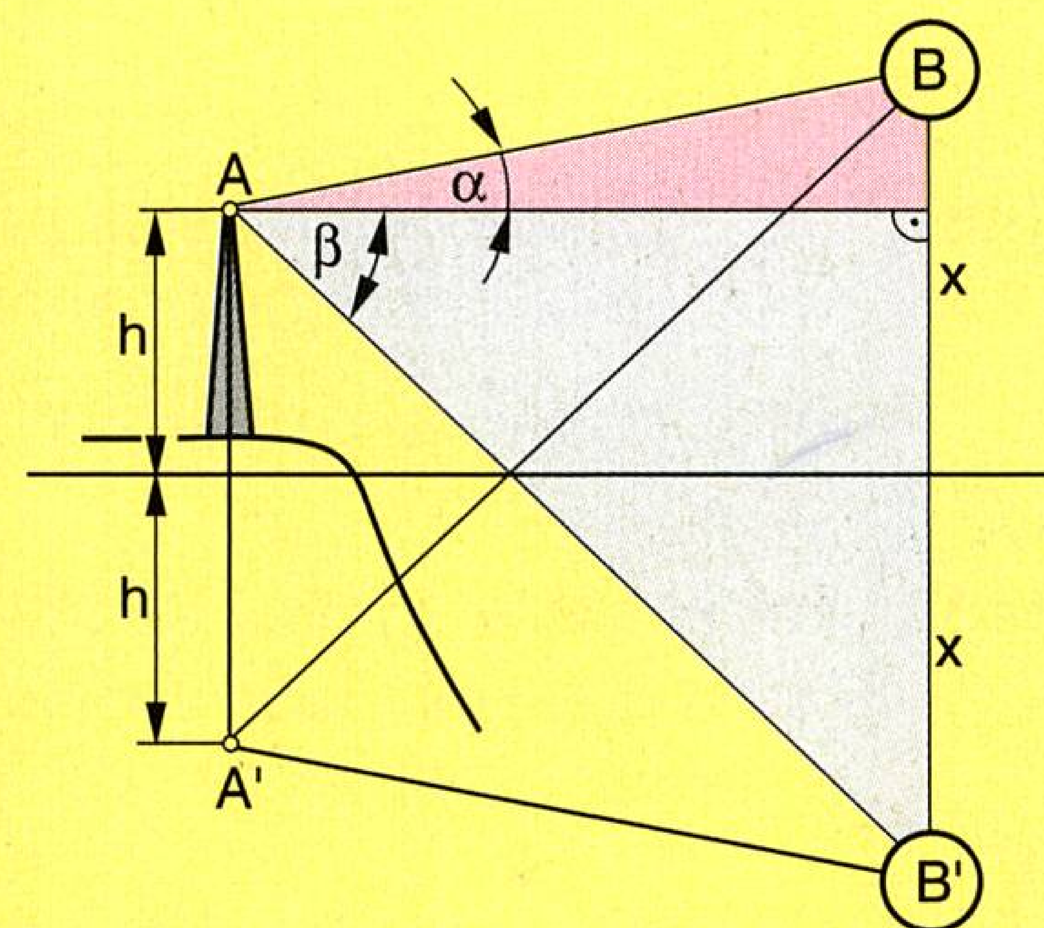
1422. Für die Projektierung einer Brücke muss die Flussbreite ermittelt werden. Hierfür wird auf dem einen Ufer des Flusses eine Standlinie AB ($s = \overline{AB}$) gemessen, ein Punkt P des gegenüber liegenden Ufers anvisiert und die horizontalen Winkel $\alpha = \sphericalangle BAP$ und $\beta = \sphericalangle ABP$ bestimmt:

a) $s = 40$ m, $\alpha = 56°$, $\beta = 102°$ **b)** $s = 75$ m, $\alpha = 54°$, $\beta = 15°$

1423. Ein Fesselballon B schwebt über einem See, in dem sein Spiegelbild B′ gesehen wird. In welcher Höhe x befindet er sich über dem See, wenn er vom Beobachter A (dieser befindet sich in der Höhe h über dem See) unter dem Höhenwinkel α erscheint und das Spiegelbild unter dem Tiefenwinkel β zu sehen ist?

a) $h = 68$ m, $\alpha = 16{,}3°$, $\beta = 80{,}5°$

b) $h = 102$ m, $\alpha = 36{,}9°$, $\beta = 75{,}8°$

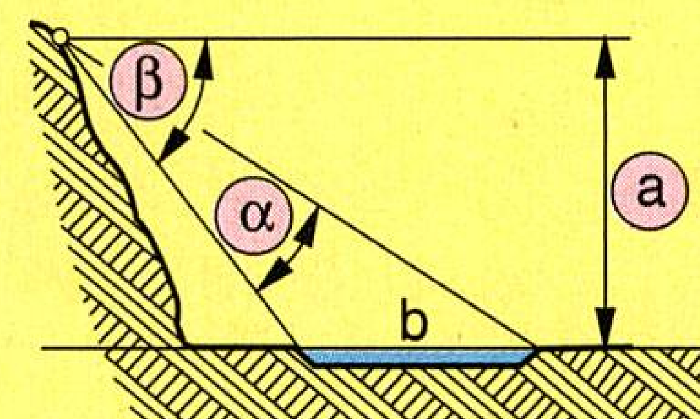


1424. Auf einem Turm der Höhe a ist ein Blitzableiter montiert, der in einer Entfernung b vom Fußpunkt des Turmes unter dem Sehwinkel α erscheint! Höhe x des Blitzableiters?

a) $a = 20$ m, $b = 30$ m, $\alpha = 3{,}8°$ **b)** $a = 27$ m, $b = 50$ m, $\alpha = 1{,}7°$

1425. Von einem Berg der Höhe a erblickt man die Breite b des senkrecht zur Blickrichtung vorbei fließenden Flusses unter dem Gesichtswinkel α, sein diesseitiges Ufer unter dem Tiefenwinkel β. Flussbreite?

a) $a = 320$ m, $\alpha = 12{,}3°$, $\beta = 34{,}0°$ **b)** $a = 248$ m, $\alpha = 6{,}5°$, $\beta = 22{,}5°$

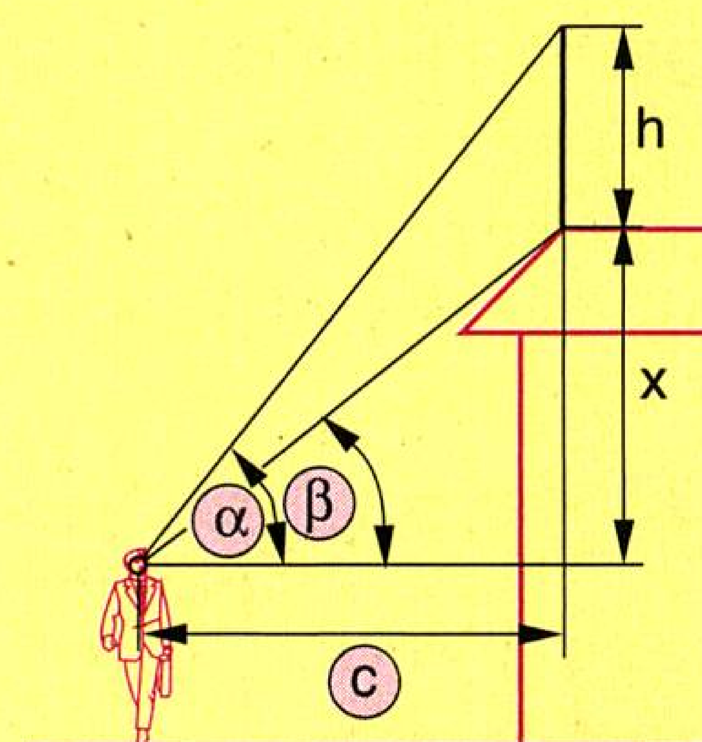


1426. In der vom Fußpunkt einer Kirche gemessenen Entfernung a erblickt man das Kreuz eines Kirchturms der Höhe b unter dem Sehwinkel α. Wie hoch ist das Kreuz?

a) $a = 15$ m, $b = 23$ m, $\alpha = 4{,}0°$ **b)** $a = 9$ m, $b = 33$ m, $\alpha = 1{,}2°$

1427. Für Triangulationszwecke[1)] muss die Höhe der auf einem Gebäude befestigten Fernsehantenne ermittelt werden (vgl. nebenstehende Figur). Der Beobachter befindet sich in der Entfernung c vom Fußpunkt des Gebäudes und misst zur Spitze und zum Fußpunkt der Antenne die Höhenwinkel α und β.

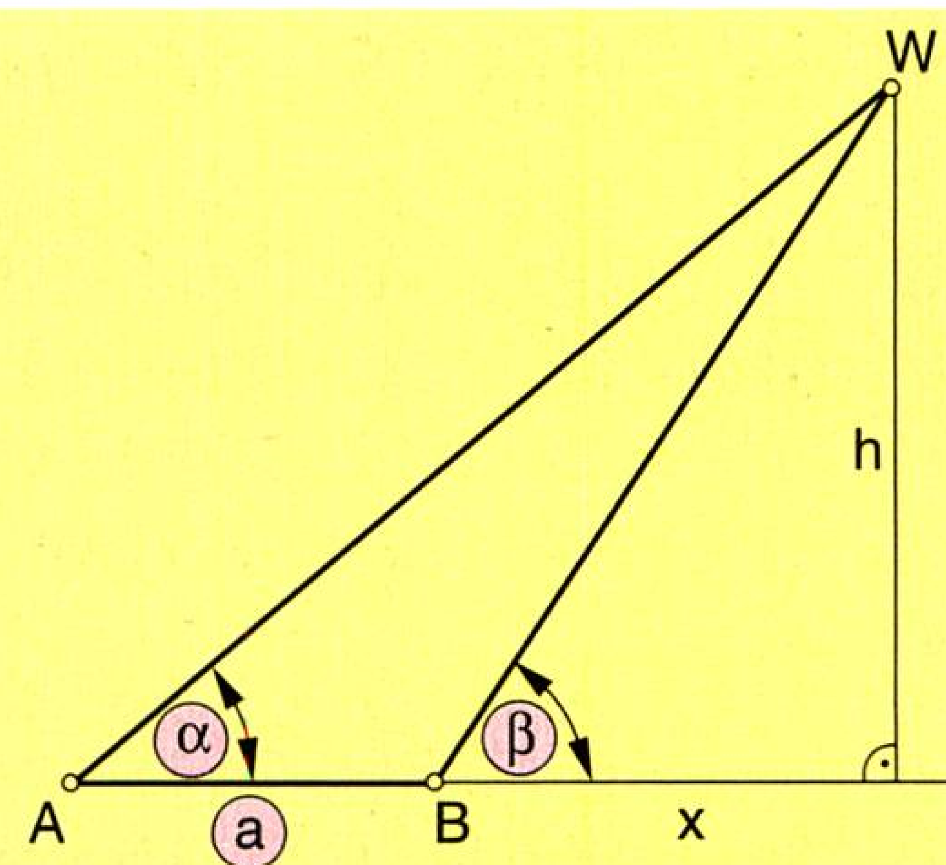
a) $c = 20$ m, $\alpha = 57°$, $\beta = 56°$ **b)** $c = 72$ m, $\alpha = 42°$, $\beta = 41°$



1) Triangulation: Festsetzung eines Netzes von Dreiecken zur Landesvermessung.

1428. Welche Flughöhe h hat ein Wetterballon W, wenn er gleichzeitig von den Beobachtungsstationen A und B unter dem Höhenwinkel α bzw. β gesehen wird? Die beiden Stationen mit der Distanz a liegen mit dem Wetterballon in einer lotrechten Ebene.

a) $\alpha = 24{,}3°$, $\beta = 35{,}3°$, $a = 500\,\text{m}$
b) $\alpha = 26{,}3°$, $\beta = 40{,}5°$, $a = 650\,\text{m}$

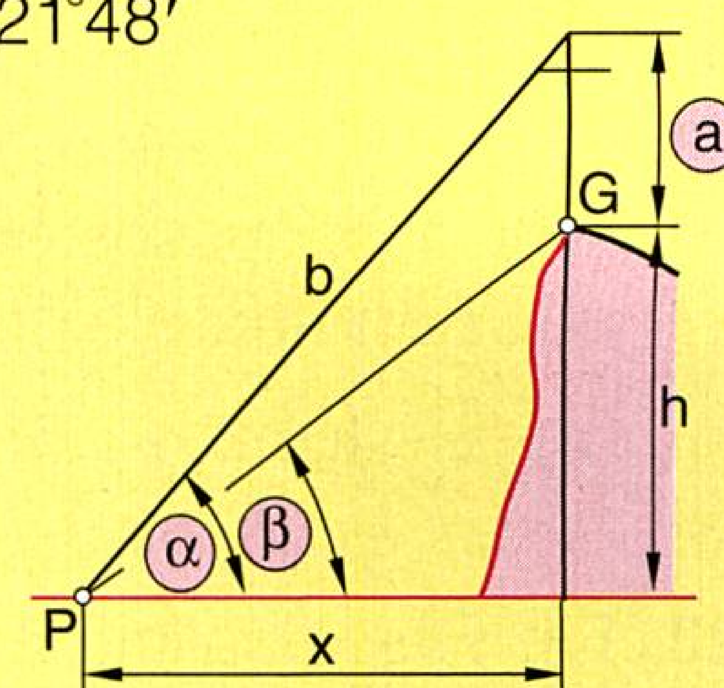


1429. Von einer Aussichtswarte der Höhe a erblickt man die Spitze eines in der selben Horizontalebene liegenden Berges unter dem Höhenwinkel α, seinen Fußpunkt unter dem Tiefenwinkel β. Berghöhe h?

a) $a = 10\,\text{m}$, $\alpha = 56°18'$, $\beta = 4°45'$ **b)** $a = 15\,\text{m}$, $\alpha = 70°36'$, $\beta = 21°48'$

1430. Zum oberen und unteren Ende eines Gipfelkreuzes der Höhe a werden von einem Punkt P die Höhenwinkel α und β gemessen. Welche Höhe h hat der Berg bezüglich des Beobachtungsniveaus?

a) $a = 5\,\text{m}$, $\alpha = 54°$, $\beta = 53°$ **b)** $a = 15\,\text{m}$, $\alpha = 72°$, $\beta = 71°$



1431. Die Spitze eines Mastes erscheint von dem Geländepunkt A unter dem Höhenwinkel α, von dem dem Mast um a näher gelegenen Geländepunkt B unter dem Höhenwinkel β. Masthöhe h?

a) $a = 20\,\text{m}$, $\alpha = 15°56'43''$, $\beta = 21°48'5''$ **b)** $a = 15\,\text{m}$, $\alpha = 18°55'29''$, $\beta = 30°57'49''$

1432. Zwei Fenster eines Leuchtturmes liegen senkrecht übereinander und haben eine Höhendifferenz a. Von ihnen aus sieht man ein Schiff unter dem Tiefenwinkel α bzw. β. Wie weit ist das Schiff vom Leuchtturm entfernt?

a) $a = 3\,\text{m}$, $\alpha = 10{,}5°$, $\beta = 8{,}0°$ b) $a = 7\,\text{m}$, $\alpha = 30{,}0°$, $\beta = 24{,}0°$

1433. Zwei Vermessungszeichen liegen in einem ebenen Tal und weisen eine Distanz a auf. Sie werden von einem nahe gelegenen Berg (in einer Richtung) unter dem Sehwinkel α gesehen. Man berechne die Berghöhe h, wenn man das dem Berg näher gelegene Vermessungszeichen unter dem Tiefenwinkel β erkennt.

a) $a = 30\,\text{m}$, $\alpha = 8°58'$, $\beta = 35°32'$ **b)** $a = 23\,\text{m}$, $\alpha = 10°28'$, $\beta = 74°44'$.

1434. Vom Gipfel eines 432 m hohen Berges sieht man die Spitze eines Kirchturms unter einem Tiefenwinkel $\alpha = 13{,}8°$ und den Fußpunkt des Kirchturms unter einem Tiefenwinkel von $\beta = 15{,}2°$. Wie hoch ist der Kirchturm?

1435. Vom einem 16 m hoch gelegenen Fenster am Wiener Stephansplatz sieht man die Spitze S des Stephansturms unter einem Höhenwinkel $\alpha = 52°33'$ und den Fußpunkt F des Turms unter einem Tiefenwinkel $\beta = 9°46'$. Wie hoch ist der Stephansturm?

1436. Ein Turm steht auf einem gleichmäßig mit einem Neigungswinkel von 12°5′ abfallenden Berghang. Von den Endpunkten einer 105 m langen Standlinie, deren Verlängerung durch den Fußpunkt des Turmes läuft, werden Höhenwinkel zur Turmspitze von 35°27′ und 58°57′ gemessen. **a)** Wie hoch ist der Turm? **b)** Wie weit ist sein Fußpunkt vom näheren Messpunkt entfernt?

1437. Man berechne die Entfernung des Mondes von der Erde, wenn der Monddurchmesser 3476 km beträgt und von der Erde unter dem Sehwinkel 31′5″ erscheint.

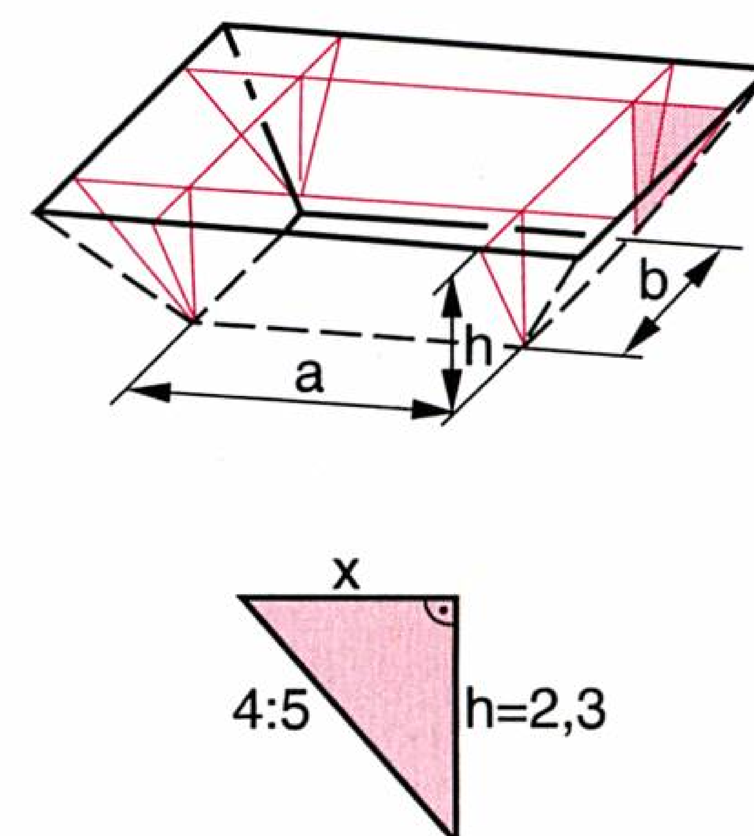
1438. Aus welcher Entfernung vom Erdmittelpunkt erblickt ein Raumfahrer die Erde unter dem Sehwinkel **a)** $\rho = 10°$ **b)** $\rho = 40°$? (Erdradius $r = 6370\,\text{km}$)

BAUTECHNISCHE ANWENDUNGEN DER STEREOMETRIE UND TRIGONOMETRIE

Bautechniker(innen) errichten Wohnhäuser, Dämme, Brücken, Speicher und Kirchen, Hallen und Türme. Diese Projekte müssen nicht nur ausreichend fest sein, sie brauchen auch Platz. Erde und Gestein muss für Baugruben weggeschafft, für Straßen, Brücken und Dämme angeschüttet werden. Um derartige Aktivitäten planbar zu machen, müssen sie unter anderem bezüglich der Zeit, der Kosten und des Materials berechnet werden. Eine wichtige Rolle spielt hierbei die Volumsberechnung: Wie viel Gestein ist für einen Wolkenkratzer, wie viel für einen Tunnel wegzuschaffen? Wie viel vermietbarer Raum steht in einem Wohnhaus, in einem Bürohaus zur Verfügung? Wie groß ist die Klimaanlage bzw. die Heizung für ein Stockwerk, für eine Lagerhalle zu dimensionieren? Logisches Bauen heißt maßgerecht konstruieren, heißt rechnen. Insbesondere die Stereometrie spielt hierbei eine große Rolle, wobei bei den Berechnungen oftmals trigonometrische Funktionen angewendet werden. In diesem Abschnitt werden wir uns damit näher beschäftigen.

Beispiel:

Eine rechteckige Baugrube ($a = 13{,}5\,m$, $b = 10{,}5\,m$) soll eine Tiefe von 2,3 m haben und wird allseitig im Verhältnis 4 : 5 abgeböscht[1] — vgl. Außenspalte! Es ist zu berechnen, wie viel Aushubmaterial anfällt!



Lösung:

Der zu berechnende Volumskörper (Aushub) ist kein Pyramidenstumpf. (Verlängert man die Seitenflächen, so ergibt sich **kein** Schnittpunkt!) Deshalb ist es notwendig, den „Körper" in Prismen und Pyramiden aufzuteilen. Zunächst berechnen wir die in der Figur eingezeichnete Größe x:

$2{,}3 : x = 4 : 5 \Leftrightarrow x = \frac{2{,}3 \cdot 5}{4} = 2{,}875$ **$x = 2{,}875\,m$**

$V_{1(Quader)} = ab \cdot 2{,}3 = 13{,}5 \cdot 10{,}5 \cdot 2{,}3 = 326{,}025$ $V_1 = 326{,}03\,m^3$

$V_{2\,(Prisma/a)} = Gh_1$ mit $h_1 = a$

$G = \frac{xh}{2} = \frac{2{,}875 \cdot 2{,}3}{2} = \ldots$

Prisma mit der „Höhe" $h_1 = a$ kommt zweimal vor: $2\,V_2 = 89{,}27\,m^3$

$V_{3\,(Prisma/b)} = Gh_2$ mit $h_2 = b \ldots$

Prisma mit der „Höhe" $h_2 = b$ kommt zweimal vor: $2\,V_3 = 69{,}43\,m^3$

$V_{4\,(Pyramide)} = \frac{\overline{G}h}{3}$ mit $h = 2{,}3$

$\overline{G} = x^2 = 2{,}875^2 = \ldots$

Pyramide mit dem Volumen V_4 kommt an allen 4 Ecken vor:

$4V_4 = \underline{25{,}35\,m^3}$

$V_{GESAMT} = V_1 + 2V_2 + 2V_3 + 4V_4 = 510{,}07\,m^3$

$V_{GESAMT} = 510\,m^3$

Die nebenstehende Methode der Aufteilung in Prismen und Pyramiden ist bei komplizierten Grundrissen sehr aufwendig. Wie die folgenden Beispiele zeigen kann der Lösungsweg mit Hilfe der „Prismatoidformeln" wesentlich vereinfacht werden.

[1] r : s „abböschen" bedeutet, dass eine Böschung mit der Steigung $\frac{r}{s}$ angelegt wird.

Das **Prismatoid** ist ein Körper, der von zwei beliebigen in parallelen Ebenen liegenden Vielecken als Grund- bzw. Deckfläche und von Dreiecken bzw. Trapezen als Seitenflächen begrenzt wird. Die Höhe h des Prismatoids ist der Abstand der Grund- zur Deckfläche.

$$V = \frac{h}{6}(G_1 + 4G_m + G_2)$$
$$O = G_1 + G_2 + M$$

Bezeichnungen:

h ..... Höhe des Prismatoids
G_1 ..... Grundfläche
G_2 ..... Deckfläche
G_m ..... Fläche des Mittelschnitts
M ..... Mantel
O ..... Oberfläche
V ..... Volumen

Beispiel:

Gegeben ist ein allgemeines Prismatoid — vgl. Figur! Die Maße sind in cm angegeben. Volumen und Oberfläche sind zu berechnen!

Lösung:

$G_1 = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 36$

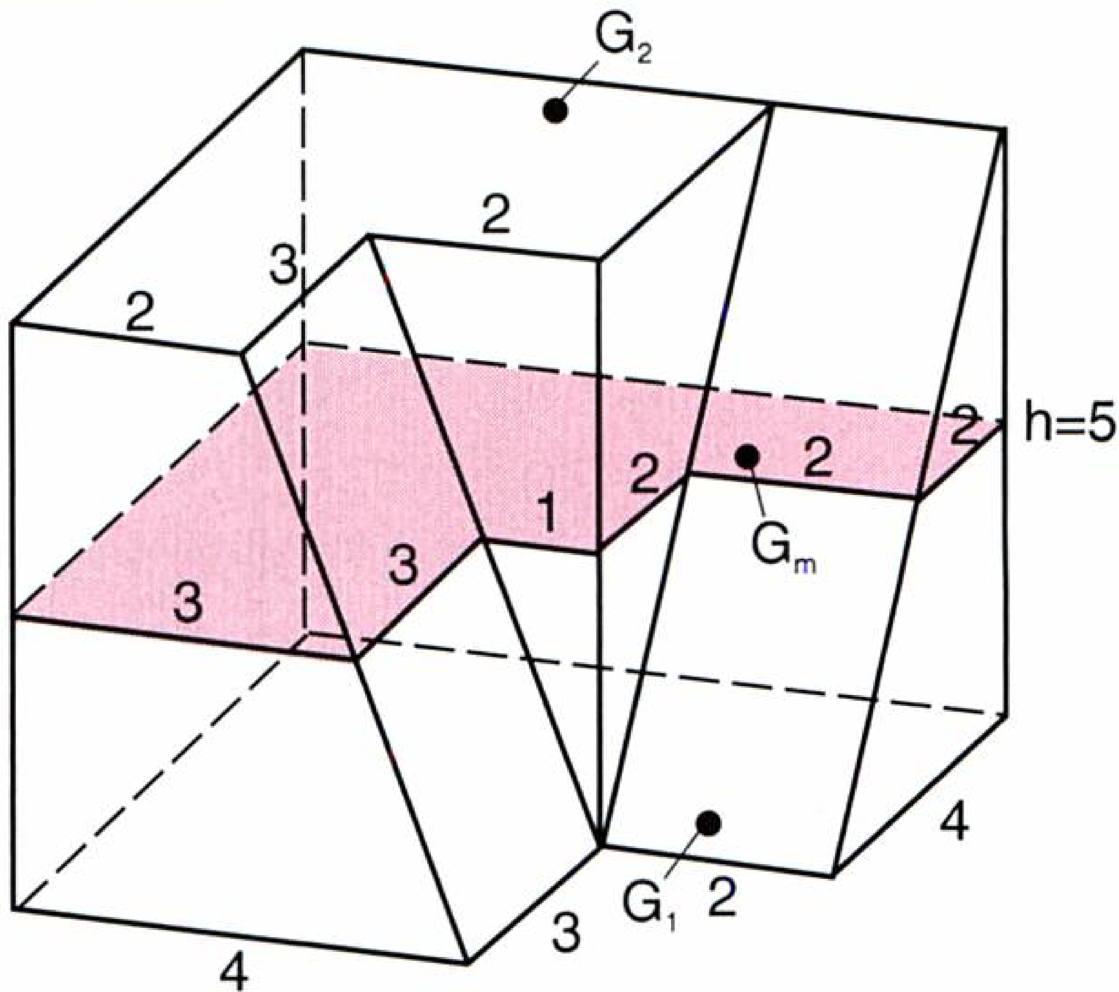
$G_1 = 36\ cm^2$

$G_2 = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 4 = 22$

$G_2 = 22\ cm^2$

$G_m = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 29$

$G_m = 29\ cm^2$



$V = \frac{h}{6}(G_1 + 4G_m + G_2) = \frac{5}{6}(36 + 4 \cdot 29 + 22) = 145$ **$V = 145\ cm^3$**

M ..... alle Seitenflächen, vorne beginnend nach rechts:

$$M = \frac{4+2}{2} \cdot 5 + 3\sqrt{2^2 + 5^2} + \frac{2 \cdot 5}{2} + \frac{4 \cdot 5}{2} +$$
$$+ 2\sqrt{4^2 + 5^2} + \frac{4 \cdot 5}{2} + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 5 = 133{,}96$$

$M = 133{,}96\ cm^2$

$O = G_1 + G_2 + M = 36 + 22 + 133{,}96 = 191{,}96$ **$O = 191{,}96\ cm^2$**

Beispiele für Prismatoide in der Baupraxis: Baugruben, Unterführungen, Rampen, Gerinne, Stützmauern, Brückenträger, Dachkörper, Obelisken, Übergangsstücke, ...

Zu den Prismatoiden gehören der Ponton, der Keil und der schon früher besprochene Pyramidenstumpf.

Der **Ponton** ist ein Prismatoid, dessen Grund- und Deckfläche zwei parallelseitige, aber nicht ähnliche Rechtecke sind. Die Seitenflächen sind Trapeze, der Mittelschnitt ist ein Rechteck mit dem Flächeninhalt

$$G_m = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{b_1 + b_2}{2}$$

$$V = \frac{h}{6}[a_1 b_1 + a_2 b_2 + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)]$$
$$O = a_1 b_1 + a_2 b_2 + M$$

Bezeichnungen:

a_1, b_1 ..... Kantenlängen der Grundfläche
a_2, b_2 ..... Kantenlängen der Deckfläche
h ..... Höhe des Pontons
M ..... Mantel (4 Trapeze!)
O ..... Oberfläche
V ..... Volumen

Beispiel:

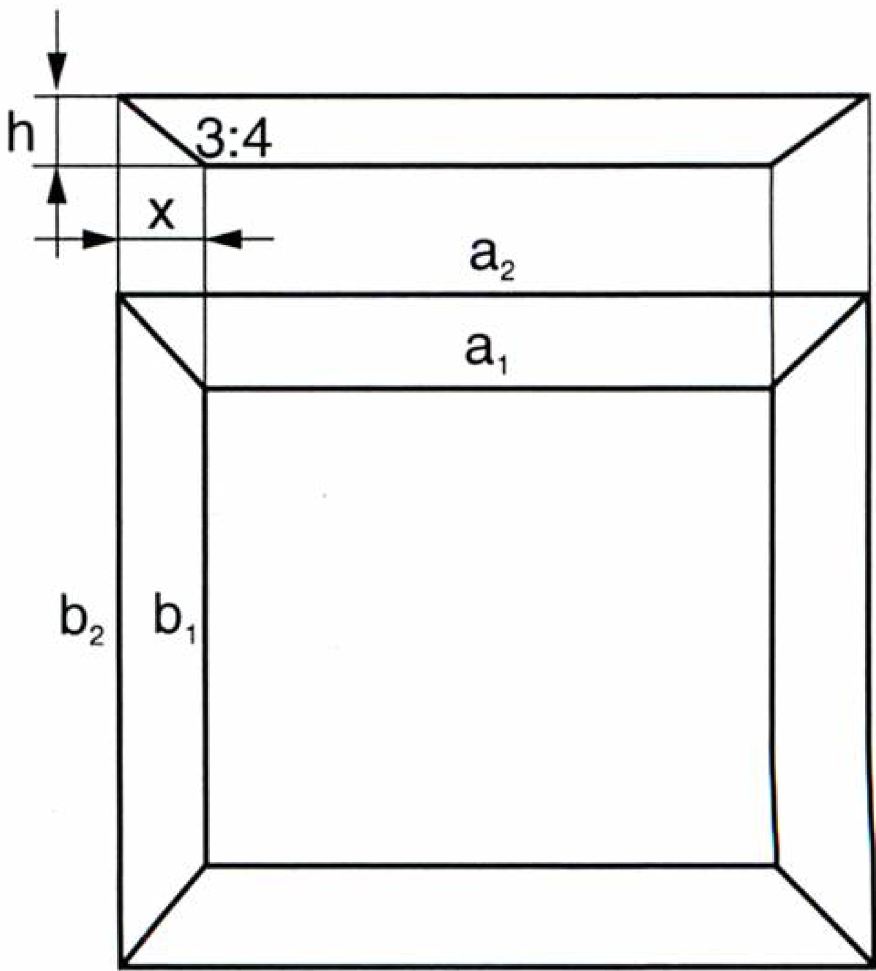
Eine rechteckige Baugrube ($a_1 = 14{,}5$ m, $b_1 = 12{,}5$ m) soll eine Tiefe von 1,8 m haben und wird allseitig im Verhältnis 3 : 4 abgeböscht. Es ist zu berechnen, wie viel Aushubmaterial anfällt.

Lösung:

3 : 4 = Gegenkathete : Ankathete

$3 : 4 = 1{,}8 : x \Leftrightarrow x = \frac{1{,}8 \cdot 4}{3}$

$x = $ **2,4 m**



$a_2 = a_1 + 2x = 14{,}5 + 2 \cdot 2{,}4 = 19{,}3$

$a_2 = 19{,}3$ m

$b_2 = b_1 + 2x = 12{,}5 + 2 \cdot 2{,}4 = 17{,}3$

$b_2 = 17{,}3$ m

$$V = \frac{h}{6}[a_1 b_1 + a_2 b_2 + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)] =$$
$$= \frac{1{,}8}{6}[14{,}5 \cdot 12{,}5 + 19{,}3 \cdot 17{,}3 + (14{,}5 + 19{,}3)(12{,}5 + 17{,}3)] =$$
$$= \ldots = 456{,}71$$ **$V = 456{,}71\ m^3$**

Beispiel:

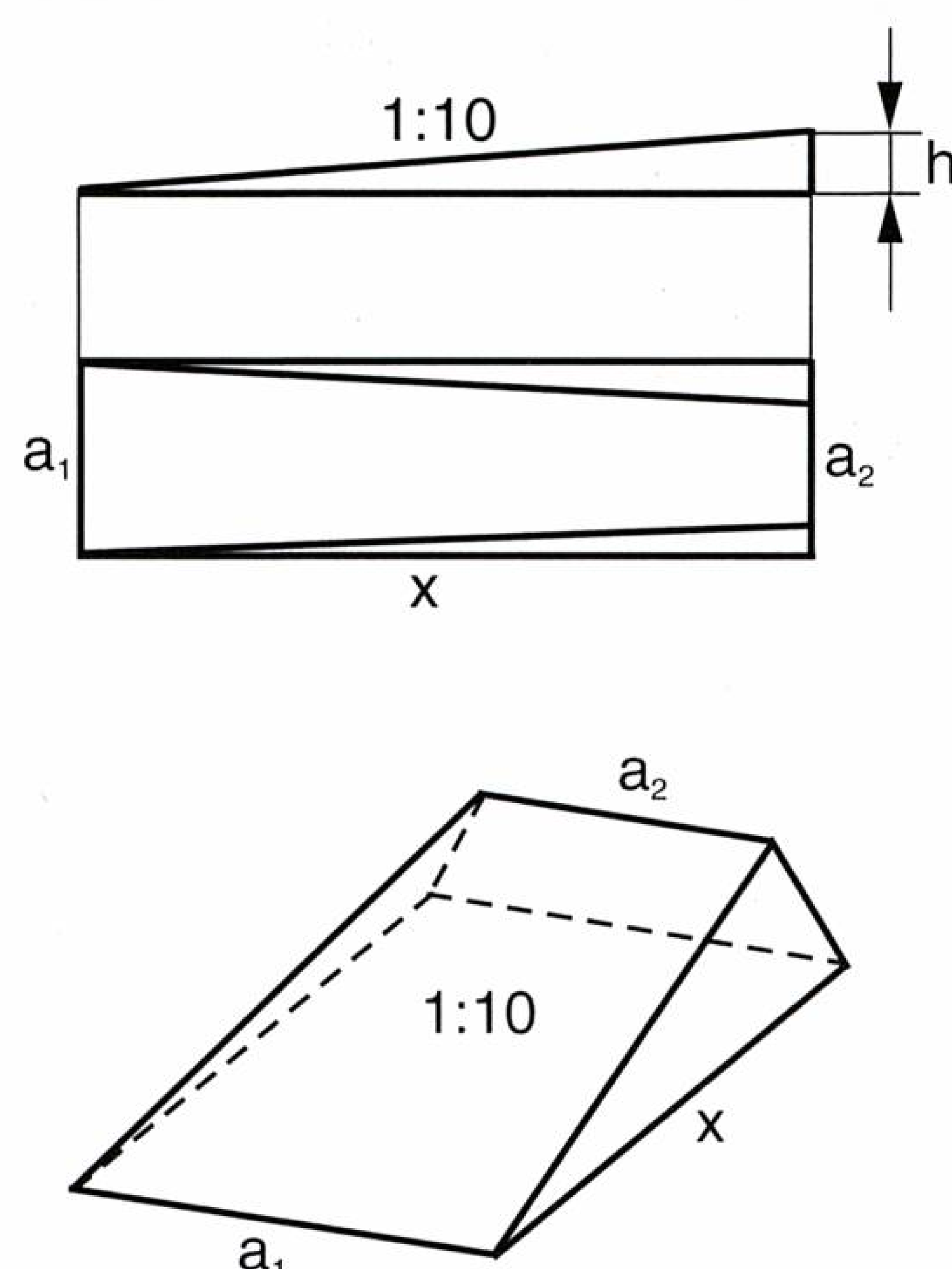
Eine Zufahrtrampe hat die Form eines Keils mit $a_1 = 5{,}3$ m, $a_2 = 3{,}5$ m und $h = 2{,}2$ m. Die Rampensteigung beträgt 1:10. Volumen?

Lösung:

1:10 = Gegenkathete : Ankathete

1:10 = 2,2 : x

x = 22, d. h. $b_1 = 22$ m



$$V = \frac{b_1 h}{6}(2a_1 + a_2) = \frac{22 \cdot 2{,}2}{6}(2 \cdot 5{,}3 + 3{,}5) = 113{,}74 \qquad V = 113{,}74 \text{ m}^3$$

Der **Keil** ist ein Ponton, dessen Deckfläche zu einer Strecke „zusammen geschrumpft" ist. ($b_2 = 0$)

$$V = \frac{b_1 h}{6}(2a_1 + a_2)$$
$$O = G + M$$

Bezeichnungen:

a_1, b_1 ..... Kantenlänge der Grundfläche
a_2 ..... Kantenlänge der „Deckfläche"
h ..... Höhe des Keils
M ..... Mantel (zwei Trapeze und zwei Dreiecke!)
O ..... Oberfläche
V ..... Volumen

In der Praxis treten immer wieder Körper auf, bei denen Grund- und Deckfläche nicht parallel sind.

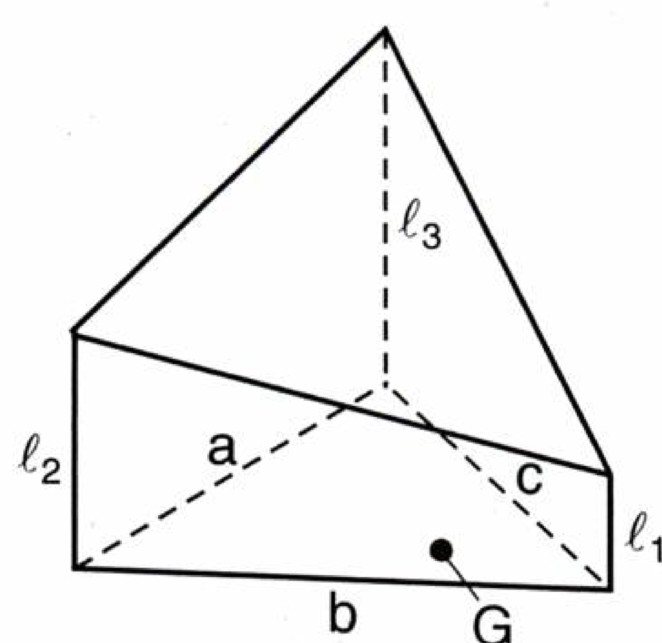
Wir wollen nun noch die Berechnung von schräg abgeschnittenen Körpern zeigen.

Beispiel:

Ein schräg abgeschnittenes gerades dreiseitiges Prisma hat die Grundkantenlängen $a = 8{,}5$ cm, $b = 5{,}2$ cm, $c = 11{,}4$ cm, und die Seitenkantenlängen $\ell_1 = 3{,}6$ cm, $\ell_2 = 4{,}8$ cm, $\ell_3 = 5{,}3$ cm. Volumen?

Lösung:

Zunächst berechnen wir die Grundfläche unter Verwendung der HERONschen Flächenformel:



$G = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ mit

$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{8{,}5 + 5{,}2 + 11{,}4}{2}$ $\qquad s = 12{,}55$ cm

$G = \sqrt{12{,}55 \cdot 4{,}05 \cdot 7{,}35 \cdot 1{,}15}$

$G = \sqrt{429{,}6194\ldots}$

$G = 20{,}73 \text{ cm}^2$

$$V = G \cdot \frac{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3}{3} = 20{,}73 \cdot \frac{3{,}6 + 4{,}8 + 5{,}3}{3} = 94{,}65 \qquad V = 94{,}65 \text{ cm}^3$$

Schräg abgeschnittenes gerades dreiseitiges Prisma

$$V = G \cdot \frac{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3}{3}$$

Bezeichnungen:

ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 ..... Längen der auf G senkrecht stehenden Prismenkanten
G ..... Grundfläche
V ..... Volumen

Schräg abgeschnittener Quader

$$V = ab \cdot \frac{h_1 + h_3}{2} = ab \cdot \frac{h_2 + h_4}{2}$$

Bezeichnungen:

a, b ..... Kantenlänge der Grundfläche

h_1, h_2, h_3, h_4 ..... Längen der auf G senkrecht stehenden Quaderkanten

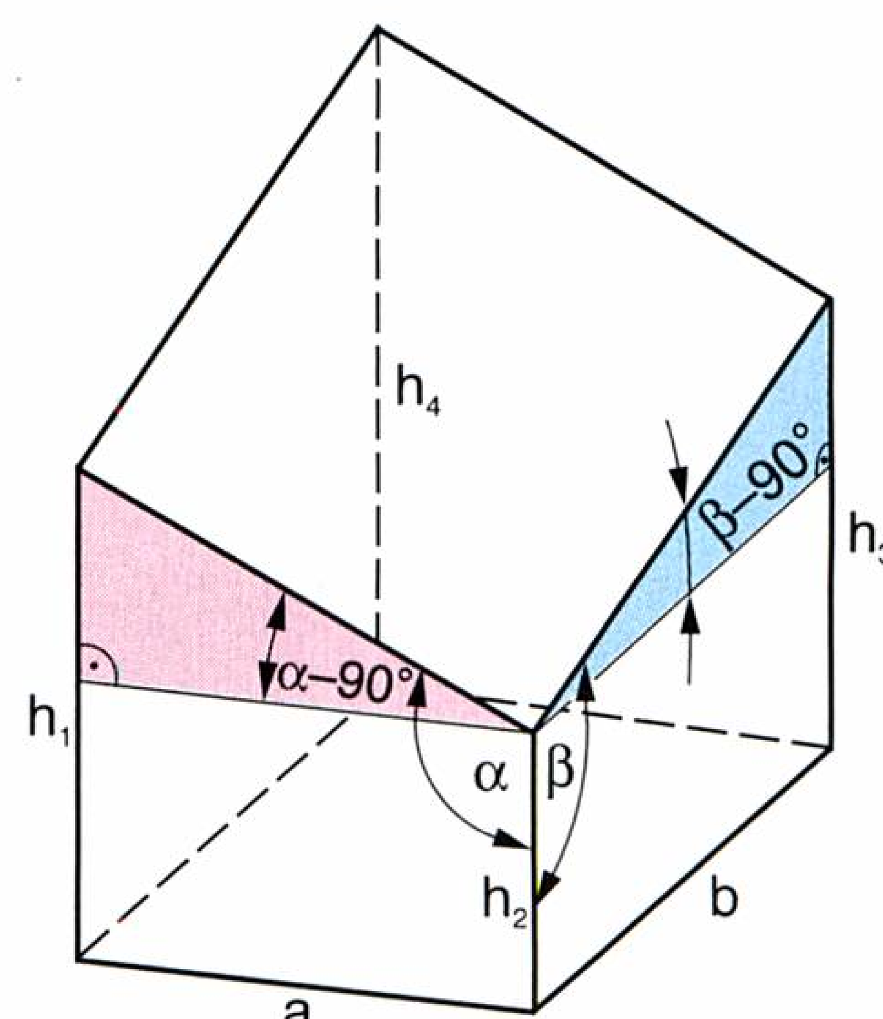
O ..... Grundfläche

V ..... Volumen

Beispiel:

Von einem schräg abgeschnittenen Quader (vgl. nachstehende Figur) sind die Längen $a = 7{,}6$ cm, $b = 4{,}1$ cm, $h_2 = 2{,}6$ cm, und die Winkel $\alpha = 127°$ und $\beta = 108°$ bekannt. Volumen?

Lösung:



$\alpha - 90° = 37°$

$\tan 37° = \frac{h_1 - h_2}{a} \Leftrightarrow h_1 - h_2 = a \cdot \tan 37°$

$h_1 = \ldots = 8{,}33$ cm

$\beta - 90° = 18°$

$\tan 18° = \frac{h_3 - h_2}{b} \Leftrightarrow h_3 - h_2 = b \cdot \tan 18°$

$h_3 = \ldots = 3{,}93$ cm

$V = ab \cdot \frac{h_1 + h_3}{2} = \ldots = 191$ $\qquad V = 191\,\text{cm}^3$

Schräg abgeschnittener gerader Drehzylinder

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} = \pi r^2 \cdot \overline{M_1M_2}$$
$$M = \pi r (h_1 + h_2)$$
$$G_s = \pi r a = \frac{\pi r^2}{\cos \alpha}\ ^{1)}$$
$$O = \pi r^2 + G_s + M$$

Bezeichnungen:

r ..... Radius

$\overline{M_1M_2}$ ..... Achsenstrecke des schräg abgeschnittenen Zylinders

h_1, h_2 ..... kleinste und größte Mantelhöhe

a ..... halbe Hauptachse der Ellipse (Schnittfläche)

α ..... Schnittwinkel

G_s ..... Schrägschnittfläche (Ellipse)

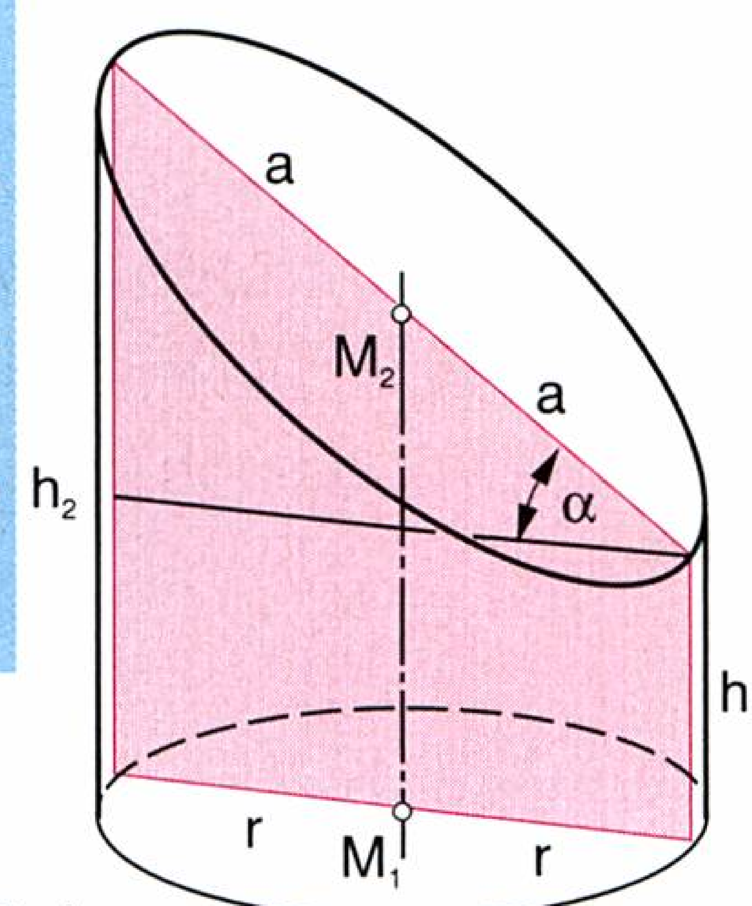
M ..... Mantel

O ..... Oberfläche

V ..... Volumen

Beispiel:

Ein gerader Drehzylinder mit dem Radius $r = 2{,}3$ dm wird in einer Höhe von $h_2 = 6{,}8$ dm schräg abgeschnitten ($h_1 < h_2$). Der Neigungswinkel des Schrägschnittes zur Grundfläche beträgt 38,5° **a)** Volumen? **b)** Mantel? **c)** Oberfläche?



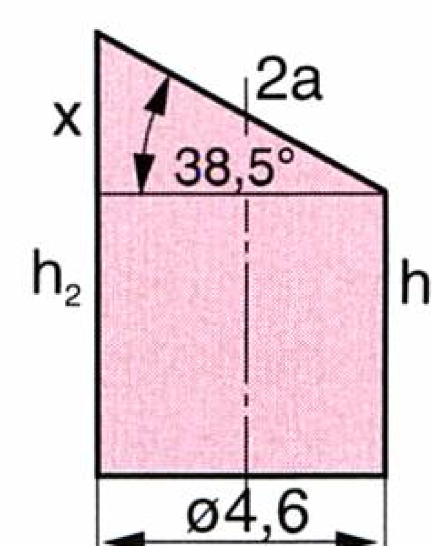
Lösung:

a) $\tan 38{,}5° = \frac{x}{4{,}6} \Leftrightarrow x = \ldots = 3{,}66$ $\qquad x = 3{,}66$ dm

$h_1 + h_2 - x = 6{,}8 - 3{,}66 = 3{,}14$ $\qquad h_1 = 3{,}14$ dm

$V = \pi r^2 \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} = \pi \cdot 2{,}3^2 \cdot \frac{6{,}8 + 3{,}14}{2} = 82{,}6$

$V = 82{,}6\ \text{dm}^3$



b) $M = \pi r (h_1 + h_2) = \pi \cdot 2{,}3 (6{,}8 + 3{,}14) = 71{,}8$

$M = 71{,}8\ \text{dm}^2$

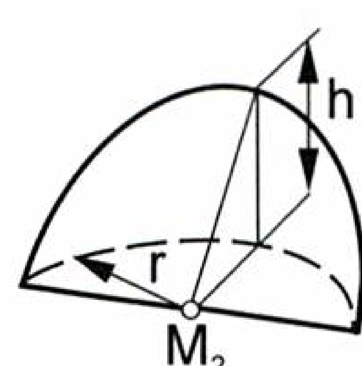
c) $\cos 38{,}5° = \frac{4{,}6}{2a} \Leftrightarrow 2a = \frac{4{,}6}{\cos 38{,}5°} = 5{,}878 \Leftrightarrow a = 2{,}94$ dm

$G_2 = \pi r a = \pi \cdot 2{,}3 \cdot 2{,}94 = 21{,}2$ $\qquad G_s = 21{,}2\ \text{dm}^2$

$O = \pi r^2 + G_s + M = \ldots = 109{,}7$ $\qquad O = 109{,}7\ \text{dm}^3$

Zylinderhuf

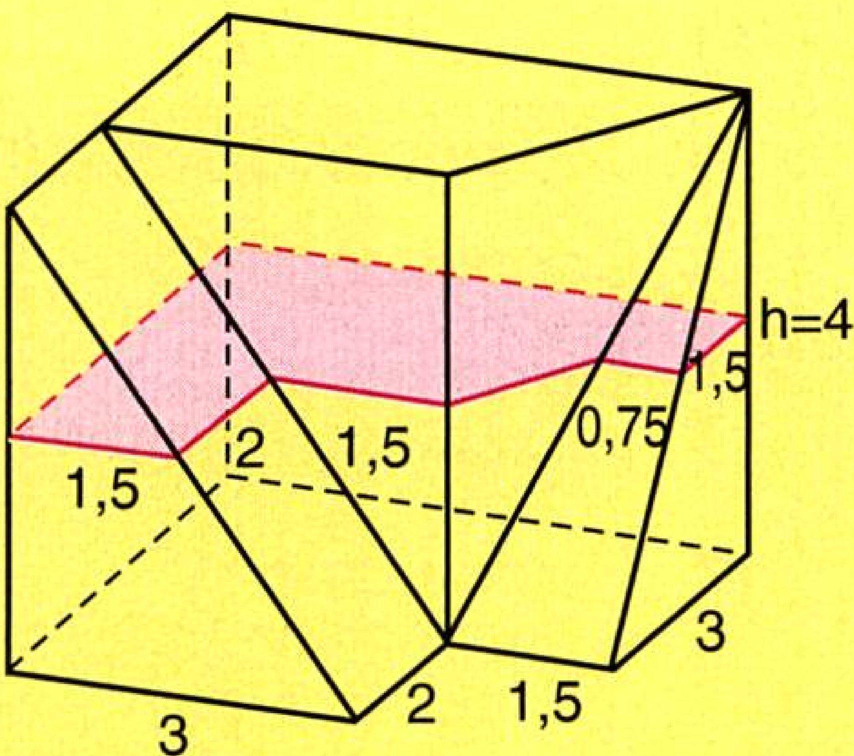
$$V = \frac{2}{3} r^2 h$$
$$M = 2rh$$



[1]) Die Beziehung $G_s = \frac{\pi r^2}{\cos \alpha}$ ist eine Anwendung des „Flächenprojektionssatzes“.

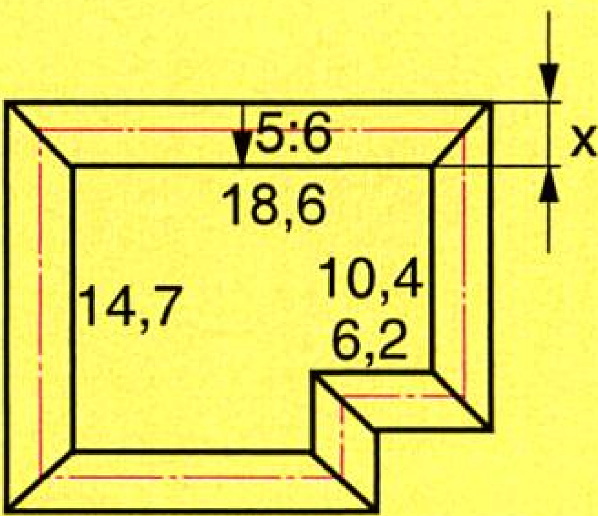
AUFGABEN

1439. Gegeben ist ein allgemeines Prismatoid — vgl. Figur! Die Maße sind in dm gegeben. Man berechne **a)** das Volumen **b)** die Oberfläche.



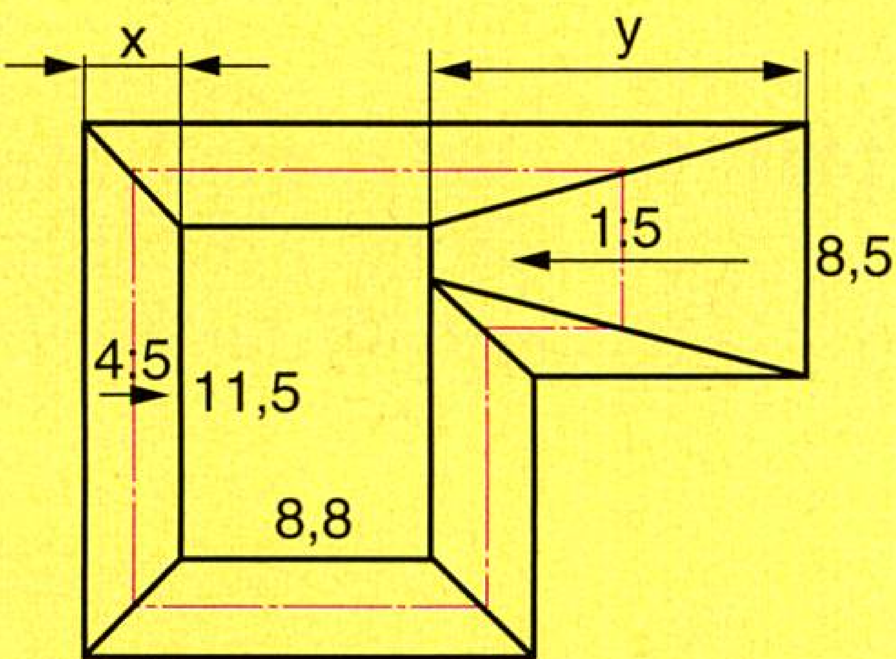
1440. Die Grundfläche eines Körpers (Übergangsfläche) ist ein regelmäßiges Achteck mit der Seitenlänge $a_1 = 3{,}2$ dm. Die Deckfläche ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $a_2 = 3{,}8$ dm. Volumen und Mantelfläche dieses 4,6 dm hohen Körpers sind zu ermitteln.

1441. Eine 2,25 m tiefe Baugrube soll allseitig im Verhältnis 5 : 6 abgeböscht werden. Volumen des Aushubs?



(Bemaßungen in Meter)

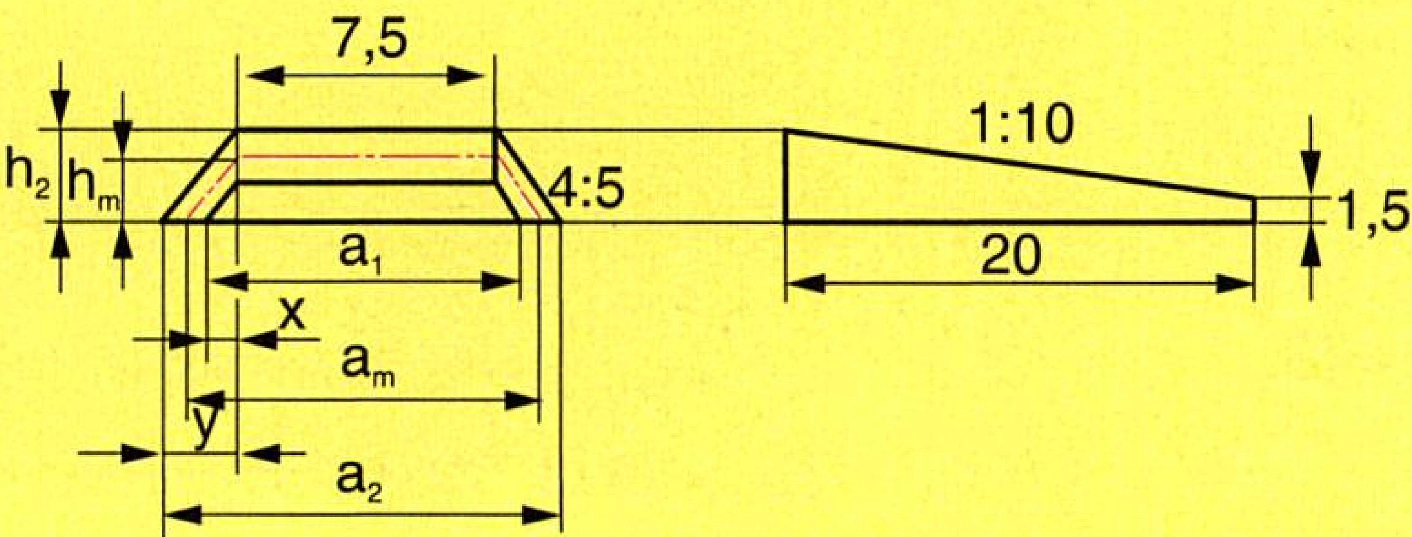
1442. Wie groß ist der Aushub für eine 2,5 m tiefe Baugrube mit Zufahrt, wenn im Verhältnis 4 : 5 abgeböscht wird?



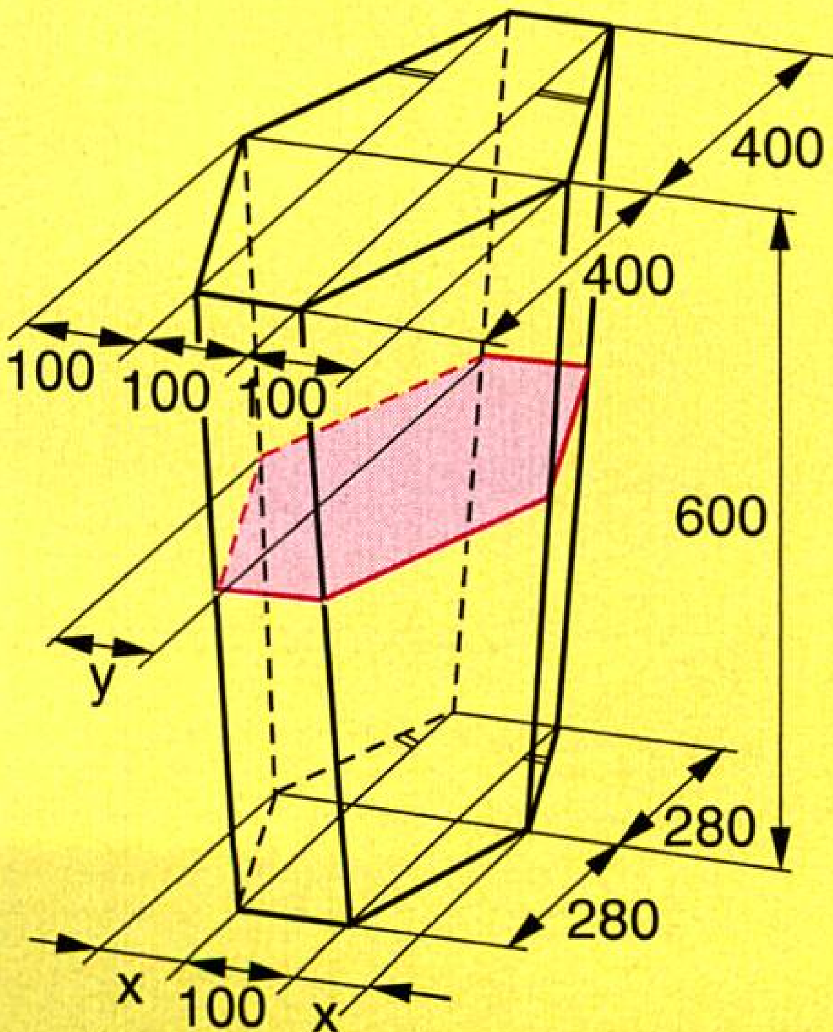
(Bemaßungen in Meter)

1443. Die nebenstehende Figur veranschaulicht einen Damm (Böschung von 4 : 5), auf dessen Krone eine Straße verläuft (Gefälle 10 %) zwischen zwei Profilschnitten. Wie groß ist das Volumen, wenn die Maße in m gegeben sind?

Bemerkung: Das Gelände ist waagrecht anzunehmen.



1444.



(Bemaßungen in Zentimeter)

Das Volumen des dargestellten Brückenpfeilers ist zu berechnen!

1445. Von einem Dach über trapezförmigem Grundriss sind die beiden Dachneigungen $\alpha = 27{,}5°$ und $\beta = 41{,}2°$ bekannt.

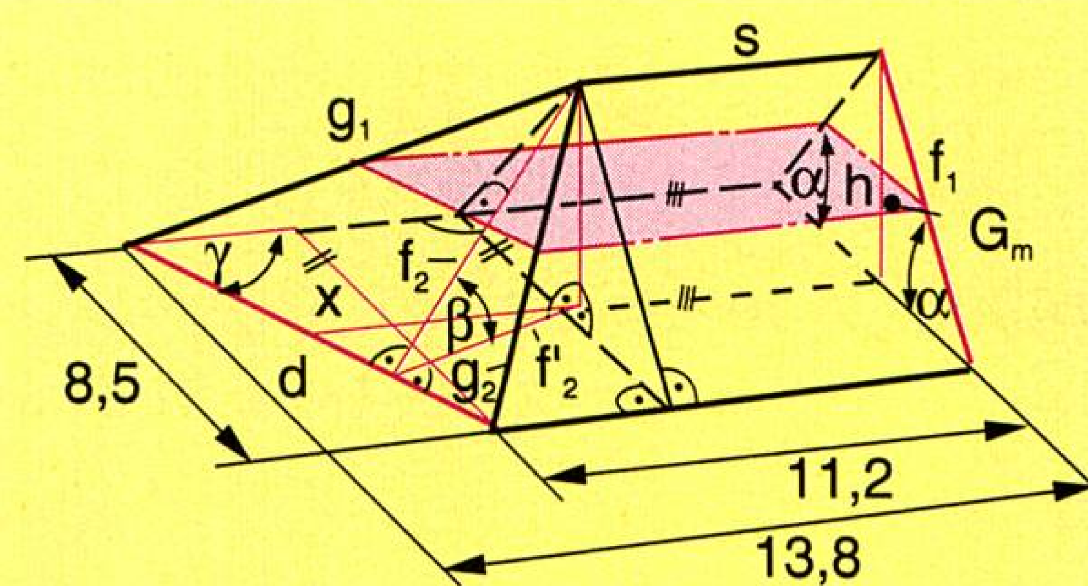
a) Firsthöhe h und Firstlänge s?

b) Länge der Gratsparren g_1 und g_2?

c) Dachfläche A?

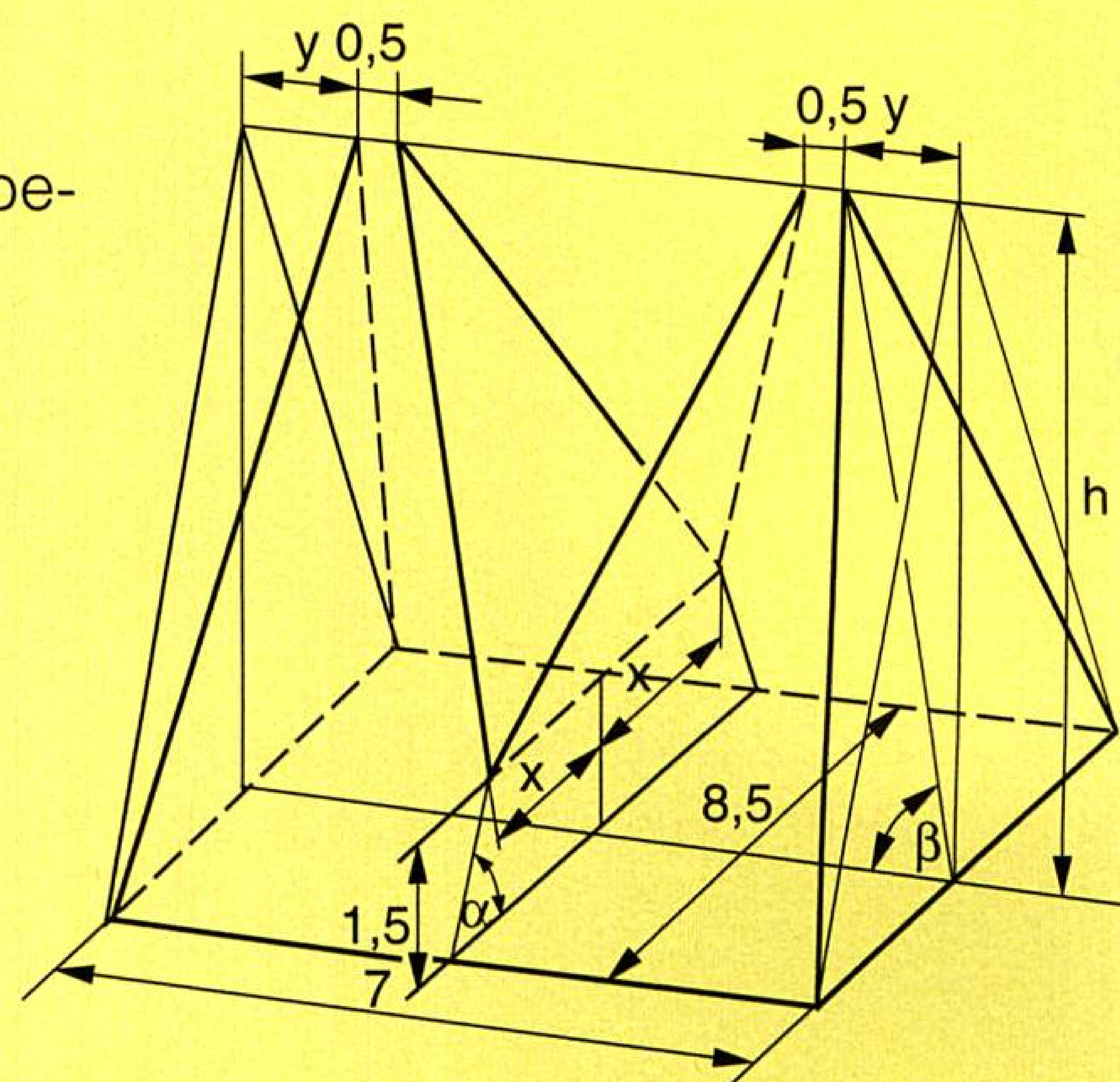
Bemerkung: Die Dachfläche besteht aus geneigten Seitenflächen und einer lotrechten Giebelfläche rechts.

d) Dachvolumen V?



(Bemaßungen in Meter)

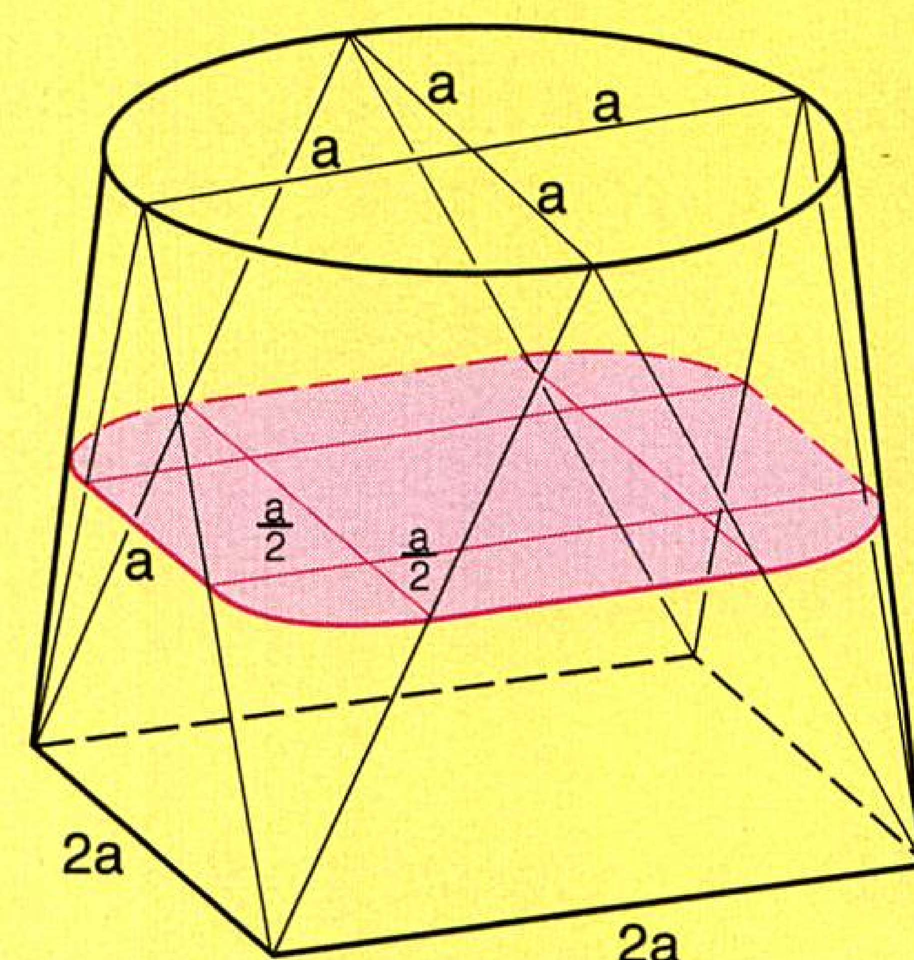
1446. Von einem Werkstück ($\alpha = 56{,}8°$, $\beta = 81°$) ist das Volumen V zu berechnen.



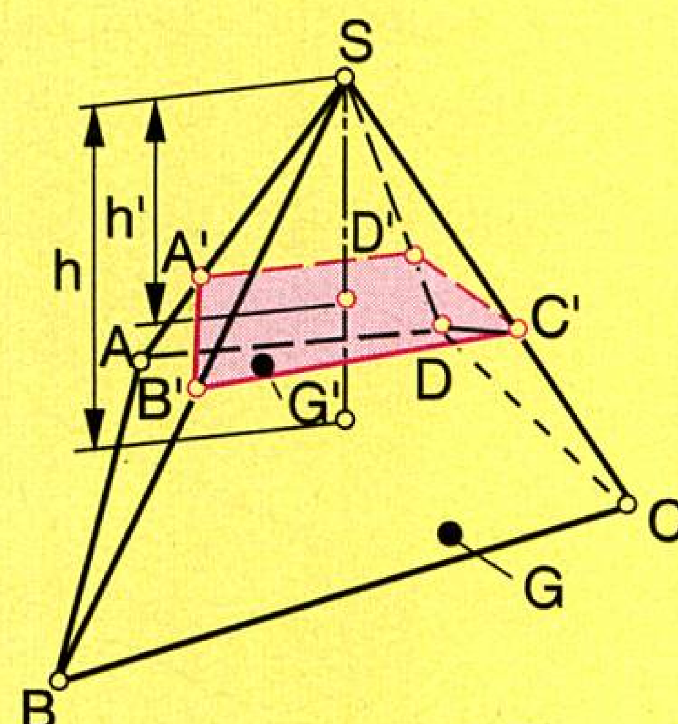
(Bemaßungen in Dezimeter)

1447. Das Volumen V des durch die nebenstehende Figur veranschaulichten Körpers ist **a)** allgemein mit den Formvariablen a und h **b)** für a = 0,50 m und h = 1,20 m zu berechnen.

1448. Wie groß ist die Höhe h des nebenstehenden Übergangsstücks (Quadratkreis), wenn a = 0,50 m und V = 1,00 m³?

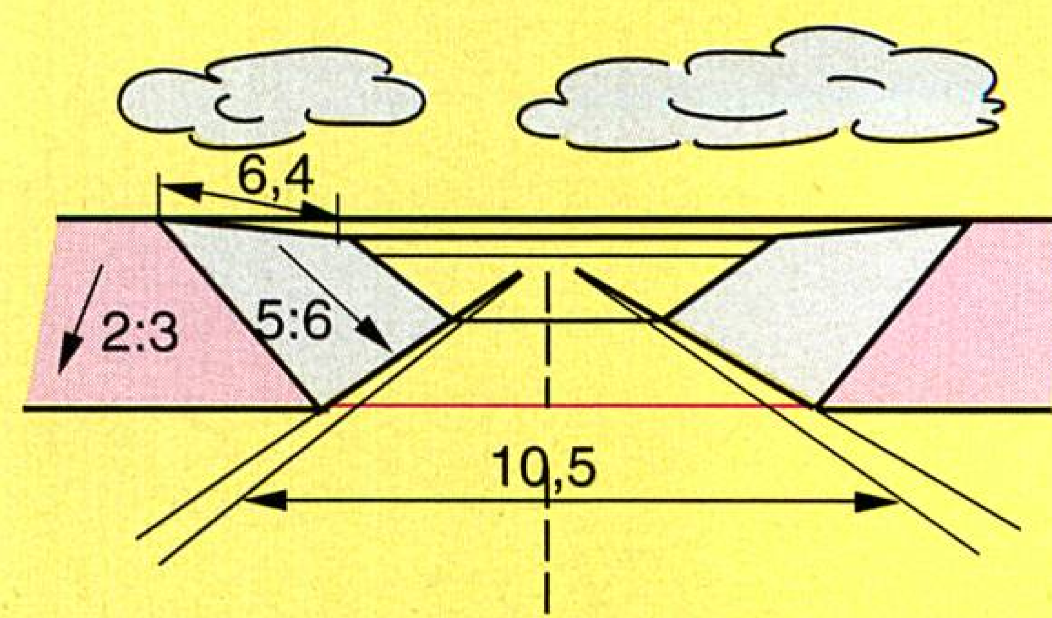


1449. Das Volumen $V = \frac{Gh}{3}$ der Pyramide soll mit der Prismatoidformel $V = \frac{h}{6}(G_1 + 4G_m + G_2)$ hergeleitet werden.



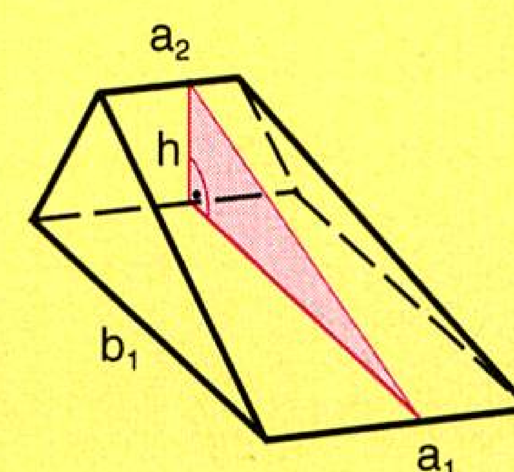
1450. Eine rechteckige Baugrube ($a_1 = 11{,}5$ m, $b_1 = 14{,}5$ m) mit einer Tiefe von 2,1 m wird allseitig im Verhältnis 2 : 3 abgeböscht. Es ist zu berechnen, wie viel Aushubmaterial anfällt.

1451. Ein 4,2 m hoher Bahndamm befindet sich in einem waagrechten Gelände und soll durch eine Unterführung (vgl. nebenstehende Figur) unterbrochen werden. Die Dammneigung beträgt 2 : 3 und die Neigung der Böschung 5 : 6. Wie groß ist das Volumen des abzutragenden Materials, wenn 20 % Auflockerung angenommen werden?
Bemerkung: Die Gehsteighöhe ist nicht zu berücksichtigen.

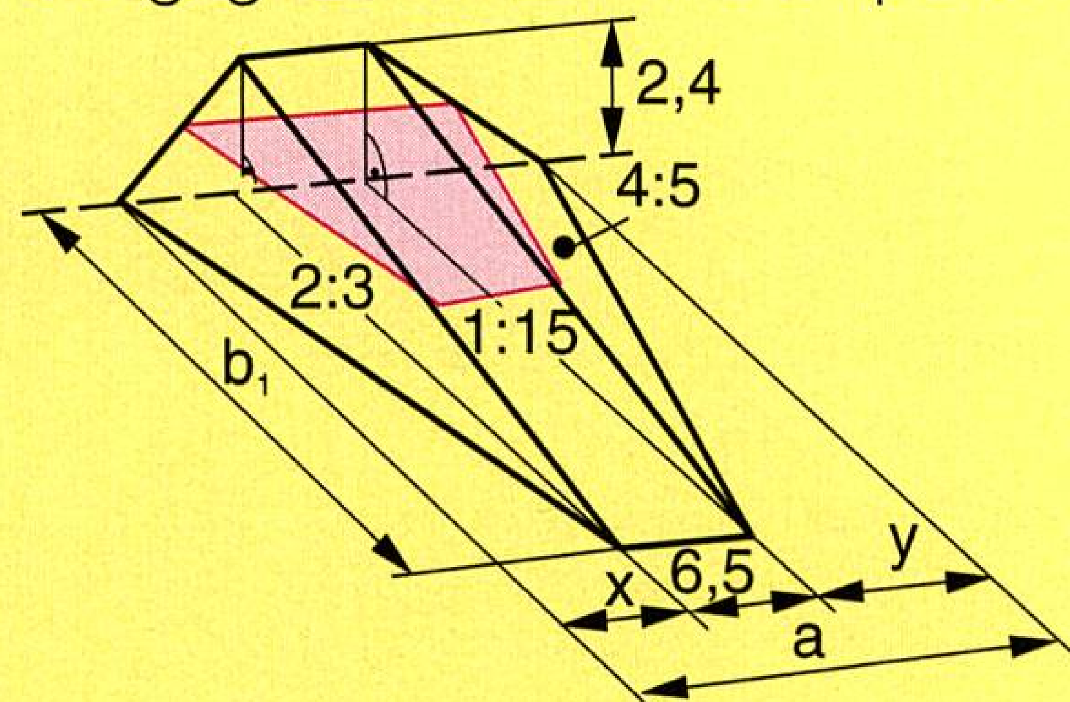


(Bemaßungen in Meter)

1452. Eine Zufahrtsrampe hat die Form eines Keils mit $a_1 = 3{,}5\,m$, $a_2 = 2\,m$ und $h = 1{,}8\,m$. Die Rampenneigung beträgt 12 %. Volumen?



1453. Das Volumen der gegebenen Zufahrtsrampe ist zu berechnen:

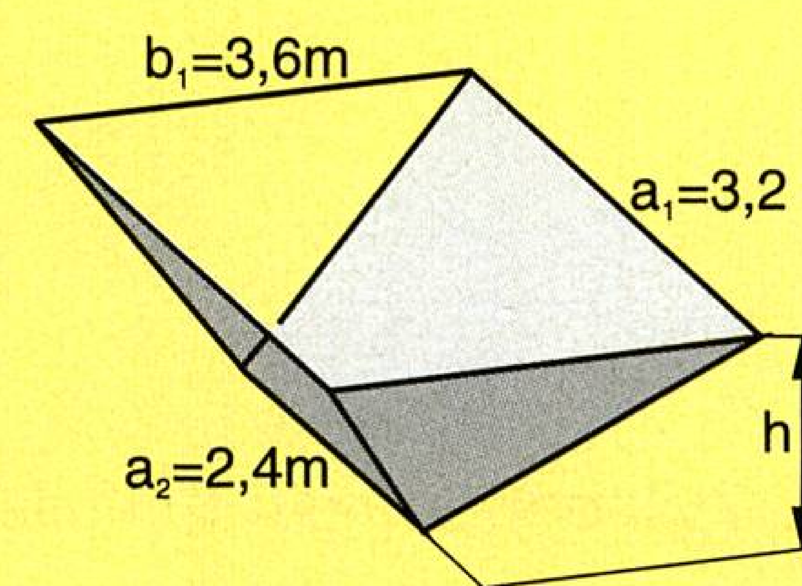


(Bemaßungen in Meter)

1454. Ein keilförmiger Behälter hat ein Fassungsvermögen von 15000 l.

a) Höhe h des Behälters?

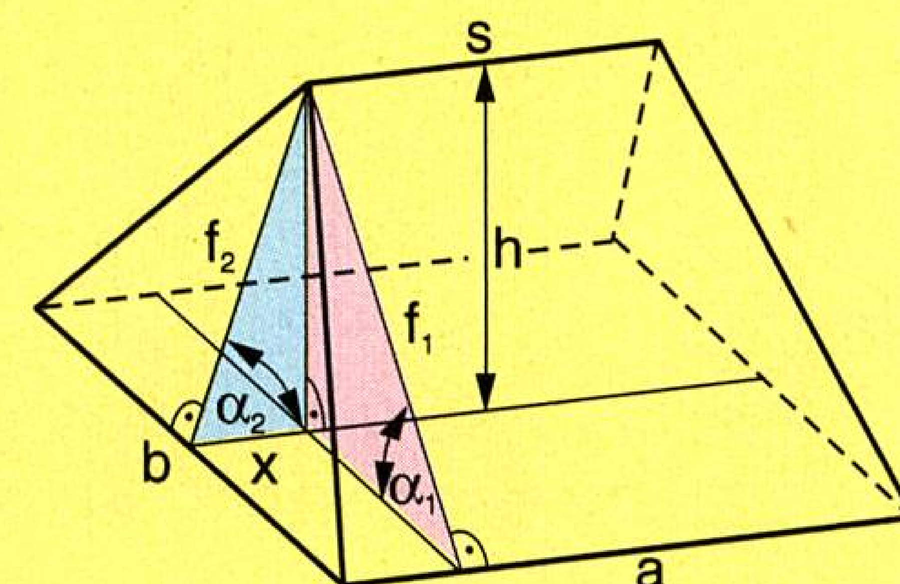
b) Wie viel Liter sind im Behälter, wenn er bis zur halben Höhe gefüllt ist?



1455. Von einem rechteckigen Walmdach ($a = 12{,}3\,m$, $b = 7{,}5\,m$) sind die Fallgeraden f_1 und f_2 bekannt: $f_1 = 5{,}2\,m$, $f_2 = 4{,}6\,m$.

a) Dachneigungen? **b)** Firstlänge s ? **c)** Dachvolumen?

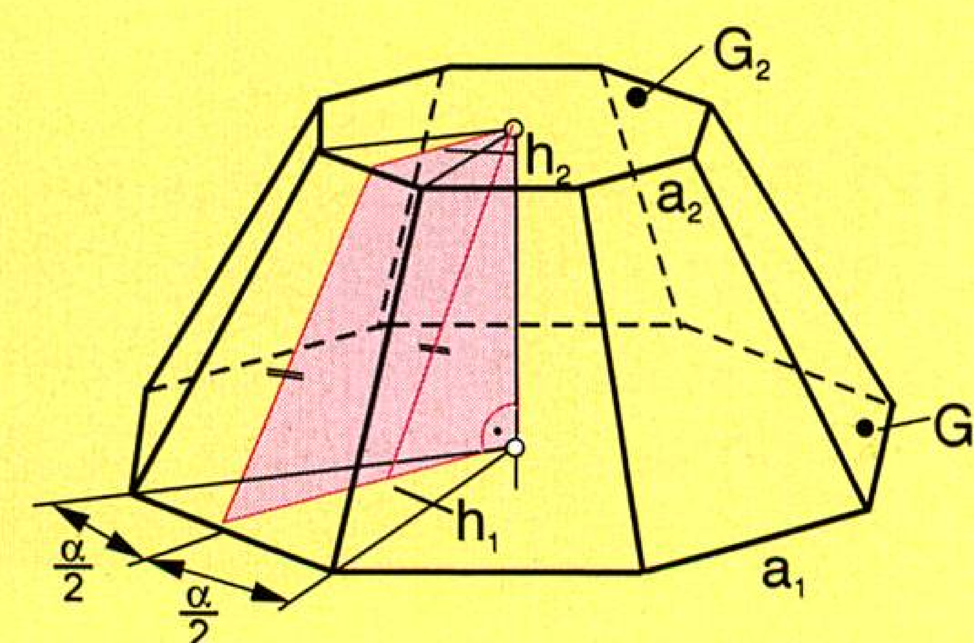
Anleitung: Der First liegt in der Mitte beider Längstraufen (gleiche Dachneigung).



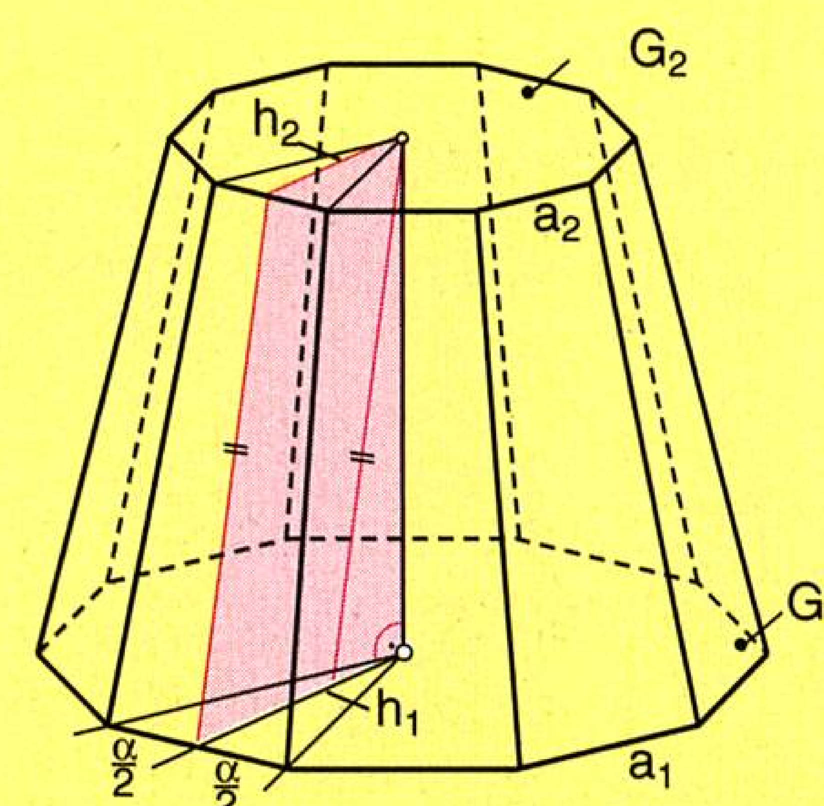
1456. Bei einem $h = 5\,dm$ hohen regelmäßigen **achtseitigen** Pyramidenstumpf messen die Grundkanten $a_1 = 2{,}2\,dm$ und $a_2 = 1{,}4\,dm$.

a) Das Volumen **b)** Die Oberfläche des Pyramidenstumpfs sind zu berechnen.

Anleitung: Die Grund- und die Deckfläche bestehen aus acht jeweils gleich großen gleichschenkeligen Dreiecken, wobei die Summe der der Basis gegenüber liegenden Winkel 360° ergibt.

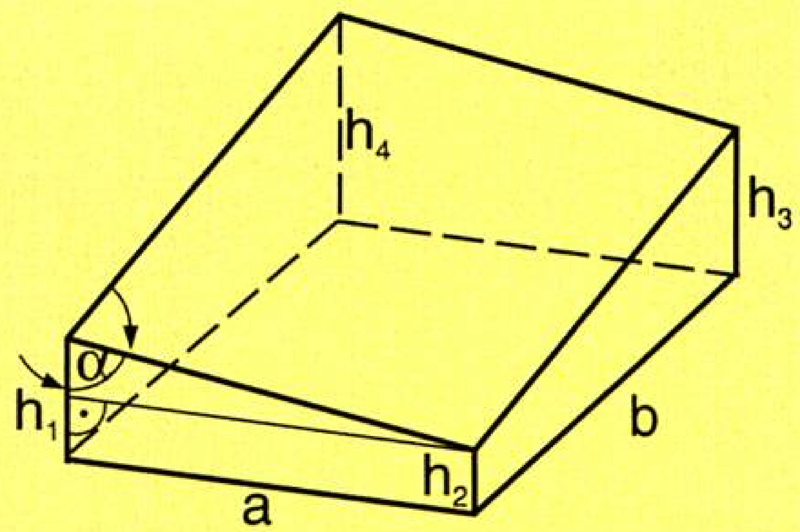


1457. Text wie Aufgabe **1456**. für einen regelmäßigen **zehnseitigen** Pyramidenstumpf.

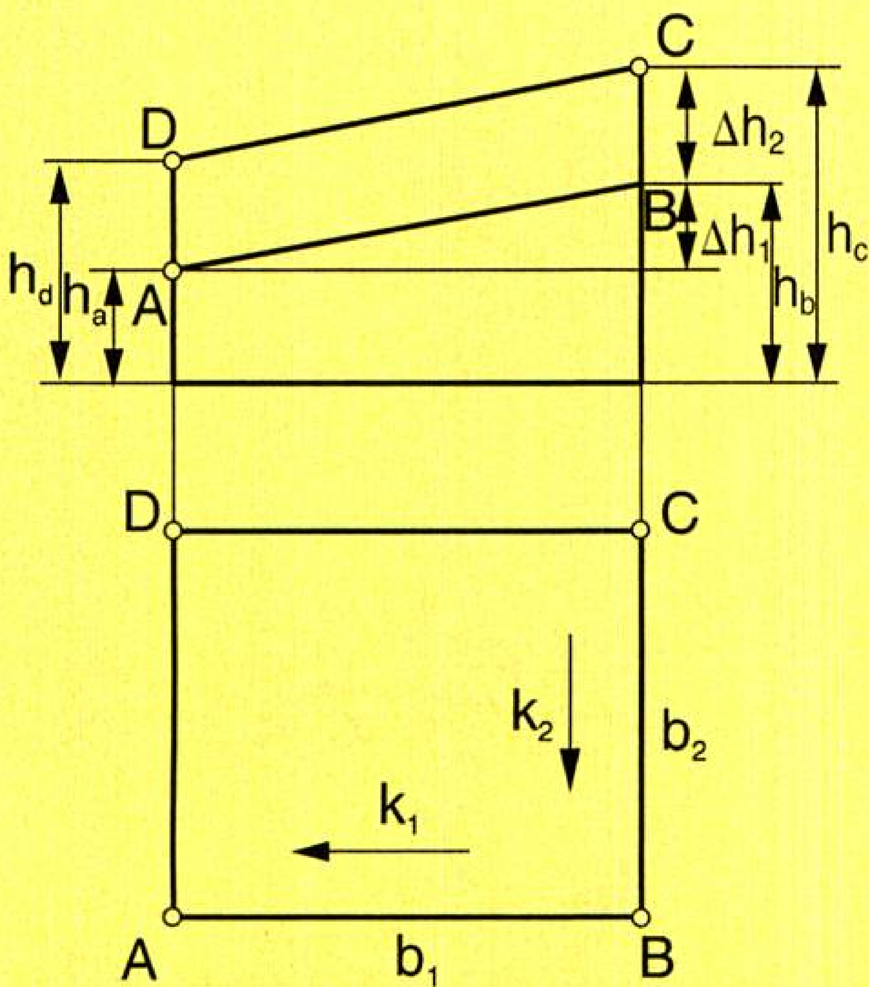


1458. Ein schräg abgeschnittenes gerades dreiseitiges Prisma hat die Grundkantenlängen $a = 8{,}4\,dm$, $b = 78\,cm$, $c = 1{,}3\,m$ und die Seitenkantenlängen $\ell_1 = 44\,cm$, $\ell_2 = 0{,}35\,m$, $\ell_3 = 4\,dm$. Volumen?

1459. Von einem schräg abgeschnittenen Quader sind die Längen $b = 5{,}3$ cm, $h_1 = 12{,}2$ cm, $h_3 = 3{,}5$ cm, $h_4 = 14{,}1$ cm und der Winkel $\alpha = 53{,}6°$ (vgl. nebenstehende Figur) bekannt. Volumen?



1460. Schräg abgeschnittener Quader:



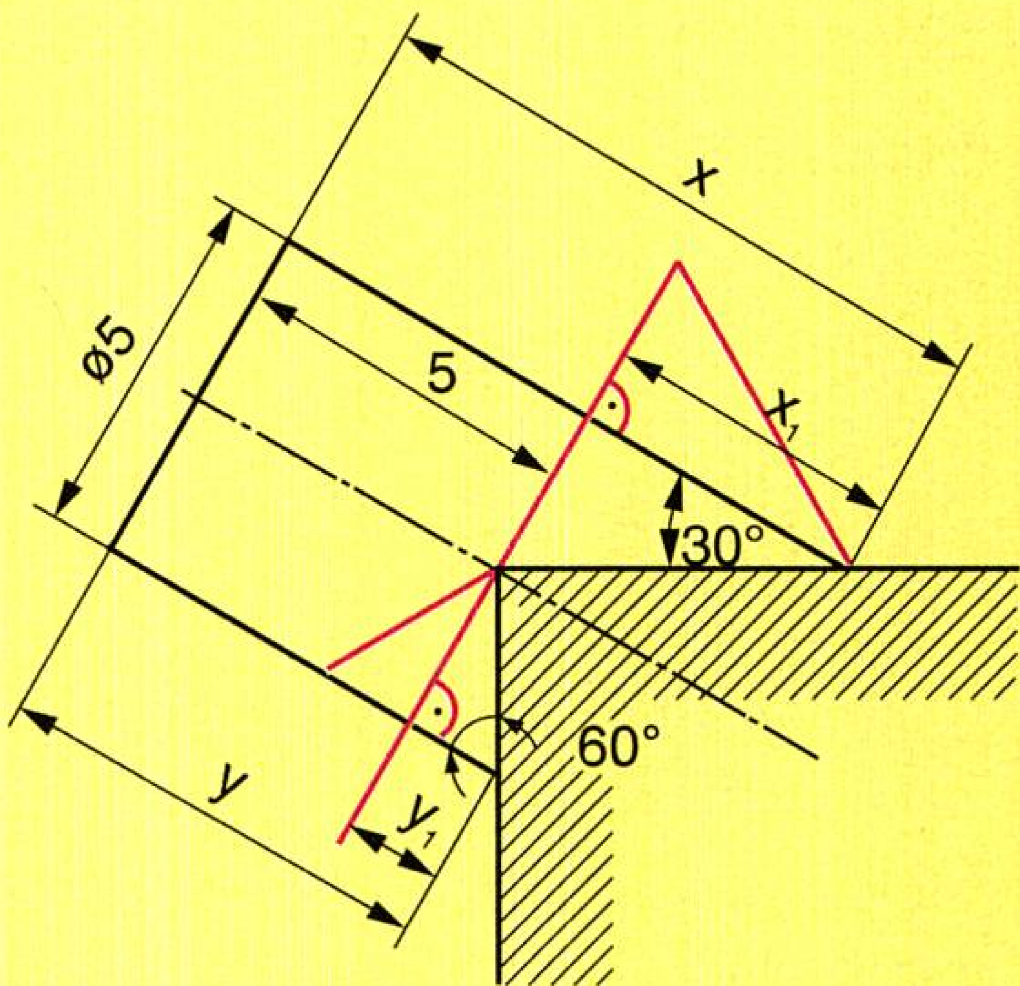
a) Geg.: h_a, b_1, b_2, k_1, k_2
Ges.: Volumen V, Mantel M

b) Text wie Aufgabe **a)** für $h_a = 2{,}40$ m, $b_1 = 12{,}60$ m, $b_2 = 8{,}40$ m, $k_1 = 40\% = 0{,}4$, $k_2 = 30\% = 0{,}3$

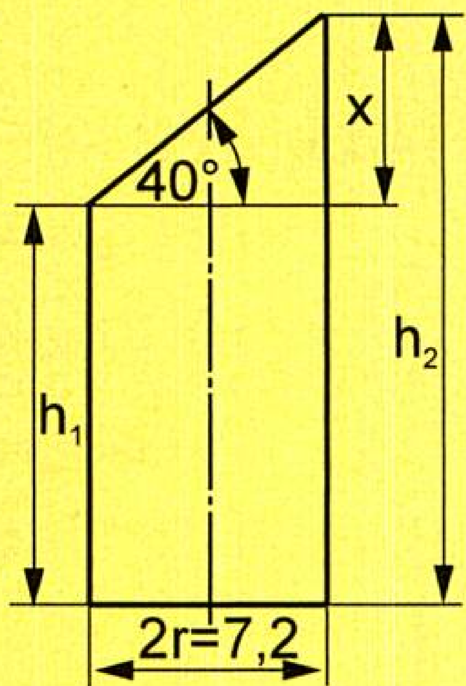
1461. Zylinderförmiger Einfüllstutzen:
(Bemaßungen in Dezimeter)

a) Längen x und y?

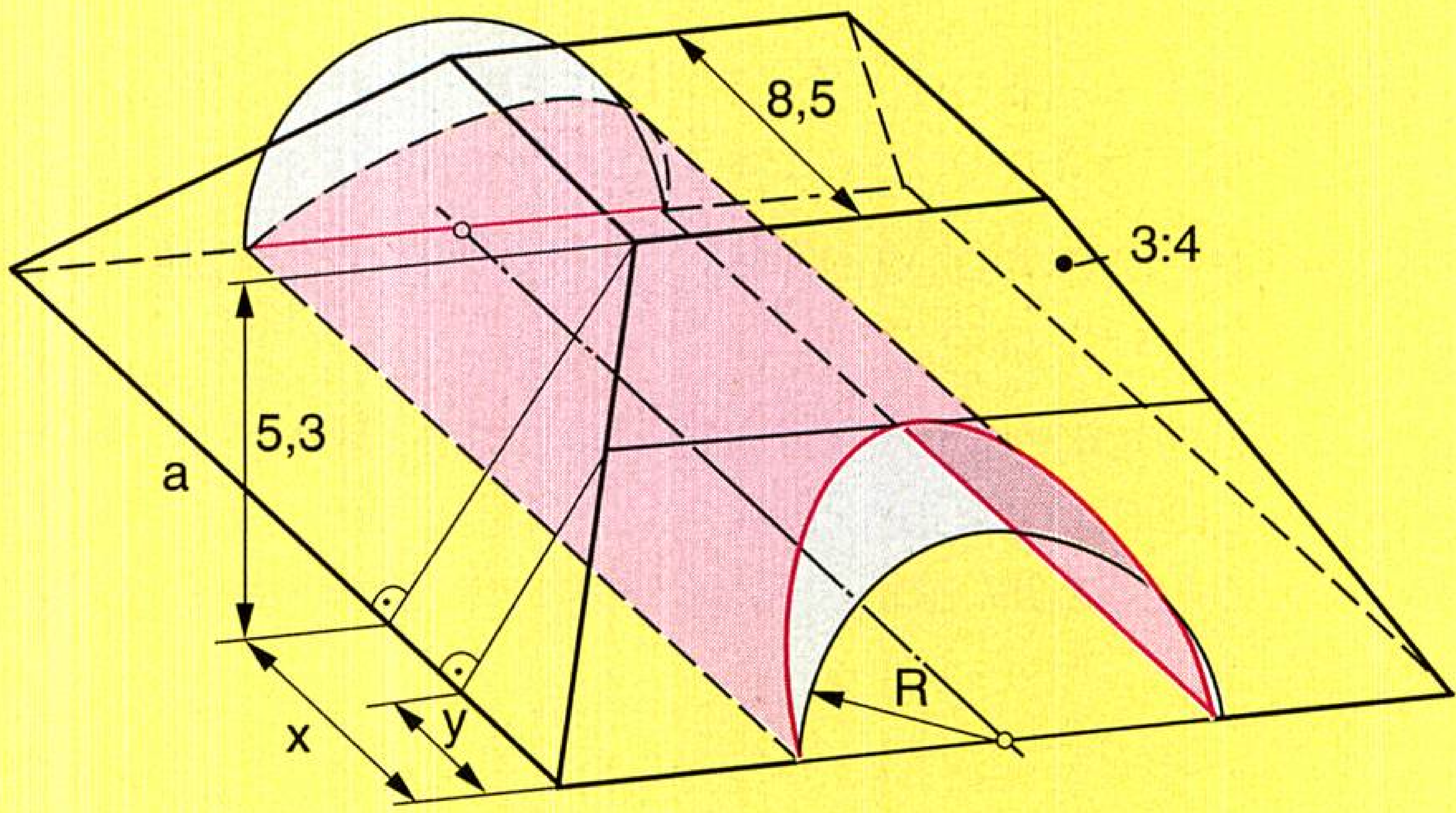
b) Mantel M?



1462. Ein gerader Kreiszylinder mit dem Radius $r = 3{,}6$ cm wird in einer Höhe von $h_1 = 12{,}5$ cm schräg abgeschnitten $(h_1 < h_2)$. Der Neigungswinkel des Schrägschnittes zur Grundfläche beträgt 40°. **a)** Volumen? **b)** Mantel? **c)** Oberfläche?

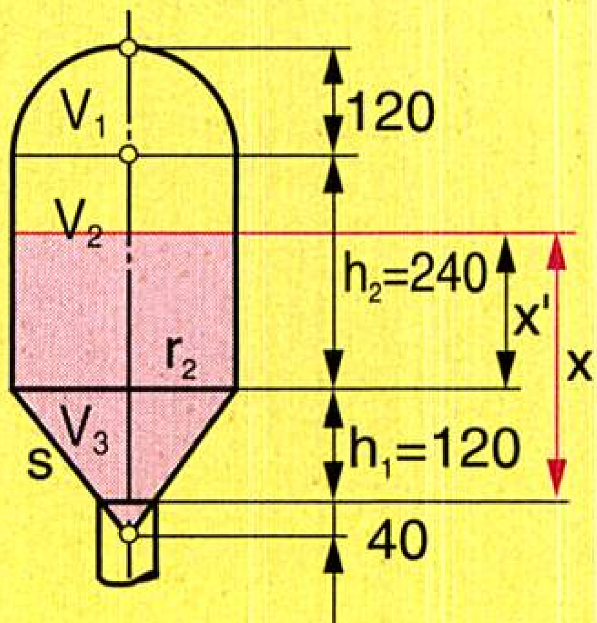


1463. Durch einen Straßendamm ist ein halbkreisförmiger Wilddurchlass ($R = 2{,}5$ m) vorgesehen. Wie viel Material ist abzutransportieren, wenn die Dammneigung 3 : 4 beträgt?



(Bemaßungen in Meter)

1464. Zementsilo:
(Bemaßungen in Zentimeter)



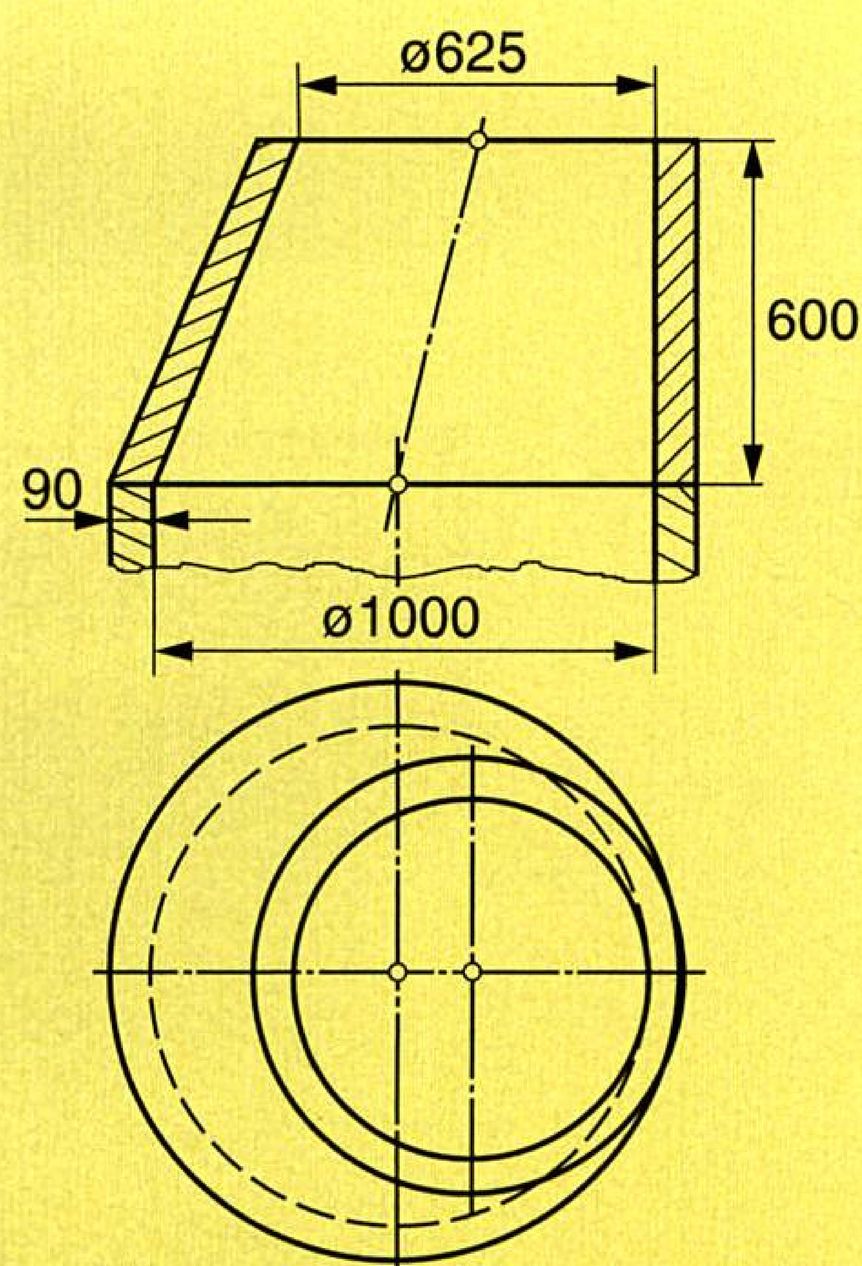
a) Volumen V?

b) Oberfläche O?

c) Masse m des Silos bei einer Blechstärke von 3 mm? ($\rho_{Blech} = 7{,}85\ t/m^3$)

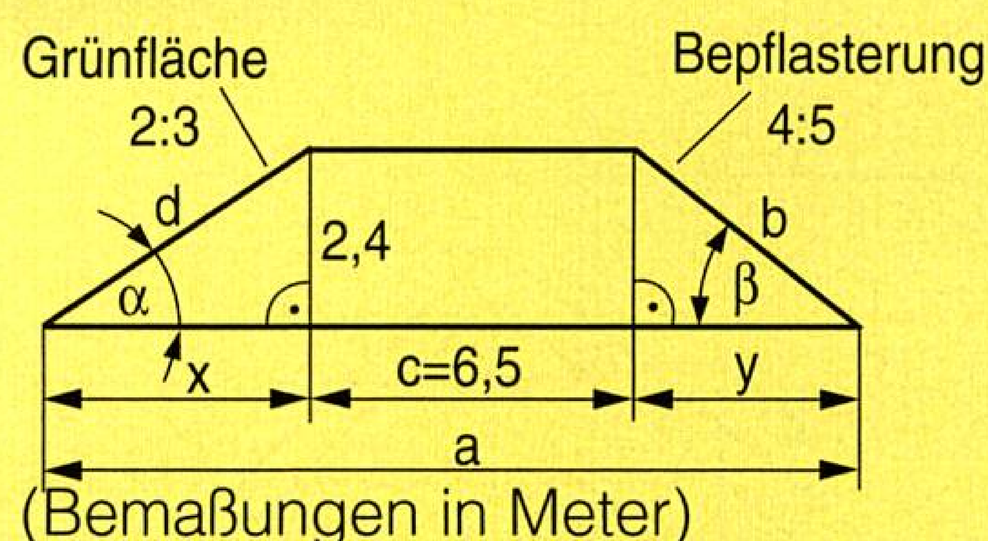
d) Füllhöhe x bei einer Füllung von 60 %?

1465. Schachthals:
(Bemaßungen in Millimeter)



a) Volumen V ?
b) Masse m für $\rho = 2{,}5\ \mathrm{kg/dm^3}$?

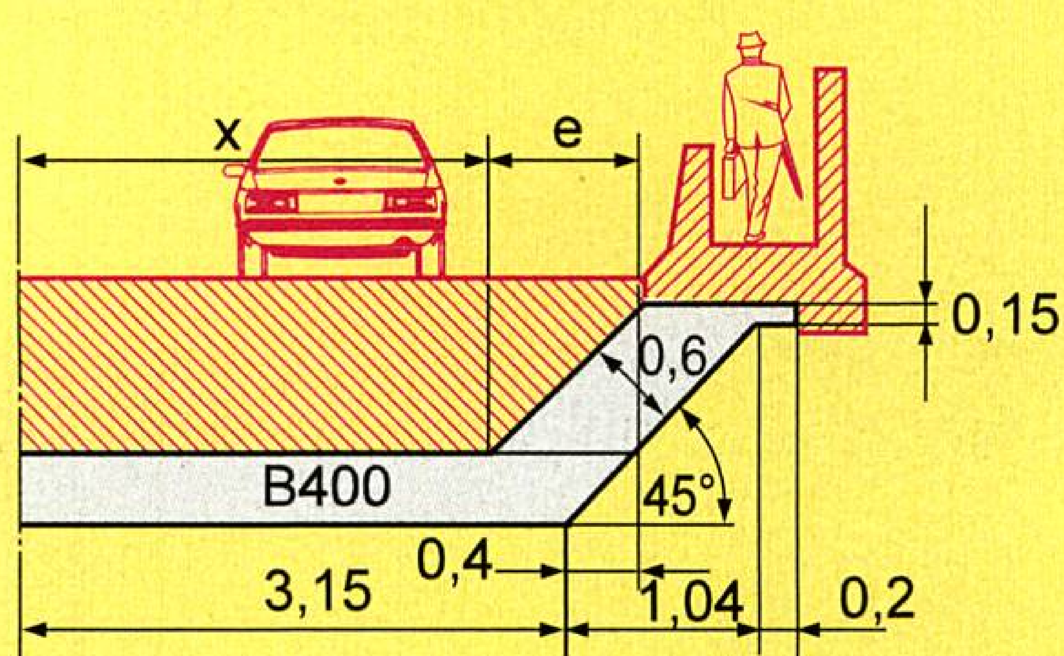
1466. Dammquerschnitt:



(Bemaßungen in Meter)

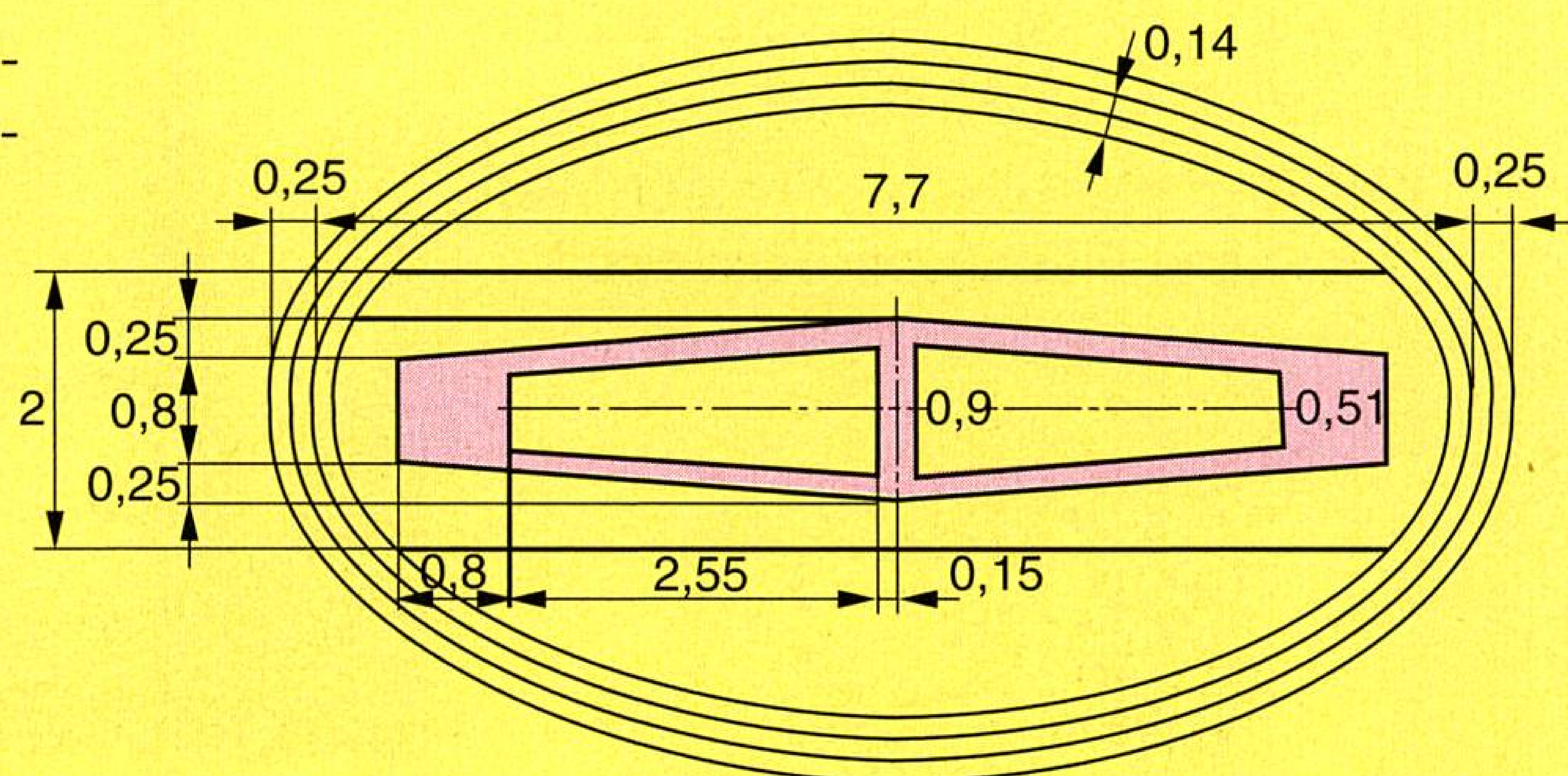
a) Querschnittsfläche A_1?
b) Begrünungsfläche A_2 } pro 100 Laufmeter?
c) Zu bepflasternde Fläche A_3 } pro 100 Laufmeter?
d) Dammvolumen

1467. Brückenquerschnitt:
(Bemaßungen in Meter)



a) Betonbedarf je Laufmeter?
b) Masse je Laufmeter ($\rho_{Beton} = 2{,}00\ \mathrm{kg/dm^3}$)[1)]

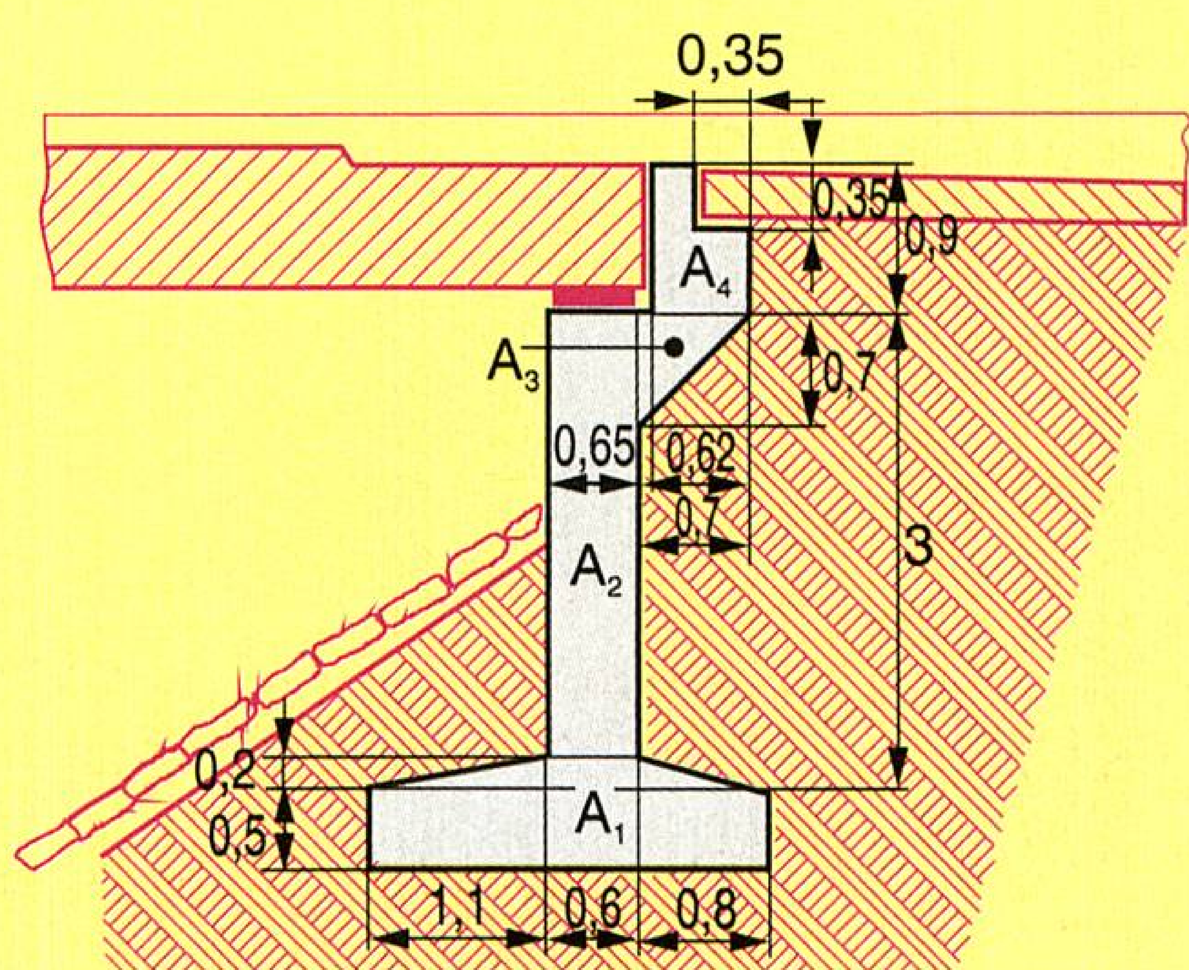
1468. Das Volumen des nebenstehend veranschaulichten prismenförmigen Brückenpfeilers (h = 9,40 m) ist zu berechnen!



(Bemaßungen in Meter)

1) Mittelwert.

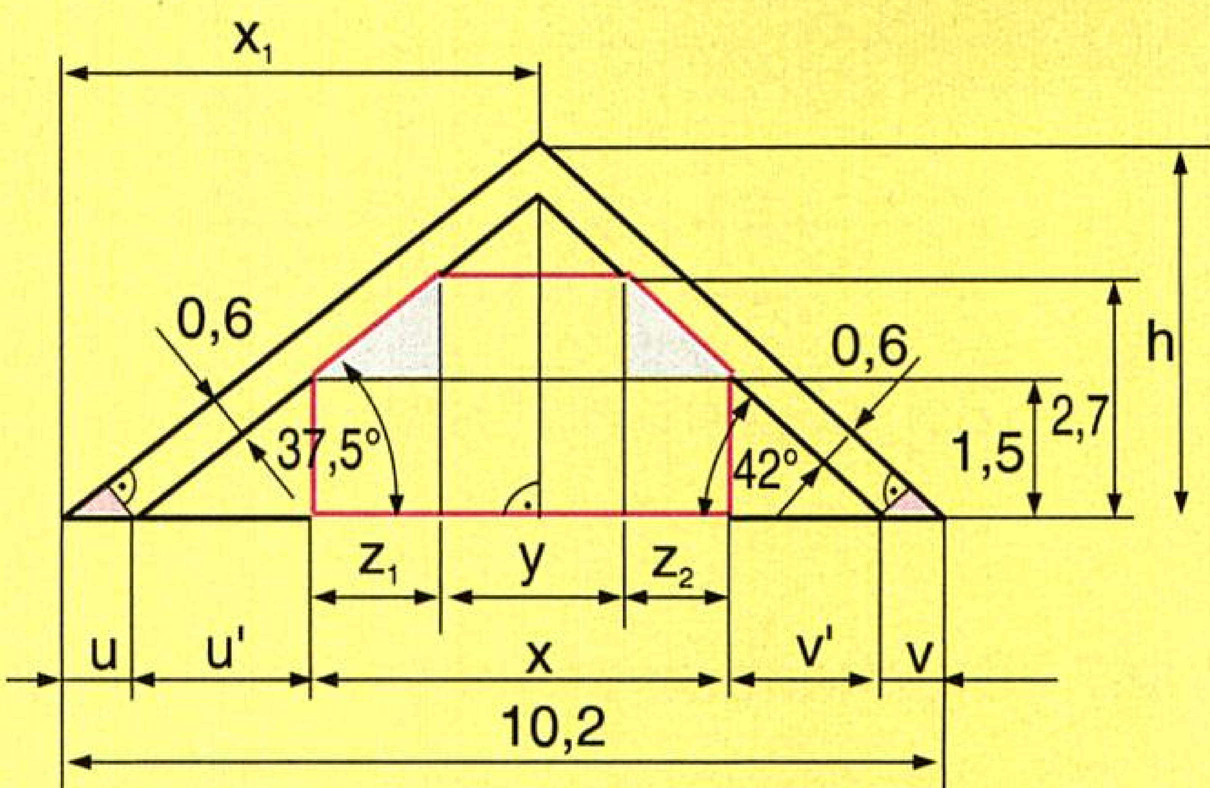
1469. Brückenwiderlager:
(Bemaßungen in Meter)





Geg.: Breite $b = 9{,}50$ m, $\rho_{Beton} = 2500\,\mathrm{kg/m^3}$
Ges.: **a)** Volumen **b)** Masse

1470. Ein 14,5 m langer Dachraum soll ausgebaut werden.
a) Wohnfläche A ? **b)** Wohnraumvolumen V ?
c) Firsthöhe h ?

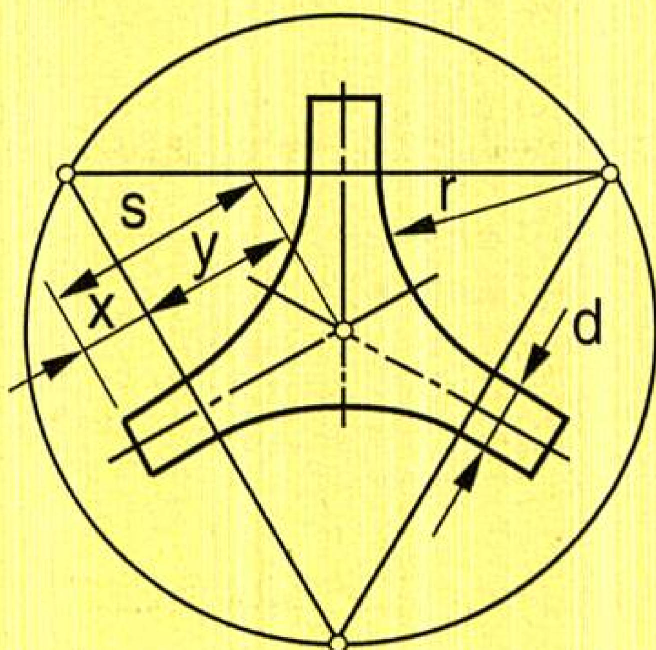


(Bemaßungen in Meter)

1471. Die nachstehende Figur zeigt den Grundriss des $h = 116$ m hohen IAEA- Turmes A1 der Wiener UNO-City: $r = 45$ m, $s = 40$ m, $d = 13$ m. Nur 66 % der Turmhöhe werden für Geschosse verwendet.

a) Wie groß ist das Volumen der Zwischengeschosse?

b) Wie groß ist die mit Fenstern versehene Fläche der Fassade?

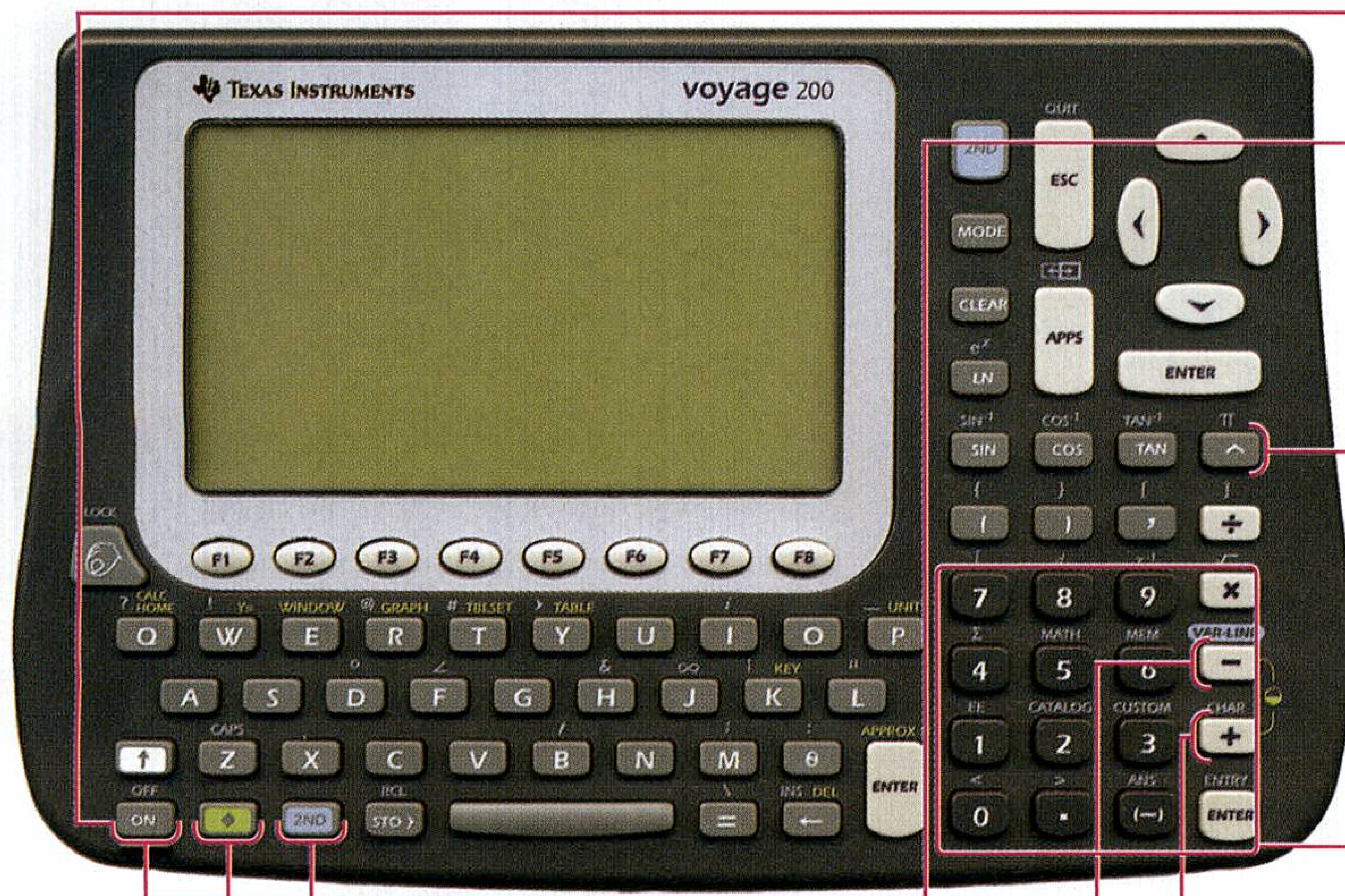




MODERNE HILFSMITTEL IN DER MATHEMATIK: DER VOYAGE 200

Das nachstehende Kapitel sollten Sie mit dem Taschenrechner Voyage 200 (abgekürzt TR) durcharbeiten. Wir gehen davon aus, dass Sie die Batterien installierten und bereit sind, das Gerät einzuschalten!

1. Eine erste Einführung ...



- Drücken Sie die [ON]-Taste um den TR einzuschalten.
- Um den TR auszuschalten, ist [2ND] [OFF] zu drücken.

Wichtig: Der [OFF]-Befehl ist in blauer Schrift gedruckt. Um auf dem TR einen Befehl zu wählen, der in blauer Schrift aufscheint, ist immer die [2ND]-Taste zu drücken.

- Beispiel: Für die Zahl π ist [2ND] [π] zu drücken.

Die [2ND]- Taste ermöglicht den Zugriff auf die Zweitfunktion der anschließend betätigten Taste. Auf der Tastatur sind die Zweitfunktionen oberhalb der jeweiligen Taste in blauer Farbe angegeben. Im Buch stellen wir die jeweilige Taste mit der Beschriftung der Zweitfunktion in blauer Farbe dar.

- Diese Tasten sind vergleichbar mit den üblichen Eingabetasten eines beliebigen Taschenrechners. Wir werden diese Tasten verwenden, um einfache Berechnungen durchzuführen.

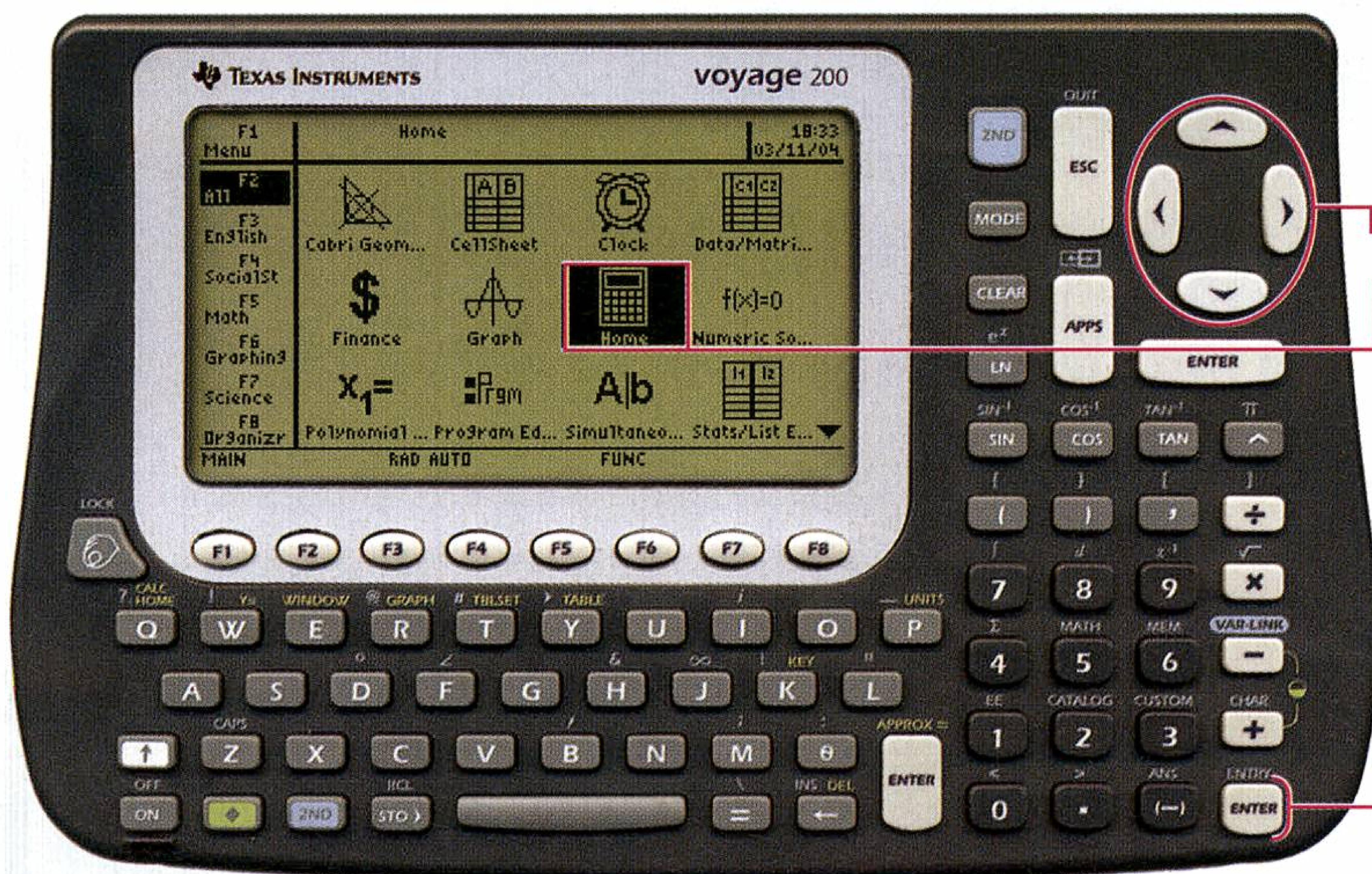
Der **Display-Kontrast** ist unter Umständen zu schwach eingestellt, so dass Sie gar nichts erkennen können.

Stellen Sie den Kontrast wie gewünscht ein.

- Zum heller stellen der Anzeige drücken und halten Sie [◆] und tippen auf [−]
- Zum dünkler stellen der Anzeige drücken und halten Sie [◆] und tippen auf [+]



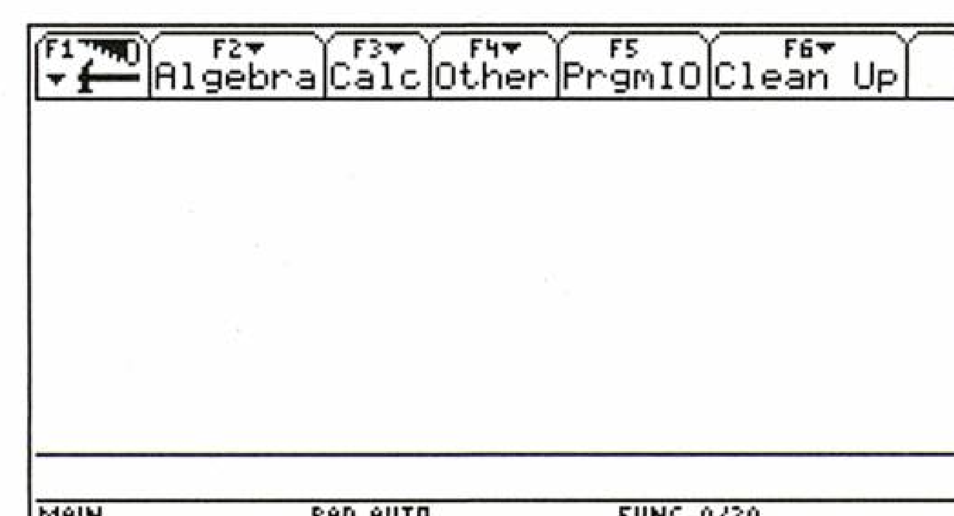
Wenn Sie die beiden Tasten [◆] [+] oder [◆] [−] zu lange gedrückt halten, wird das Display entweder ganz schwarz oder ganz hell. Zur Feineinstellung ist es daher besser, [◆] gedrückt zu halten und dann [+] oder [−] anzutippen.



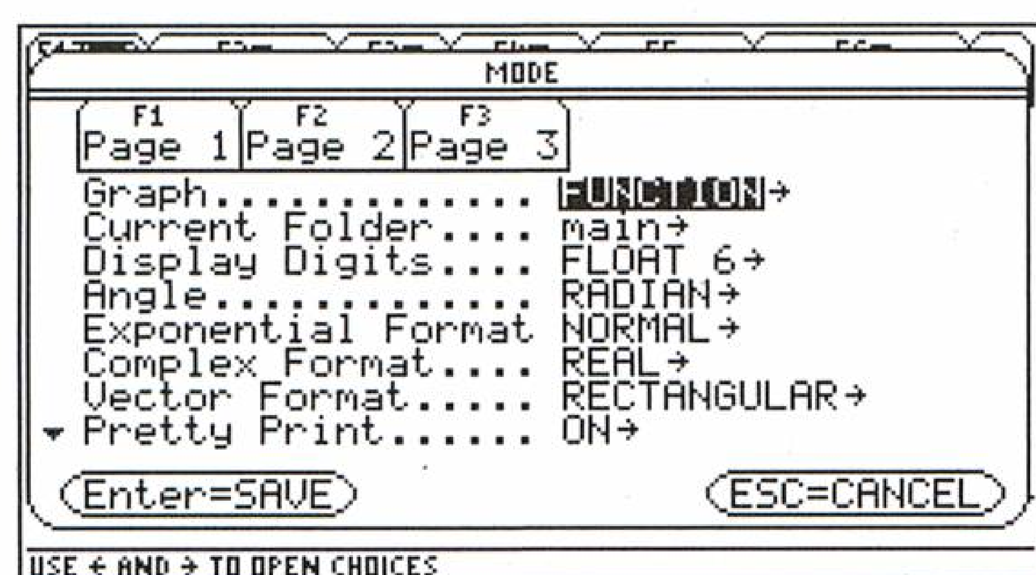
Um von der sogenannten **Applikations-Arbeitsfläche** zum **Hauptbildschirm** zu gelangen, ist mit Hilfe der

- **Cursortasten** das **Home-**
- **Symbol** anzusteuern und
- [ENTER] zu drücken.

Der Hauptbildschirm sieht so aus:



Bildschirm nach dem Drücken von MODE:



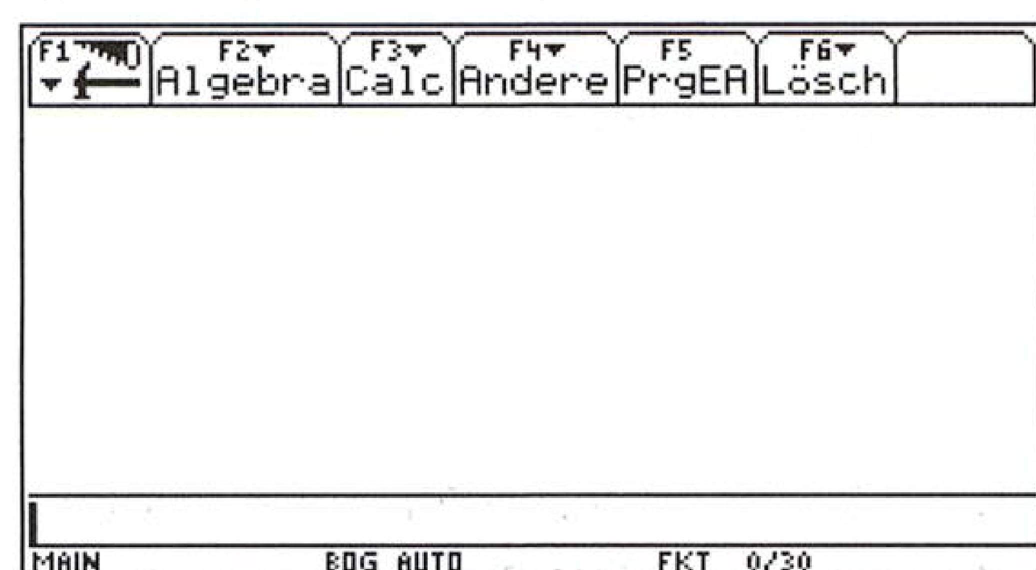
Bildschirm nach dem Drücken von F3 ⌄:



Bildschirm nach dem Drücken von ⟩ 2:

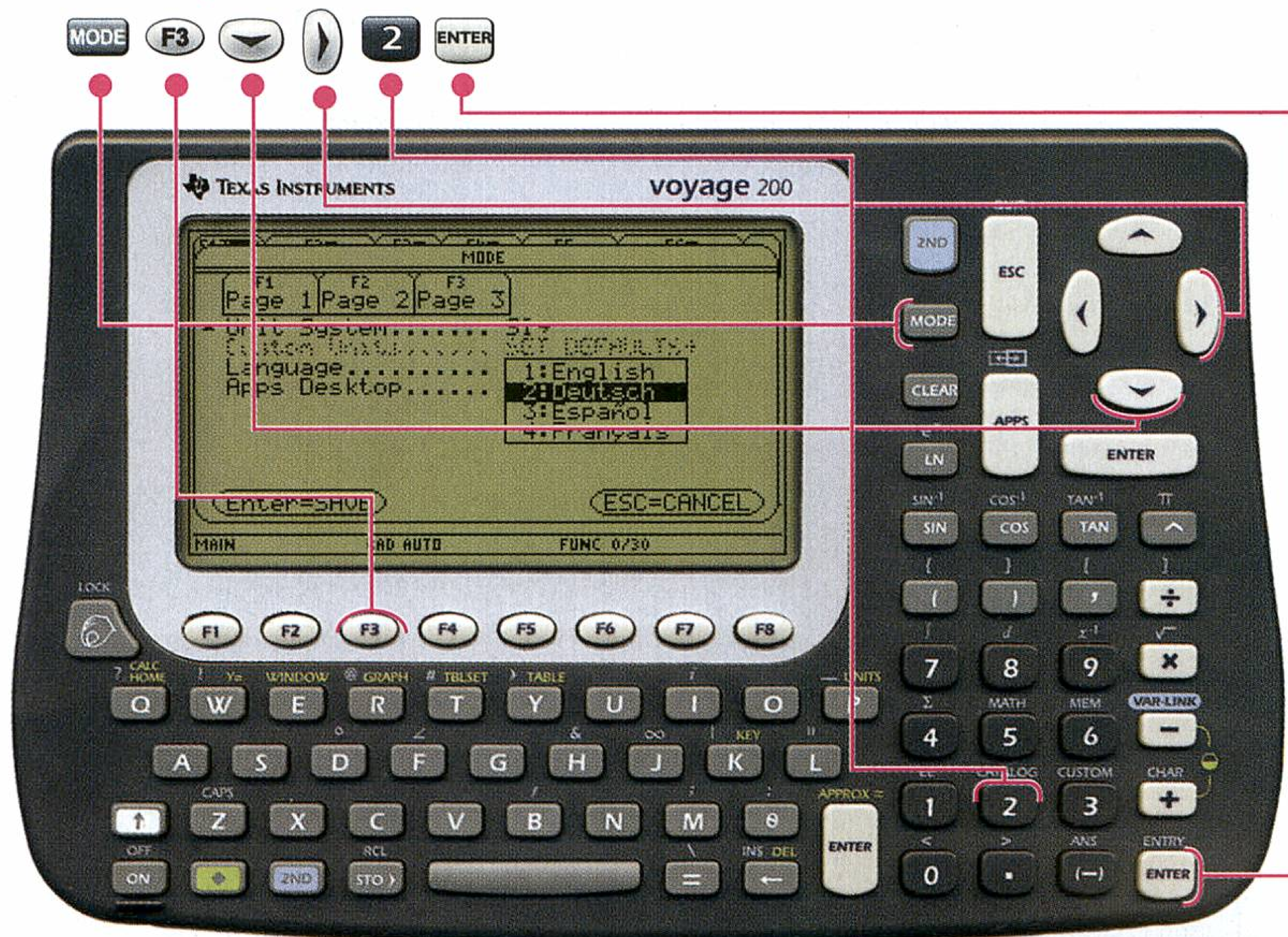


Bildschirm nach dem Drücken von ENTER: Hauptbildschirm (deutschsprachige Version)



Der Voyage 200 verfügt über mehrere Arbeitssprachen. Um das Gerät auf die **Arbeitssprache Deutsch** einzustellen, ist Folgendes einzugeben:

MODE F3 ⌄ ⟩ 2 ENTER

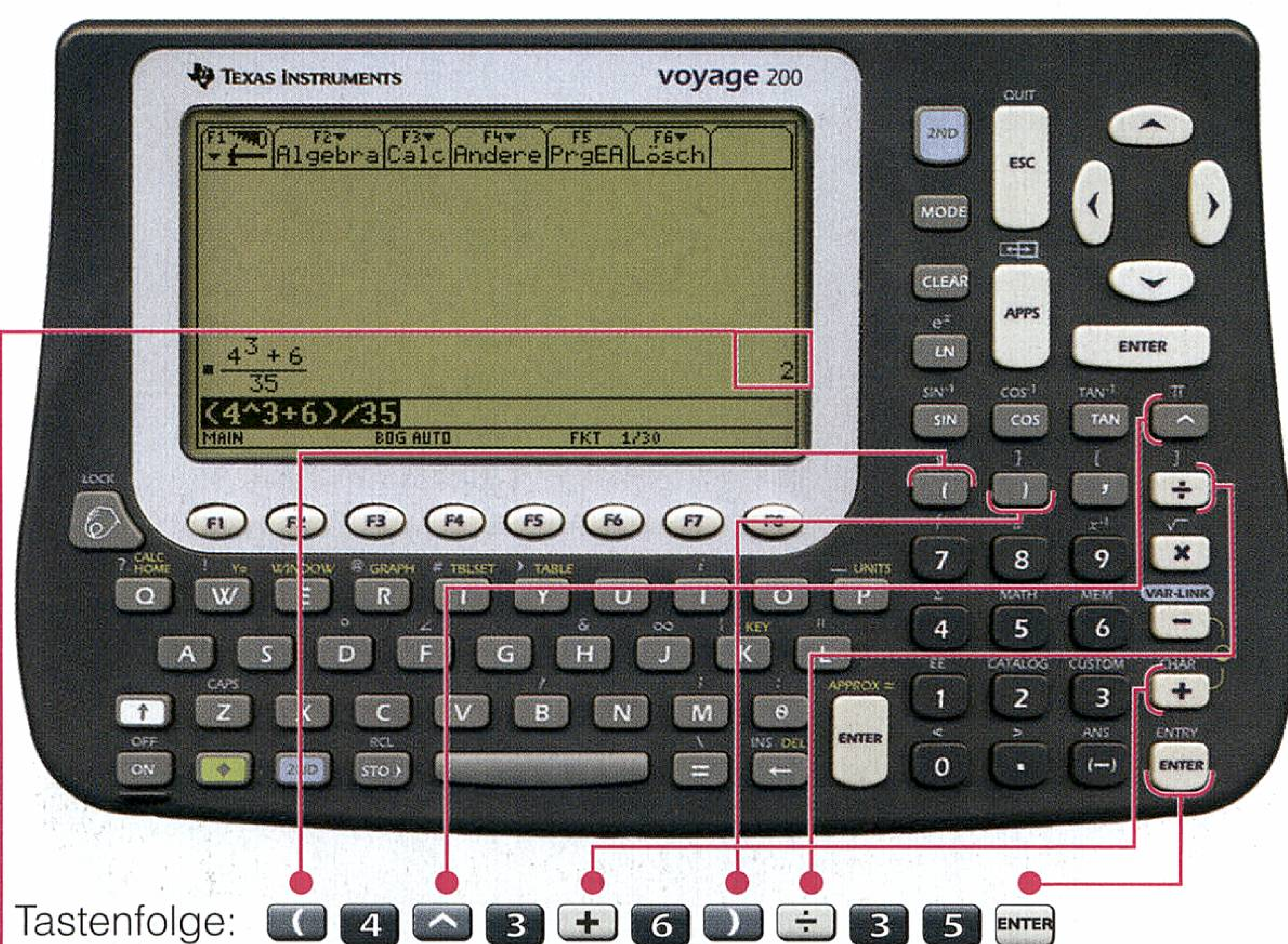


Beispiel:

Es ist $\frac{4^3+6}{35}$ mit dem TR zu berechnen!

Lösung:

Wir verwenden hauptsächlich den *dunkelgrauen* Tastenblock.



Tastenfolge: (4 ^ 3 + 6) ÷ 3 5 ENTER

Resultat: 2

Weshalb konnten wir nicht 4^3+6/35 eingeben? Nun, der TR interpretiert 4^3+6/35 als $4^3 + \frac{6}{35} = \frac{2246}{35}$. Überprüfen Sie das Ergebnis.

Zu wissen, wie man eine Eingabe bearbeitet, kann eine Menge Zeit sparen. Falls Sie sich beim Eingeben eines Terms einmal vertippen, ist es meistens einfacher, den Fehler zu korrigieren anstatt den ganzen Term noch einmal zu tippen. Lesen Sie dazu den Text in der Außenspalte.

Angenommen, Sie wollen $\frac{4^3+76}{35}$ berechnen. Anstatt den gesamten Ausdruck neu einzugeben, brauchen Sie nur den Cursor mittels Drücken der jeweiligen Cursortaste an jene Stelle des Terms zu bewegen, die bearbeitet werden soll.

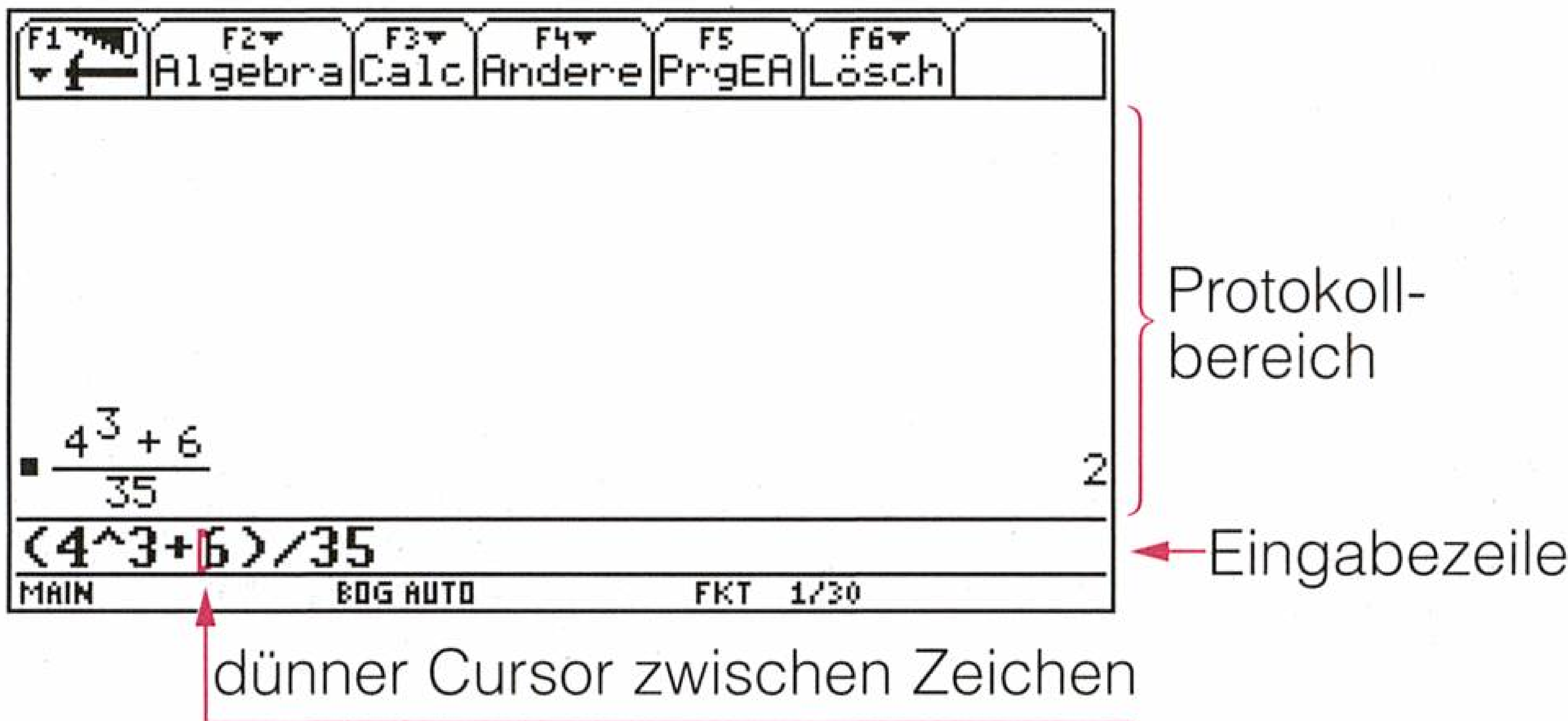
Beispiel: Drücken Sie ⟨ um den Cursor nach links zu bewegen und ⟩, um den Cursor nach rechts zu bewegen.

Beispiel:

Es ist $\frac{4^3+76}{35}$ unter Verwendung der vom vorigen Beispiel aufscheinenden Eingabezeile (4^3 +6)/35 zu berechnen.

Lösung:

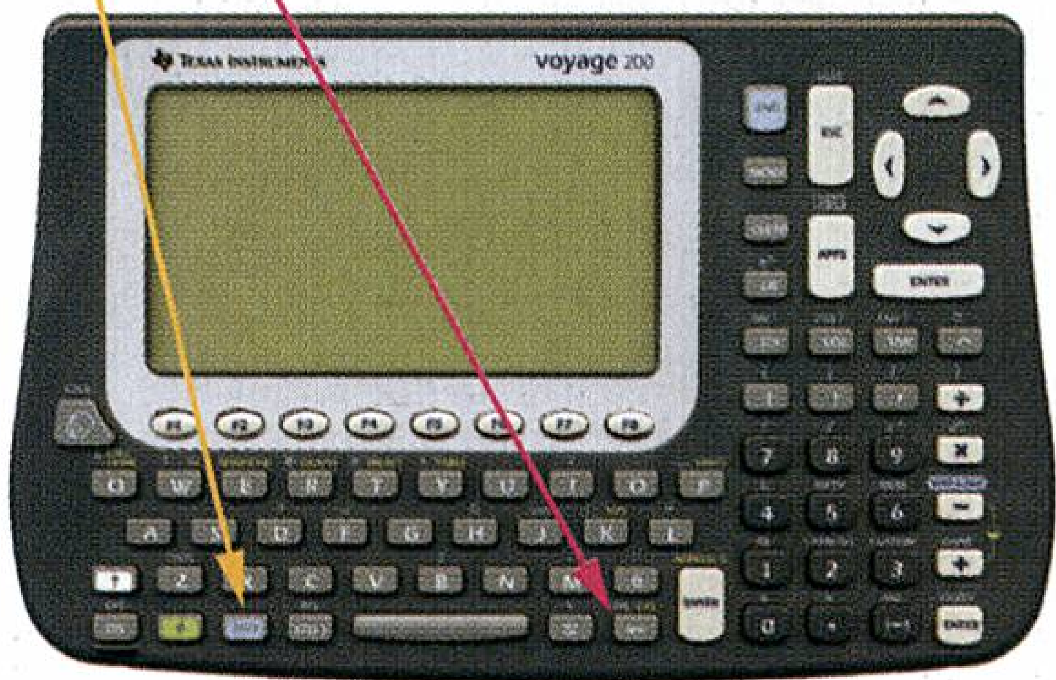
Der Cursor ist mittels Cursortaste (vgl. die Erklärung auf der vorigen Seite) bis vor die Ziffer 6 zu bewegen:



Danach ist die Zahl 7 einzugeben und ENTER zu drücken.

Resultat: 4

Der TR verfügt sowohl über einen Einfüge- als auch über einen Überschreibemodus. Um zwischen Einfüge- und Überschreibemodus hin und her zuschalten, drücken Sie 2ND INS.



Der TR befindet sich im

Einfügemodus

(dünner Cursor zwischen Zeichen)

Der als nächstes geschriebene Buchstabe wird an der Cursorposition eingefügt.

Der TR befindet sich im

Überschreibemodus

(Cursor markiert ein Zeichen)

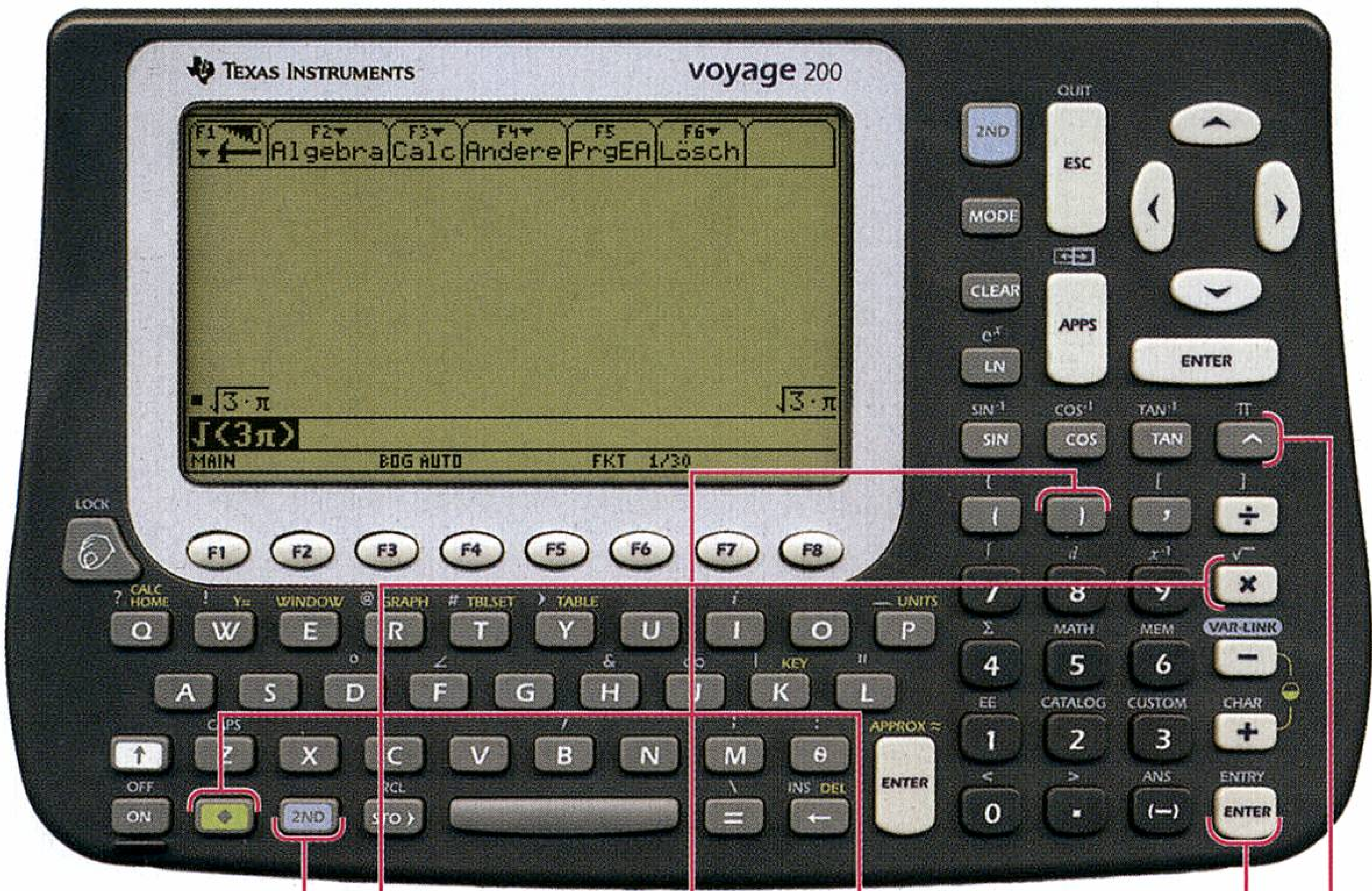
Der als nächstes geschriebene Buchstabe ersetzt das hervor gehobene Zeichen.

Anhand des Cursors erkennen Sie, ob Sie sich im Einfüge- oder Überschreibmodus befinden.

Beispiel:

Es ist $\sqrt{3\pi}$ mit dem TR als Dezimalzahl zu berechnen.

Lösung:



Tastenfolge: 2ND √ 3 2ND π) ENTER

Der TR zeigt $\sqrt{3\pi}$ als Ergebnis an.

Um einen Dezimalwert zu erhalten, ist ◆ ENTER zu drücken.

Resultat: 3.06998

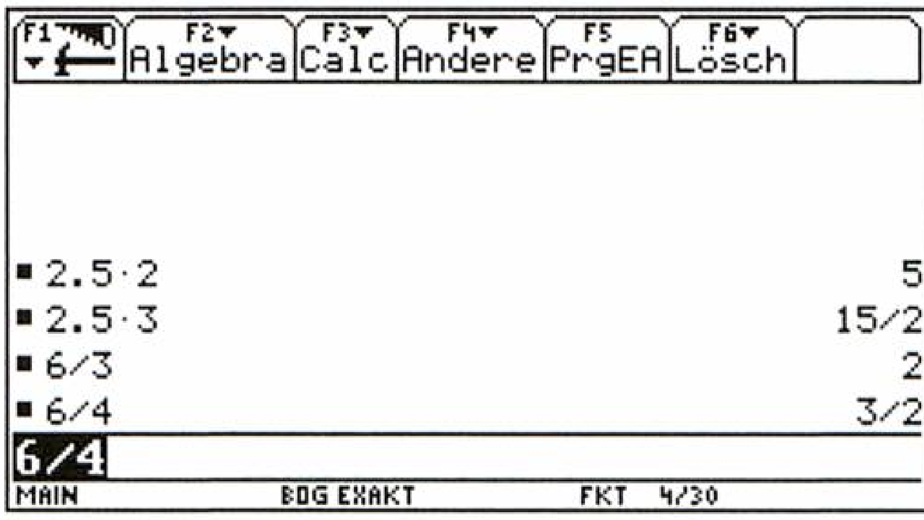
Bei technisch-wissenschaftlichen Taschenrechnern muss man für die Berechnung von 3π die Multiplikationstaste (×) zwischen 3 und π drücken. Beim Voyage 200 ist das nicht notwendig.

Wenn Sie 2ND √ drücken, finden Sie am Bildschirm folgende Anzeige: √(

Der Voyage 200 schreibt also automatisch eine öffnende runde Klammer nach dem Quadratwurzelzeichen. Sie haben deshalb die Eingabe mit einer schließenden runden Klammer zu beenden.

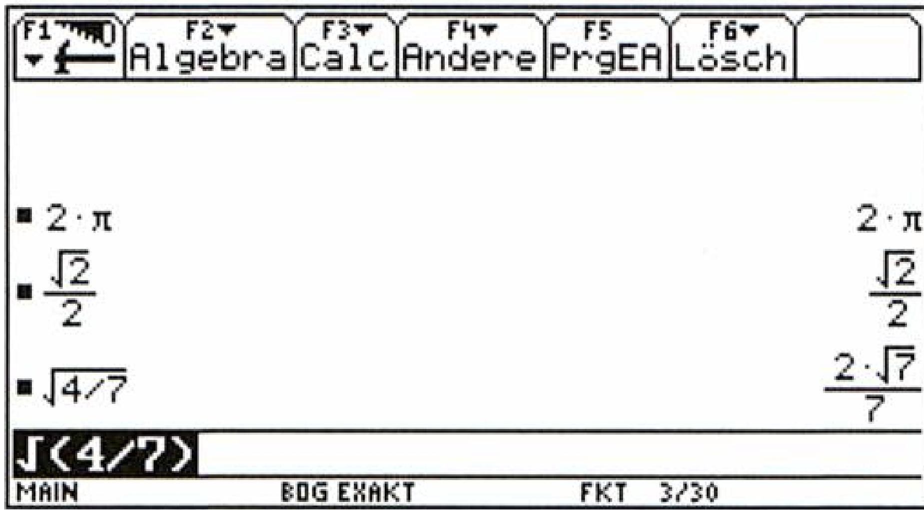
Der TR kann Ergebnisse als Bruch bzw. in symbolischer Form oder in Gleitkommadarstellung (dezimal) anzeigen. Sie wählen die gewünschte Einstellung mit der MODE-Taste – vgl. Außenspalte.

EXAKT – Jedes Ergebnis, das keine ganze Zahl ist, wird als Bruch oder in symbolischer Form dargestellt $(1/2, \pi, \sqrt{2}$ usw.).



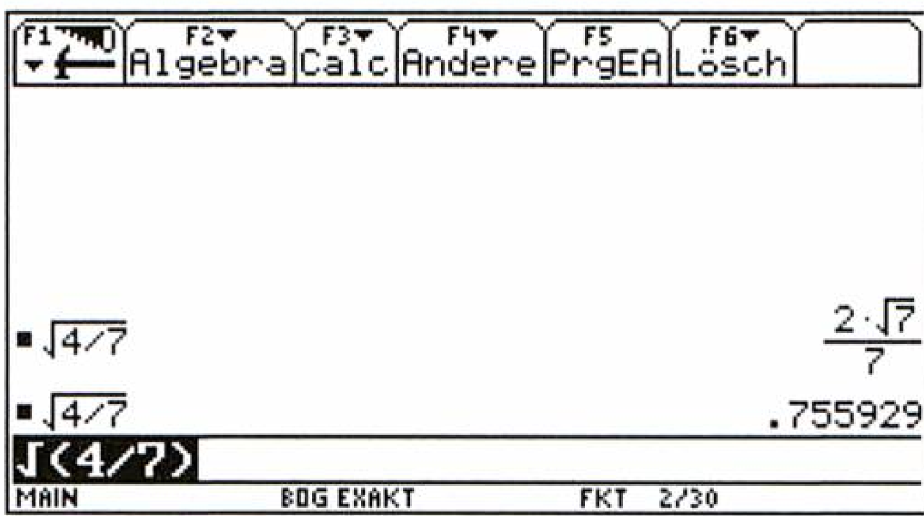
– Zeigt ganzzahlige Ergebnisse.

– Zeigt vereinfachte Ergebnisse in Bruchform.



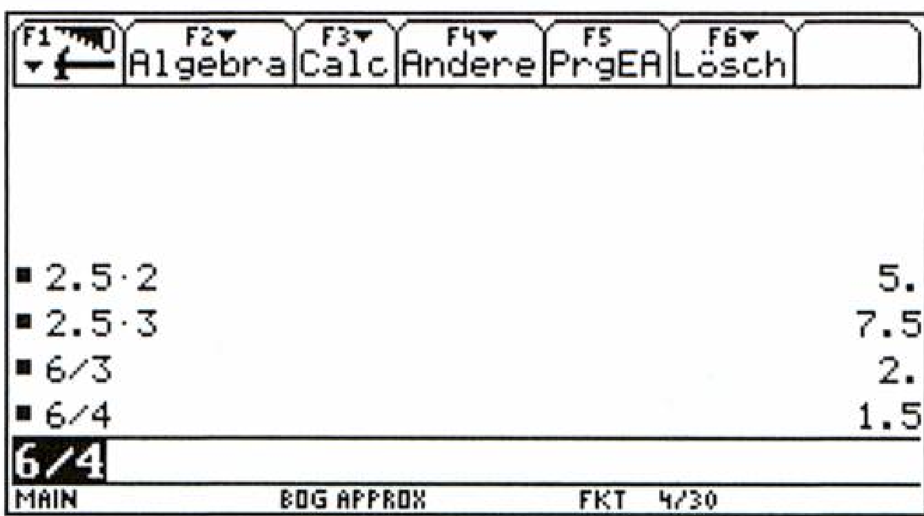
– Zeigt π Symbol.

– Zeigt die symbolische Form von Wurzeln, die nicht als ganze Zahl dargestellt werden können.

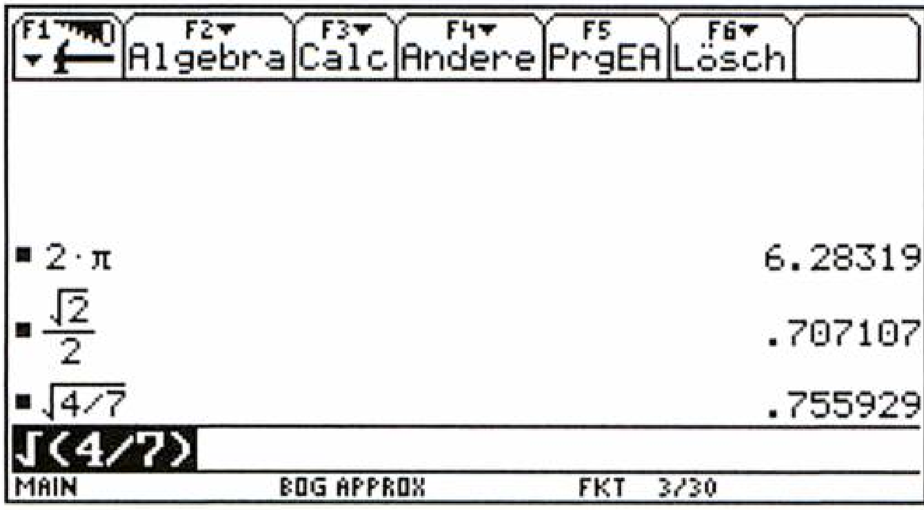


Drücken Sie ◆ ENTER, um die EXAKT–Einstellung zeitweise zu überschreiben und ein Gleitkommaergebnis anzuzeigen.

APPROXIMIERT – Alle numerischen Ergebnisse werden wenn möglich als Gleitkommadarstellung (dezimal) angezeigt.



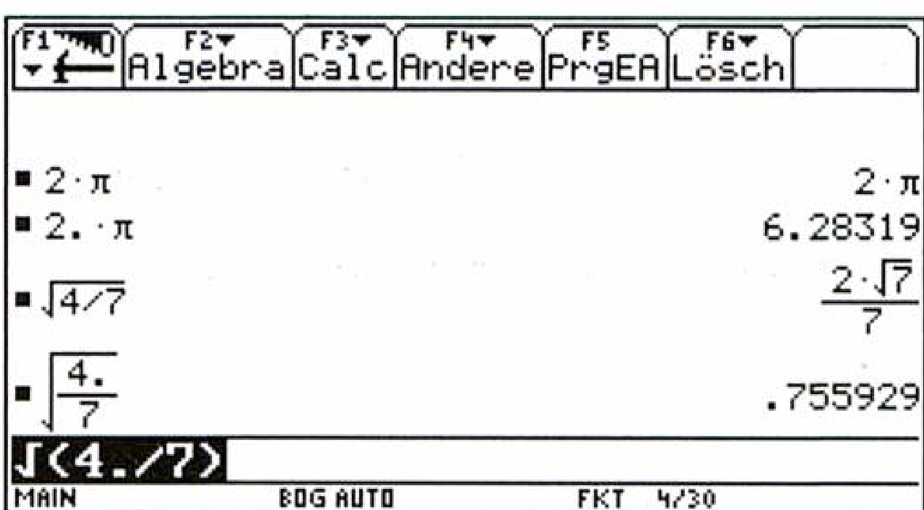
– Brüche werden numerisch ausgewertet.



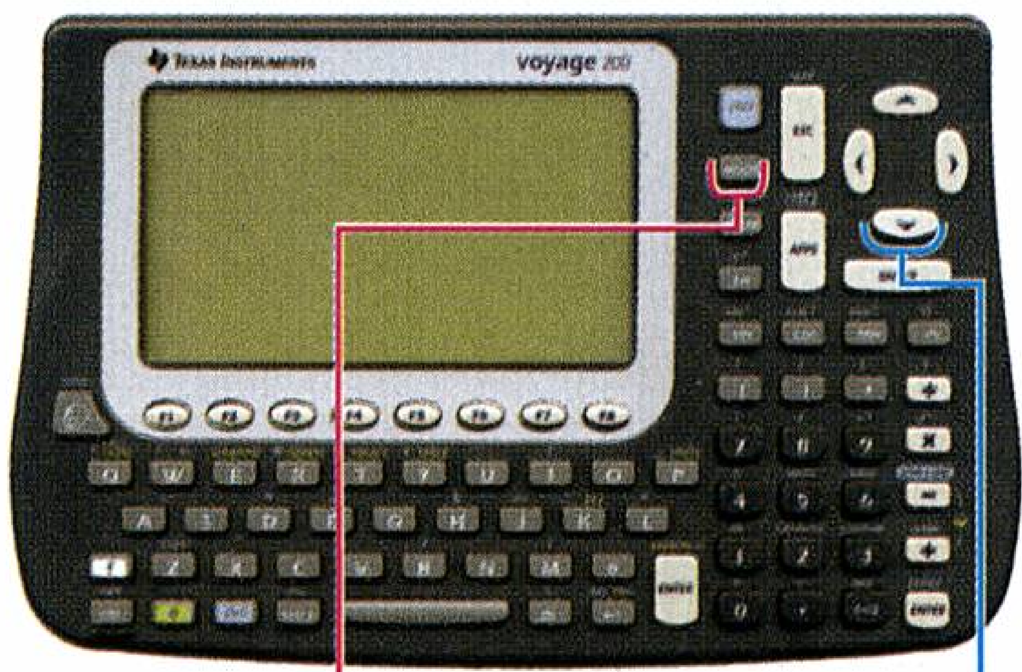
– Symbolische Terme werden wenn möglich numerisch ausgewertet.

Da nicht definierte Variablen nicht ausgewertet werden können, werden sie algebraisch verarbeitet. Ist beispielsweise die Variable r nicht definiert, gilt $\pi r^2 = 3{,}14159 \cdot r^2$.

AUTO – Verwendet wenn möglich die EXAKT-Form, verwendet die APPROXIMIERT-Form aber dann, wenn ihr Eintrag einen Dezimalpunkt enthält.



– Ein Dezimalbruch in der Eingabe erzwingt ein Gleitkommaergebnis.



Wenn Sie MODE drücken, sehen Sie folgenden Bildschirm:



Mittels der Cursortaste ▼ gelangen Sie zu

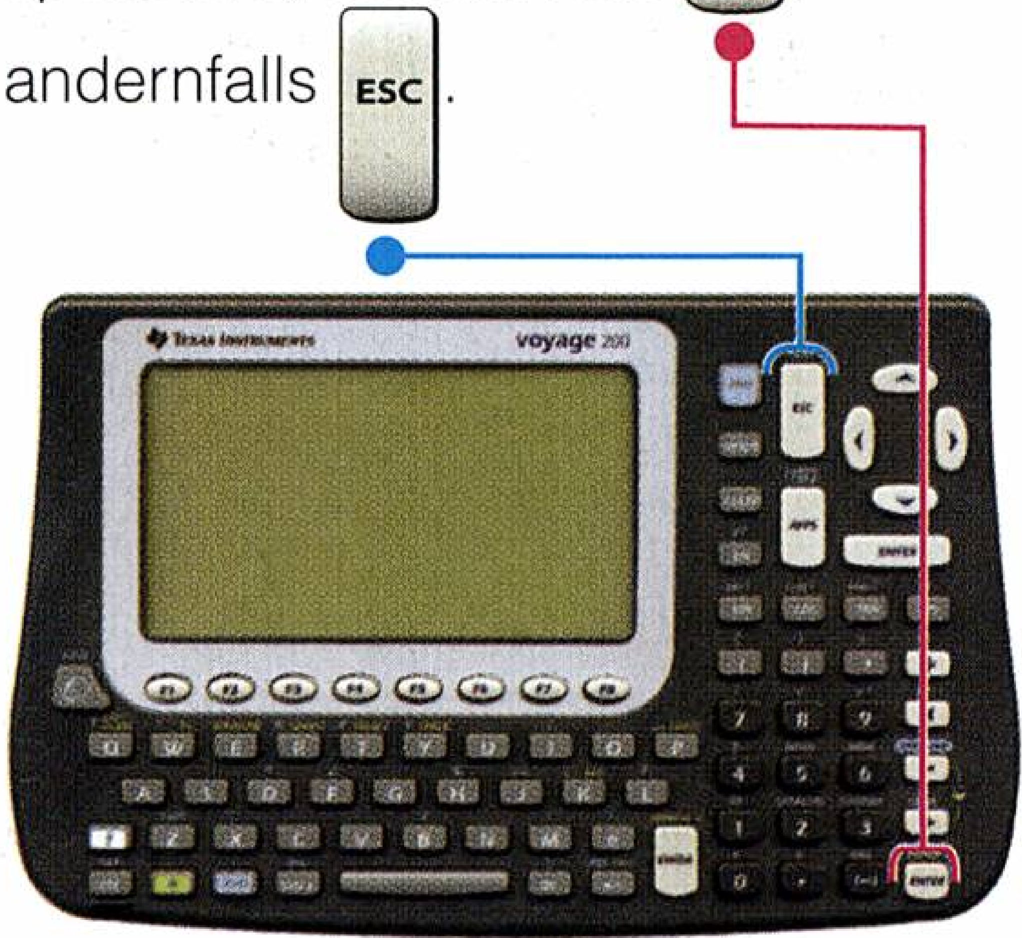


Und wenn Sie jetzt ▶ drücken, können Sie von folgendem Menü wählen:



Da AUTO eine Kombination aus den zwei anderen Einstellungen ist, sollten Sie mit allen drei Einstellungen vertraut sein – vgl. die Erklärungen in der Hauptspalte.

Um die gewählte Einstellung zu speichern, drücken Sie ENTER, andernfalls ESC.



In folgender Tabelle werden die drei Einstellungen verglichen.

Eintrag	EXAKT Ergebnis	APPROXIMIERT Ergebnis	AUTO Ergebnis
8/4	2	2.	2
8/6	4/3	1.33333	4/3
8.5·3	51/2	25.5	25.5
√(2) / 2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	.707107	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
π·2	2·π	6.28319	2·π
π·2.	2·π	6.28319	6.28319

Ein Dezimalbruch im Eintrag erzwingt ein Gleitkommaergebnis in AUTO.

Gibt der Voyage 200 das Ergebnis immer auf eine bestimmte Anzahl von Stellen an? Oder lässt sich die Genauigkeit der Ausgabe im Vorhinein bestimmen? Die Antwort ist einfach: Wenn Sie MODE ⌄ ⌄ 〉 drücken, können Sie im folgenden Menü die Anzahl der angezeigten Ziffern festlegen:

FLIESS 6 bedeutet zum Beispiel, dass das Ergebnis auf maximal 6 Stellen gerundet wird. Unabhängig von der gewählten Einstellung der angezeigten Ziffern berechnet der Voyage 200 alle Dezimalergebnisse mit bis zu 14 gültigen Stellen, wobei allerdings maximal 12 Stellen angezeigt werden.

Beispiel:

$2^{90} = ?$

Lösung:

2 ^ 9 0 ENTER

Wenn die vielen Anzeigen des Protokollbereichs (zur besseren Übersicht) gelöscht werden sollen, sind folgende Tasten zu drücken: F1 8

Beispiel:

Wie lauten die Einer-, Zehner- und Hunderterziffer des Ausdrucks 2^{150}?

Lösung:

2 ^ 1 5 0 ENTER

Drücken Sie ⌃ um zunächst das Ergebnis 142724... zu unterlegen.

Anschließend ist 〉 *niederzuhalten*, um „zum Ende des Ergebnisses" zu gelangen. Vom Bildschirm sind die Einer-, Zehner- und Hunderterziffer direkt ablesbar: 624 (vgl. Außenspalte)

Bildschirmanzeige, nachdem Sie (F2) drücken:



Bewegen Sie nun den Cursor mittels Cursortaste (▼) zu 2 und drücken Sie (ENTER) — oder drücken Sie einfach (2):



Sie erhalten die Anzeige **Faktor(** und müssen daher die Eingabe mit einer schließenden runden Klammer beenden.

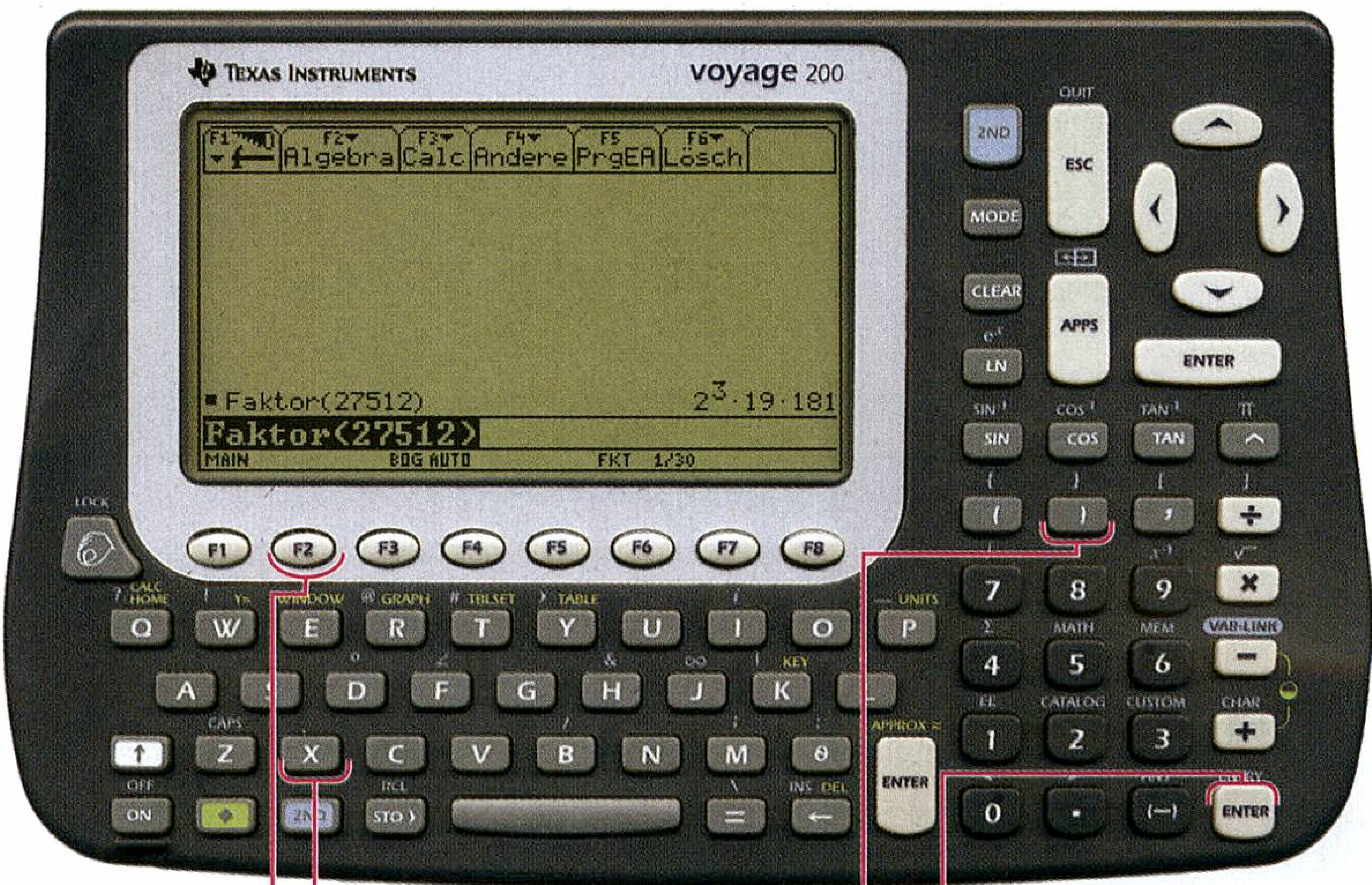
Der „Faktor"-Befehl dient zum Faktorisieren von Zahlen und Termen.

Beispiel:

Faktorisieren Sie: 27512

Lösung:

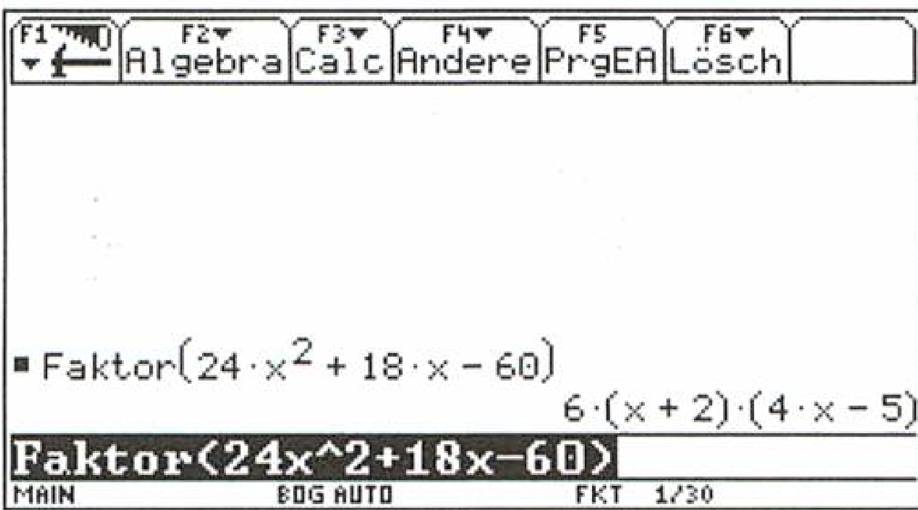
Wir verwenden den *grauen* Funktionstastenblock. (Die Funktionstasten greifen auf die in der Symbolleiste oben auf dem Bildschirm abgebildeten Menüs zu.)



Tastenfolge: (F2) (2) (2) (7) (5) (1) (2) ( )) (ENTER)

Faktor([= (F2) (2)]

Resultat: $2^3 \cdot 19 \cdot 181$



Beispiel:

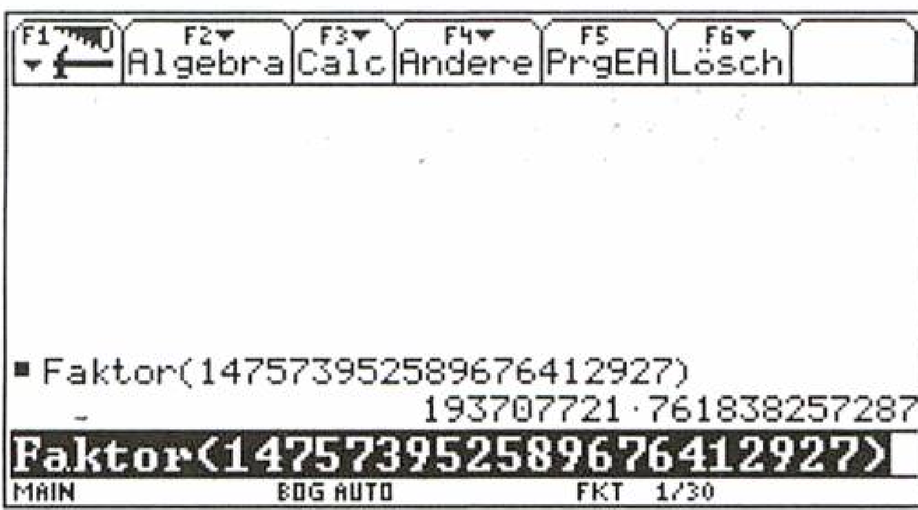
Faktorisieren Sie: $24x^2 + 18x - 60$

Lösung:

(F2) (2) (2) (4) (X) (^) (2) (+) (1) (8) (X) (−) (6) (0) ( )) (ENTER)

Faktor([= (F2) (2)]

Wir erhalten: Faktor $(24 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 60) = 6 \cdot (x + 2) \cdot (4 \cdot x - 5)$



Die obigen Faktorenzerlegungen hätten Sie nach Durcharbeiten der entsprechenden Kapitel des Lehrbuchs auch ohne TR vornehmen können.

Der TR ist allerdings auch in der Lage, Zahlen bzw. Terme zu faktorisieren, die ohne TR nicht mit vertretbaren Zeitaufwand in Faktoren zu zerlegen sind.

Berechnen Sie mit Ihrem TR:

Faktor(147573952589676412927)

Der TR wird Ihnen nach einiger Zeit 193707721 · 761838257287 anzeigen.

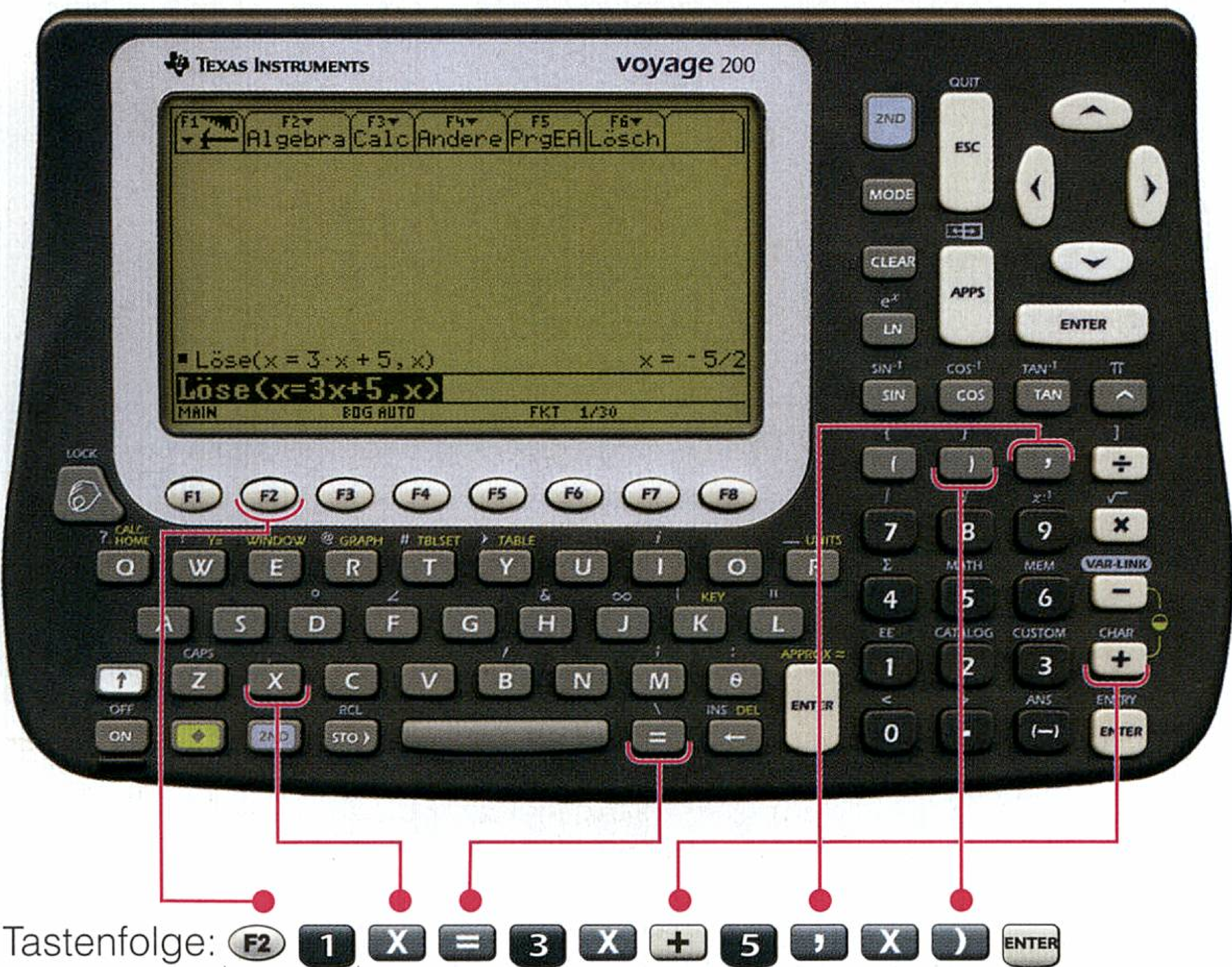
Das Vorgängermodell TI-92 hatte bei dieser Faktorenzerlegung Probleme.

Beispiel:

Lösen Sie die Gleichung $x = 3x + 5$.

Lösung:

Wir verwenden den mächtigen „Löse"-Befehl, um Gleichungen zu lösen.



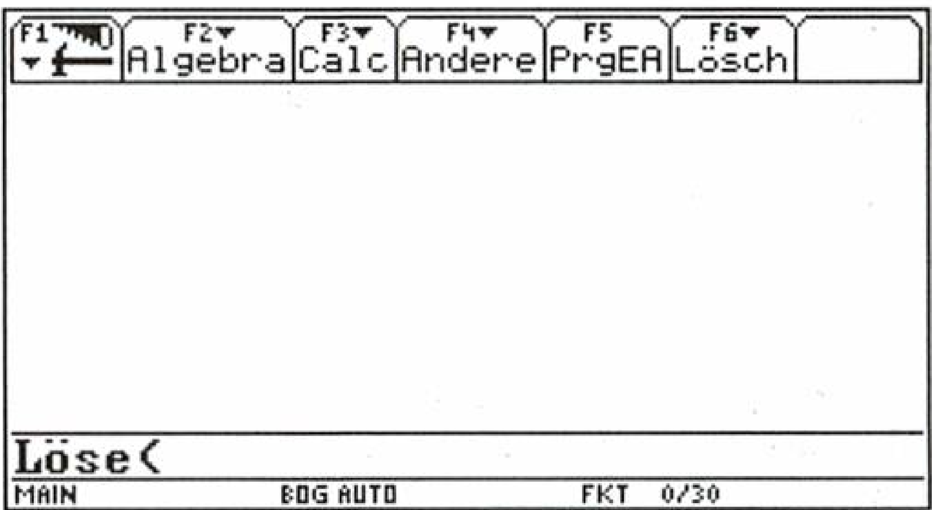
Tastenfolge: F2 1 X = 3 X + 5 , X) ENTER
Löse(

Wir erhalten: Löse (x= 3x+5, x) $= -\frac{5}{2}$ Resultat: $x = -\frac{5}{2}$

Bildschirmanzeige, nachdem Sie F2 drücken:



Da sich der Cursor bei 1 befindet drücken Sie ENTER — oder drücken Sie einfach 1:



Sie erhalten die Anzeige **Löse(** und müssen daher die Eingabe mit einer schließenden runden Klammer beenden.

Der „Löse"-Befehl dient zum Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen.

Beispiel:

Lösen Sie die Gleichung $xy = 1$ nach der Variablen x.

Lösung:

In Analogie zum letzten Beispiel haben wir folgende Tastenfolge:

F2 1 X Y = 1 , X) ENTER
Löse(

In der Eingabezeile findet sich folgender Text: Löse (xy=1, x)

Die Ausgabe ist in der Außenspalte.

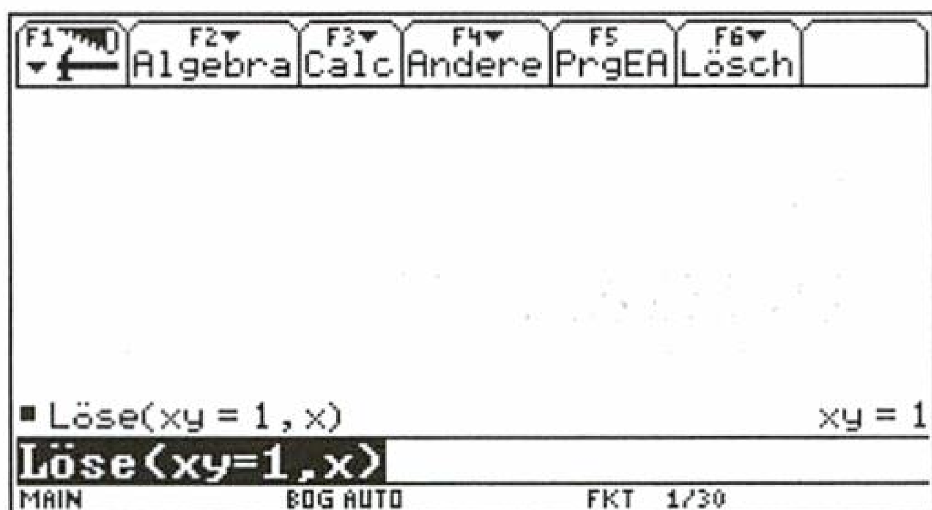
Der TR interpretiert xy als *eine* Variable.

Um dies zu korrigieren, ist ein Multiplikationspunkt zwischen x und y einzufügen:

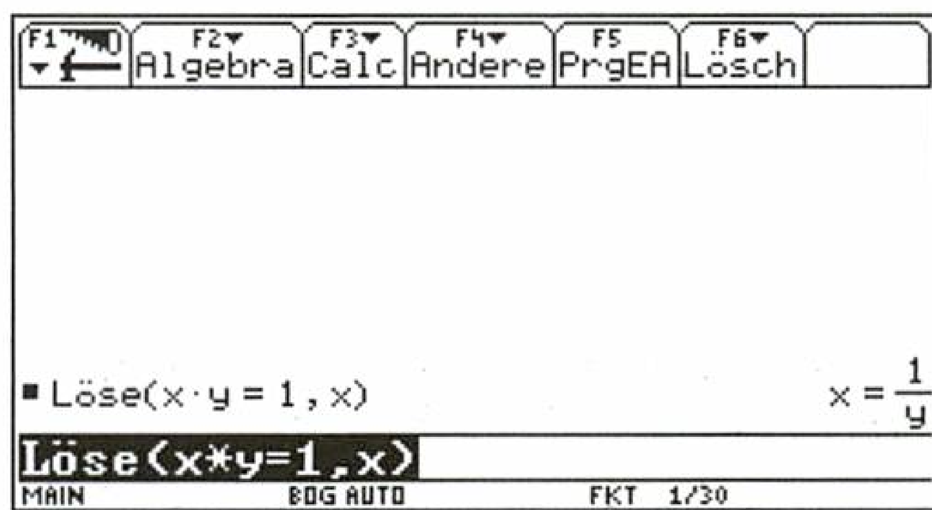
Löse$(x \cdot y = 1, x)$ Resultat: $x = \frac{1}{y}$

↑ Multiplikationszeichen!

Ursprüngliche Anzeige (ohne Multiplikationspunkt):



Korrekte Anzeige (nachdem ein Multiplikationspunkt eingefügt wurde):



Bemerkung: Der Voyage 200 verfügt über eine „englische Tastatur". Gegenüber der „deutschen Tastatur" sind die Tasten Y und Z vertauscht. Dieser Unterschied ist auch zu beachten, wenn das Gerät auf die Arbeitssprache Deutsch eingestellt ist.

Bildschirmanzeige, nachdem Sie [F2] drücken:



Bewegen Sie nun den Cursor mittels Cursortaste [▼] zu 3 und drücken Sie [ENTER] – oder drücken Sie einfach [3]:



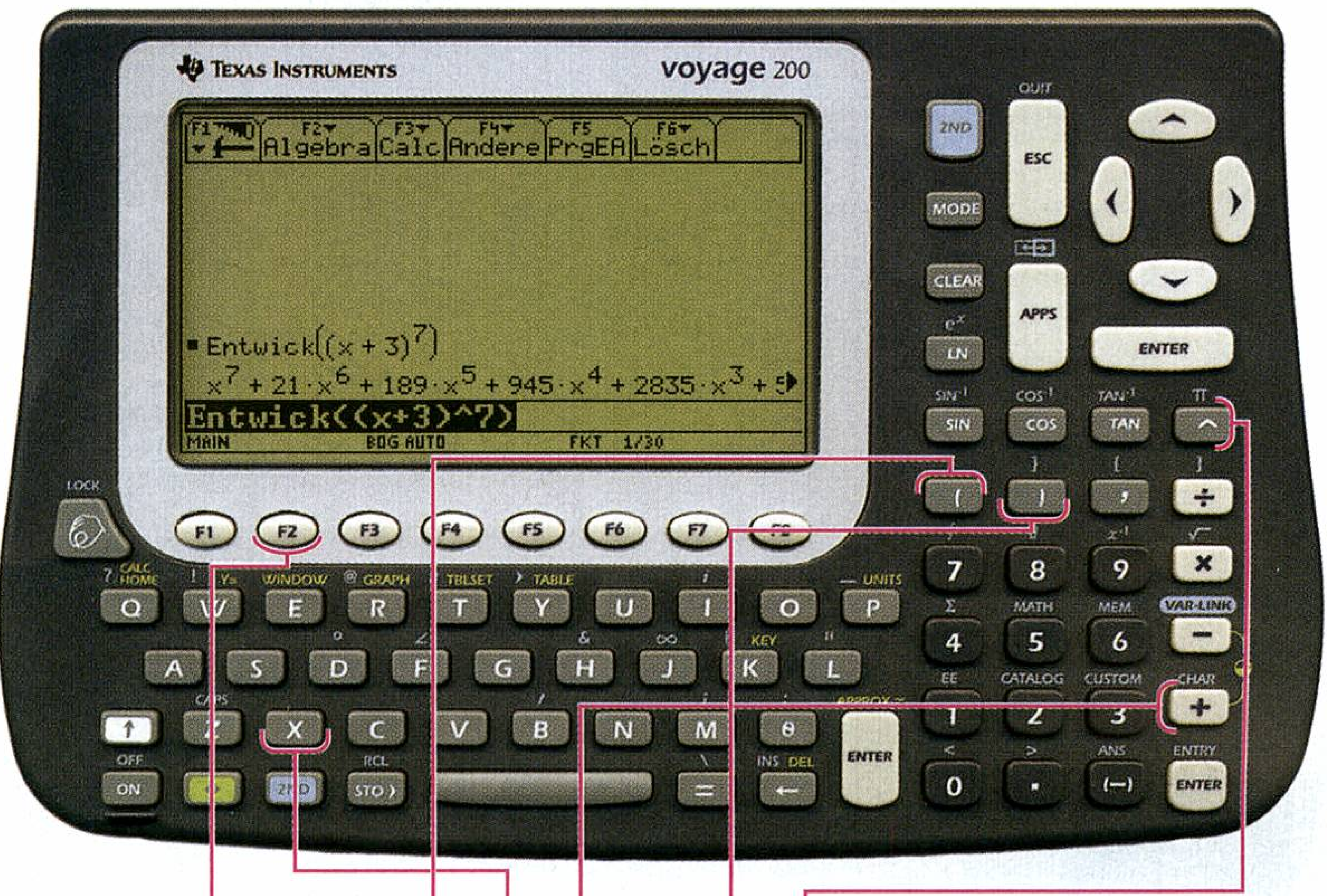
Sie erhalten die Anzeige **Entwick(** und müssen daher die Eingabe mit einer schließenden runden Klammer beenden.

Der „Entwick"-Befehl dient zum Ausmultiplizieren von Klammerausdrücken.

Beispiel:

Der Term $(x+3)^7$ ist auszumultiplizieren.

Lösung:



Tastenfolge: [F2] [3] [(] [X] [+] [3] [)] [^] [7] [)] [ENTER]

([F2] [3] = Entwick()

Resultat: $x^7+21x^6+189x^5+945x^4+2835x^3+5103x^2+5103x+2187$

Damit beenden wir unsere „erste Einführung". Wenn Sie alle vorhergehenden Erklärungen am TR nachvollzogen haben, werden Sie keine Schwierigkeiten haben die noch folgenden Kapitel zu verstehen.

In diesen Kapiteln werden Problemstellungen zu den Themen

- Rechnen mit Variablen und Termen
- Lineare Gleichungen in einer Variablen
- Funktionen
- Lineare Gleichungssysteme
- Vektorrechnung und
- Trigonometrie

diskutiert, die mit dem TR gelöst werden sollen.

$(x+3)^7=?$

Eingabe:

[F2] 3 <Entwick>(x+3)^7) [ENTER]

Hierbei wollen wir aber – bei der Lösung – nicht mehr die Tastenfolge vorgeben, sondern nur noch kurz und bündig die „Eingabe".[1] (Die Eingabe für das obige Beispiel findet sich in der Außenspalte!)

Da Sie zwischenzeitlich bereits wissen, wo welche Tasten auf Ihrem TR zu finden sind, werden Sie diese kompakte und Platz sparende Erklärung für die Eingabe leicht verstehen.

[1]) Ein Ausnahme bildet das Kapitel „Funktionen", in dem wir am Beginn die detaillierte Tasteneingabe – verbunden mit Fotos des TRs – anführen.

2. Rechnen mit Variablen und Termen

Beispiel:
Welchen speziellen Zahlenwert nimmt der Term $7x^2-3x+5$ für **a)** x= –1 und **b)** x=3 an?

Lösung:

a) Eingabe:

7x^2–3x+5|x = –1 ENTER

Um –1 einzugeben, ist die in der Außenspalte rot eingezeichnete (–)-Taste zu verwenden. Die –-Taste (grün eingezeichnet) dient als Rechenzeichen für die Subtraktion. Die (–)-Taste liefert einen Vorzeichenwechsel!

b) ▶ ← ← 3 ENTER

```
F1  F2▾     F3▾  F4▾    F5    F6▾
    Algebra Calc Andere PrgEA Lösch
■ 7·x² - 3·x + 5 | x = -1        15
■ 7·x² - 3·x + 5 | x = 3         59
7x^2-3x+5|x=3
MAIN       BOG AUTO      FKT 2/30
```

WERT EINES TERMS (= PROBE)

Den senkrechten Strich „|" findet man als Zweitfunktion (2ND) der Taste K. Er bedeutet „WOBEI". Dieser Strich wird für Ersetzung von Variablen durch Zahlen verwendet.

← ist die Löschtaste!

Beispiel:
Man vereinfache den Term $6x-\{[(3x+2y)+2x]-(8x+9y)\}$

Lösung:

Eingabe:

6x–(((3x+2y)+2x)–(8x+9y)) ENTER

```
F1  F2▾     F3▾  F4▾    F5    F6▾
    Algebra Calc Andere PrgEA Lösch
■ 6·x - (3·x + 2·y + 2·x - (8·x + 9·y))
                              9·x + 7·y
6x-(((3x+2y)+2x)-(8x+9y))
MAIN       BOG AUTO      FKT 1/30
```

TERMVEREINFACHUNG

VORSICHT:
Eingabe von eckigen [ ] und geschwungenen Klammern { } würde hier zu Fehlern führen!

Hier sieht man, dass der TR zwei Klammerpaare schon bei der Eingabe weg lässt, da sie unnötig sind. Weiters ist bemerkenswert, dass der TR ohne weitere Befehle den eingegebenen Term vereinfacht. Auch die Befehle **Faktor** und **Entwick** liefern kein anderes Ergebnis.

Beispiel:

Man kürze den Bruchterm $\frac{27a^3+9a^2+3a+1}{27a^3+18a^2+3a}$.

Lösung:

Zur Lösung der Aufgabe muss man den Zähler und Nenner mit dem Befehl **Faktor** faktorisieren und dann den Quotienten bilden:

Eingabe:

F2 2 <Faktor>

27a^3+9a^2+3a+1) ENTER

·3/3 ENTER

F2 2 <Faktor>

27a^3+18a^2+3a) ENTER

▲ ▲ ▲ ENTER

/(▲ ENTER) ENTER

```
F1  F2▾     F3▾  F4▾    F5    F6▾
    Algebra Calc Andere PrgEA Lösch
■ Faktor(27·a³ + 9·a² + 3·a + 1)
                    (a + 1/3)·(27·a² + 3)
■ (a + 1/3)·(27·a² + 3)·3
  -----------------------
             3
                     (3·a + 1)·(9·a² + 1)
■ Faktor(27·a³ + 18·a² + 3·a)
                          3·a·(3·a + 1)²
■ (3·a + 1)·(9·a² + 1)        9·a² + 1
  --------------------     -------------
     3·a·(3·a + 1)²        3·a·(3·a + 1)
...1)*(9*a^2+1)/(3*a*(3*a+1)^2)
MAIN       BOG AUTO      FKT 4/30
```

BRUCHTERME KÜRZEN

F2 öffnet das **Algebra-Menü**:

Gleichungen lösen	1: Löse(
Faktorisieren	2: Faktor(
Ausmultiplizieren	3: Entwick(
	....

Trick:

·3/3 bewirkt hier, dass das 1/3 aus der ersten Ergebnisklammer verschwindet.

Zur Eingabe früherer Terme verwendet man die Cursortaste ▲ und ENTER.

BRUCHTERME ADDIEREN

VORSICHT:
Bei der Eingabe von xy^2 reagiert der TR mit der Anzeige xy^2 und nicht mit $x\cdot y^2$!
Der TR kennt auch 2-buchstabige Variablennamen!
Daher immer den Multiplikationspunkt eingeben!

▶ ◀ ist eine Tastenfolge, die den eingegebenen Term nicht löscht. Dadurch kann man ihn dann bearbeiten. Jede andere Eingabe löscht den Term (so lange er auf schwarzem Grund ist)!

Beispiel:

Was ergibt die Addition von $\frac{x^2-y^2}{x^2y-xy^2}$ und $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+xy}$?

Lösung:

Zur Lösung geben wir die beiden Bruchterme getrennt ein und addieren sie mit Hilfe der Cursortasten:

Eingabe:

(x^2–y^2)/(x^2y–xy^2) ENTER

▶ ◀ ◀ ◀ ◀ × [1] ENTER

(x^2+2x·y+y^2)/(x^2+x·y) ENTER

▲ ▲ ▲ ▲ ENTER

+▲ ENTER ENTER

F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Andere F5 PrgEA F6 Lösch

$\frac{x^2-y^2}{x^2\cdot y-xy^2}$ $\quad \frac{x^2-y^2}{x^2\cdot y-xy^2}$

$\frac{x^2-y^2}{x^2\cdot y-x\cdot y^2}$ $\quad \frac{x+y}{x\cdot y}$

$\frac{x^2+2\cdot x\cdot y+y^2}{x^2+x\cdot y}$ $\quad \frac{x+y}{x}$

$\frac{x+y}{x\cdot y}+\frac{x+y}{x}$ $\quad \frac{(x+y)\cdot(y+1)}{x\cdot y}$

(x+y)/(x*y)+(x+y)/x

MAIN DEG AUTO FKT 4/30

Bemerkung: Bei x^2y ist kein Multiplikationspunkt notwendig. Die Interpretation von x^2y als x^{2y} ist nicht möglich.

Für x^{2y} lautet die Tastenfolge X ^ (2 Y) ENTER.

FORMELUMFORMUNGEN

1. „Schnell-Lösung"

F2 1 <Löse> ist der mächtige Formelumformungsbefehl.

Verwendung:

Löse(Formel, Variable) ENTER

⇧ A liefert den Großbuchstaben A. (⇧ ist oberhalb der ON-Taste!)

VORSICHT:
Der TR kennt intern keinen Unterschied zwischen Groß- und Kleinbuchstaben!

Wozu gibt es Großbuchstaben, wenn der TR ohnehin nicht zwischen Groß- und Kleinbuchstaben unterscheidet?

Der TR besitzt einen Texteditor um z. B. eine Formelsammlung oder andere Texte zu speichern. Einzelheiten werden im Handbuch erklärt!

2. „Ausführliche Methode" mit Gleichungsumformungsschritten

Antw(1) in der Eingabezeile bedeutet, dass an dieser Stelle der Term der vorigen Antwort eingefügt wird.

Antw(1) erscheint immer, wenn ein Rechenzeichen eingegeben wird.

Beispiel:

Man forme die Formel $A=\frac{a+c}{2}\cdot h$ nach der Variablen c um!

1. Lösung: Im Schnellverfahren verwendet man Löse:

Eingabe:

Löse(⇧ A=(a+c)/2·h, c) ENTER

Im Ergebnis kommt A nicht vor. Und bei der Anzeige der Eingabe scheint A gleichfalls nicht auf ... Deshalb korrigieren wir wie folgt:

Löse(fl=(a+c)/2·h, c) ENTER

F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Andere F5 PrgEA F6 Lösch

Löse$\left(a=\frac{a+c}{2}\cdot h, c\right)$ $\quad c=a\cdot\left(\frac{2}{h}-1\right)$

Löse$\left(f1=\frac{a+c}{2}\cdot h, c\right)$ $\quad c=\frac{2\cdot f1}{h}-a$

Löse(f1=(a+c)/2*h,c)

MAIN DEG AUTO FKT 2/30

2. Lösung:

In der **ausführlichen Methode** gibt man zuerst die Formel ein und formt dann langsam um:

Eingabe:

fl=(a+c)/2·h ENTER

·2 ENTER

/h ENTER

–a ENTER

F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Andere F5 PrgEA F6 Lösch

$f1=\frac{\ }{2}\cdot h$ $\quad f1=\frac{\ }{2}$

$\left(f1=\frac{(a+c)\cdot h}{2}\right)\cdot 2$ $\quad 2\cdot f1=(a+c)\cdot h$

$\frac{2\cdot f1=(a+c)\cdot h}{h}$ $\quad \frac{2\cdot f1}{h}=a+c$

$\left(\frac{2\cdot f1}{h}=a+c\right)-a$ $\quad \frac{2\cdot f1}{h}-a=c$

Antw(1)-a

MAIN DEG AUTO FKT 4/30

[1] × ist die Multiplikationstaste im rechten Tastenblock.

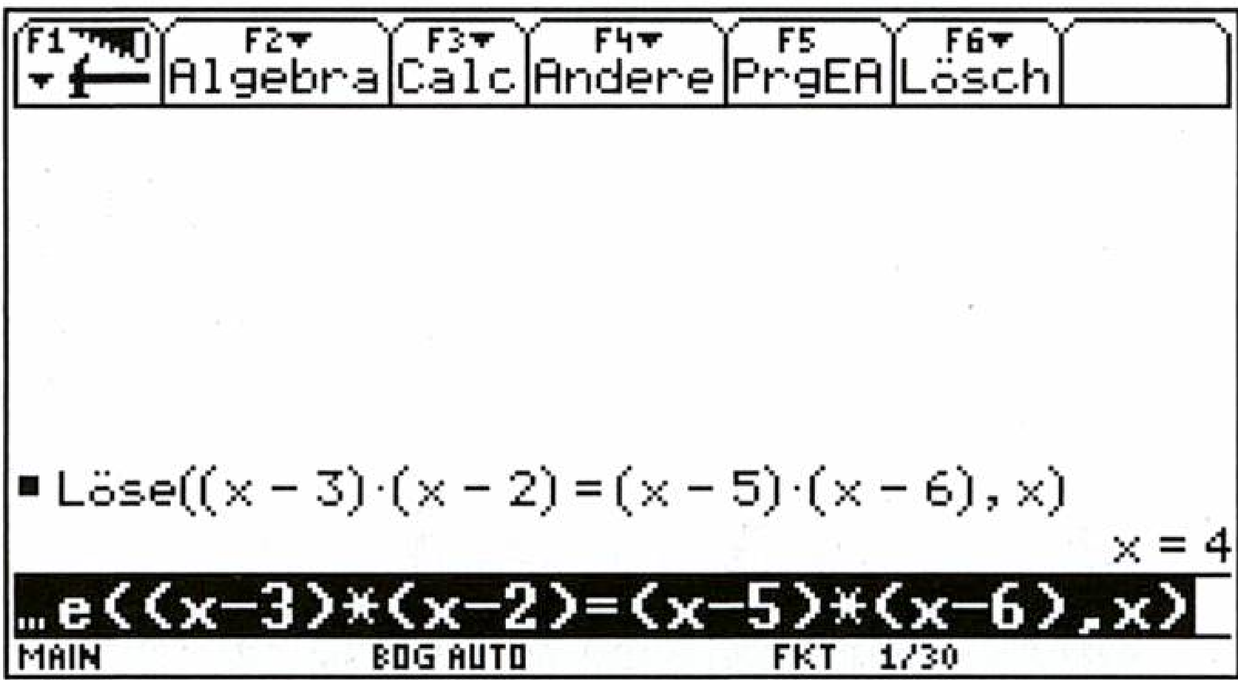
3. Lineare Gleichungen in einer Variablen

Beispiel:

Man löse die Gleichung: $(x-3)\cdot(x-2)=(x-5)\cdot(x-6)$

1. Lösung:

Die **schnelle Methode** zur Gleichungslösung ist die Verwendung des Befehls **Löse**, den man mit F2 1 im ALGEBRA-Menü erreicht (oder einfach auf der Tastatur eingibt):



Eingabe:

F2 1<Löse> (x–3)·(x–2)=(x–5)·(x–6),x) ENTER

1. „Schnell-Lösung"

F2 1 <Löse> ist der mächtige Gleichungslösungsbefehl.

Verwendung:

Löse(Gleichung, Variable) ENTER

z. B.: **Löse**(5x=12,x) ENTER

Bemerkung: Die Eingabe der gegebenen Gleichung funktioniert auch ohne Multiplikationszeichen zwischen den Klammerausdrücken. Allerdings sieht die Eingabezeile dann anders aus.

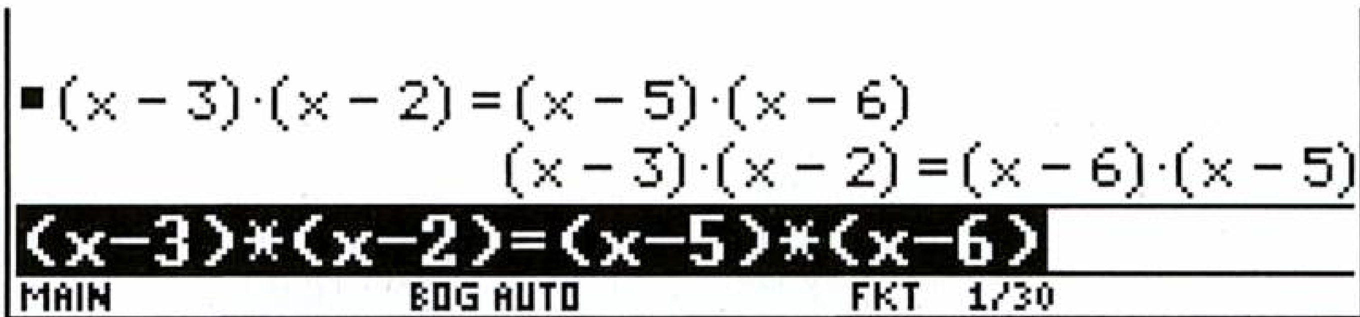
2. Lösung:

Die **ausführliche Methode** beginnt mit der Eingabe der Gleichung ohne **Löse**:

2. „Ausführliche Methode"

Eingabe:

(x–3)·(x–2)=(x–5)·(x–6) ENTER

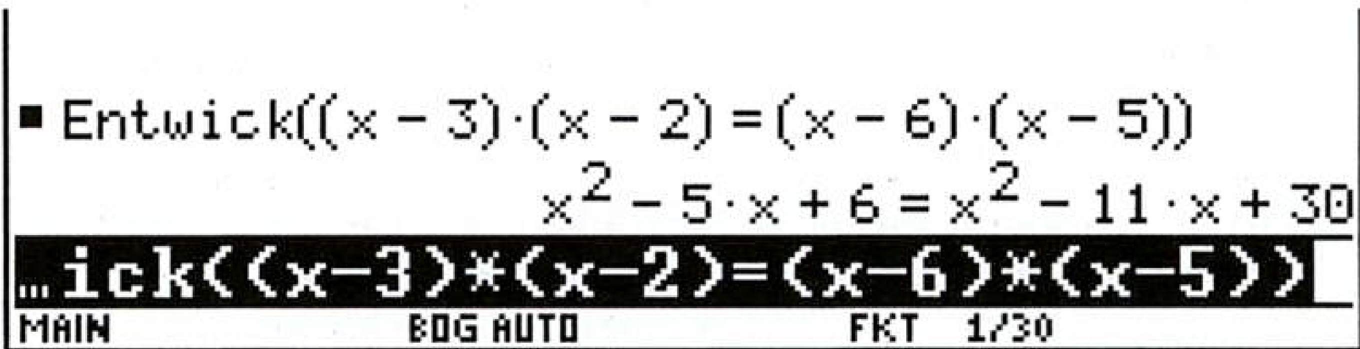


Das Ergebnis ist nicht ausmultipliziert. Das lässt sich mit **Entwick** ändern:

Eingabe:

2ND ◀ F2 3 <Entwick>

2ND ▶) ENTER



F2 3 <Entwick> liefert die ausmultiplizierte Form eines Terms oder einer Gleichung.

2ND ◀

Der Cursor springt an den Beginn der Eingabezeile.

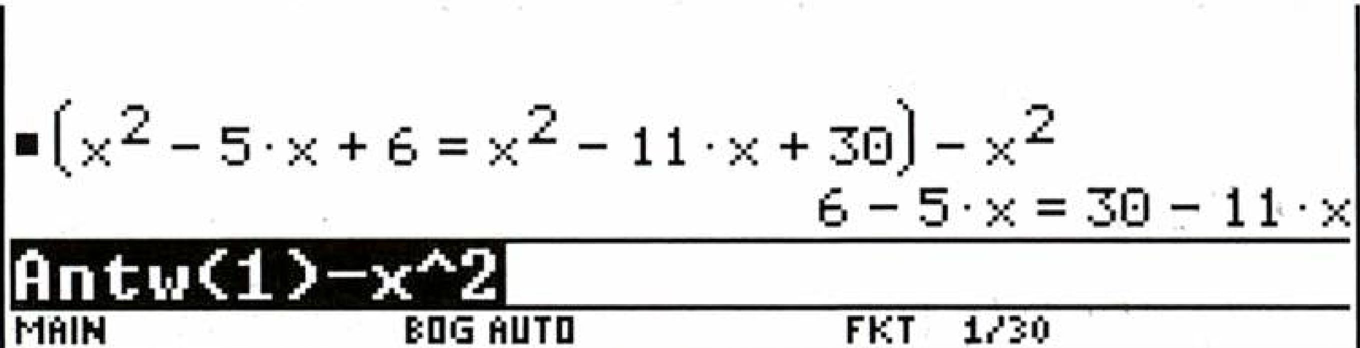
2ND ▶

Der Cursor springt zum Ende der Eingabezeile.

Jetzt sieht man, was man als nächstes machen muss, nämlich x^2 subtrahieren:

Eingabe:

–x^2 ENTER



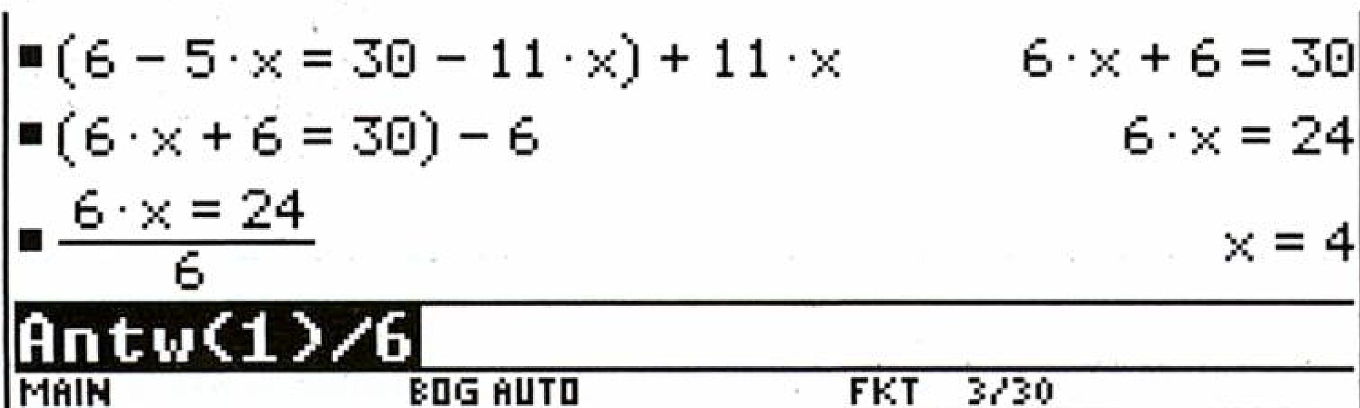
Jetzt kommen noch weitere Umformungen, um das Resultat zu erhalten:

Eingabe:

+11x ENTER

–6 ENTER

/6 ENTER



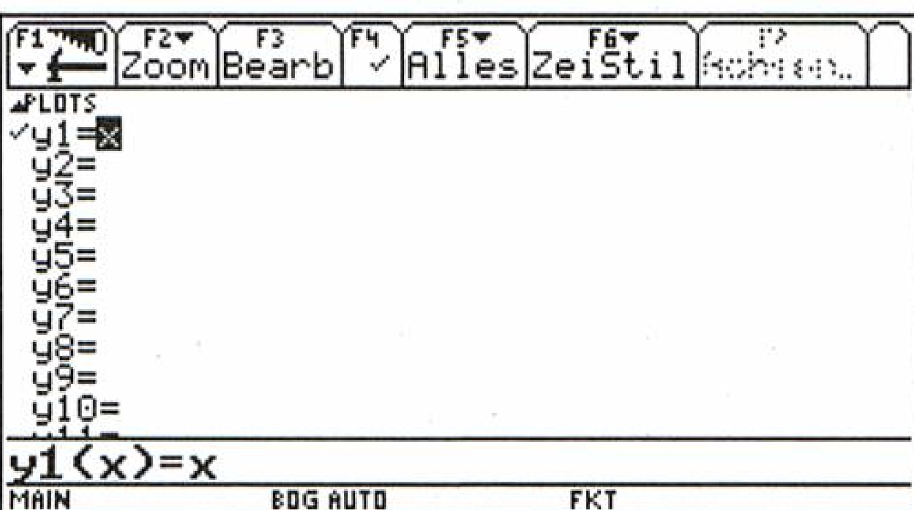
Antw(1) in der Eingabezeile bedeutet, dass an dieser Stelle der Term der vorigen Antwort eingefügt wird.

Antw(1) erscheint immer, wenn ein Rechenzeichen eingegeben wird.

Sobald Sie MODE ⟩ 1 drücken, erhalten Sie folgende Bildschirmanzeigen:



◆ Y= liefert folgende Anzeige:



„Schritt-für-Schritt Anleitung" um Funktionsgraphen zu zeichnen:

1. Drücken Sie MODE und wählen Sie „Function".
2. Definieren Sie die Funktion nachdem Sie ◆ Y= gedrückt haben.
3. Zeichnen Sie den definierten Graphen, indem Sie ◆ GRAPH drücken. (Wenn Sie F2 drücken, erhalten Sie das Zoom-Symbolleistenmenü. Dieses verfügt über mehrere Möglichkeiten zum Regulieren des Ansichtsfensters.)

   Zoom-Box dient zum Zeichnen eines Zoom-Rahmens und vergrößert in diesem Rahmen.

   Zoom-Quad passt die Window-Variablen an, sodass Funktionsgraphen in den richtigen Proportionen angezeigt werden.

   Zoom-Stnd stellt die Window-Variablen auf ihre Standardwerte ein:

xmin = –10	ymin= –10	xres=2
xmax=10	ymax=10	
xscl=1	yscl=1	

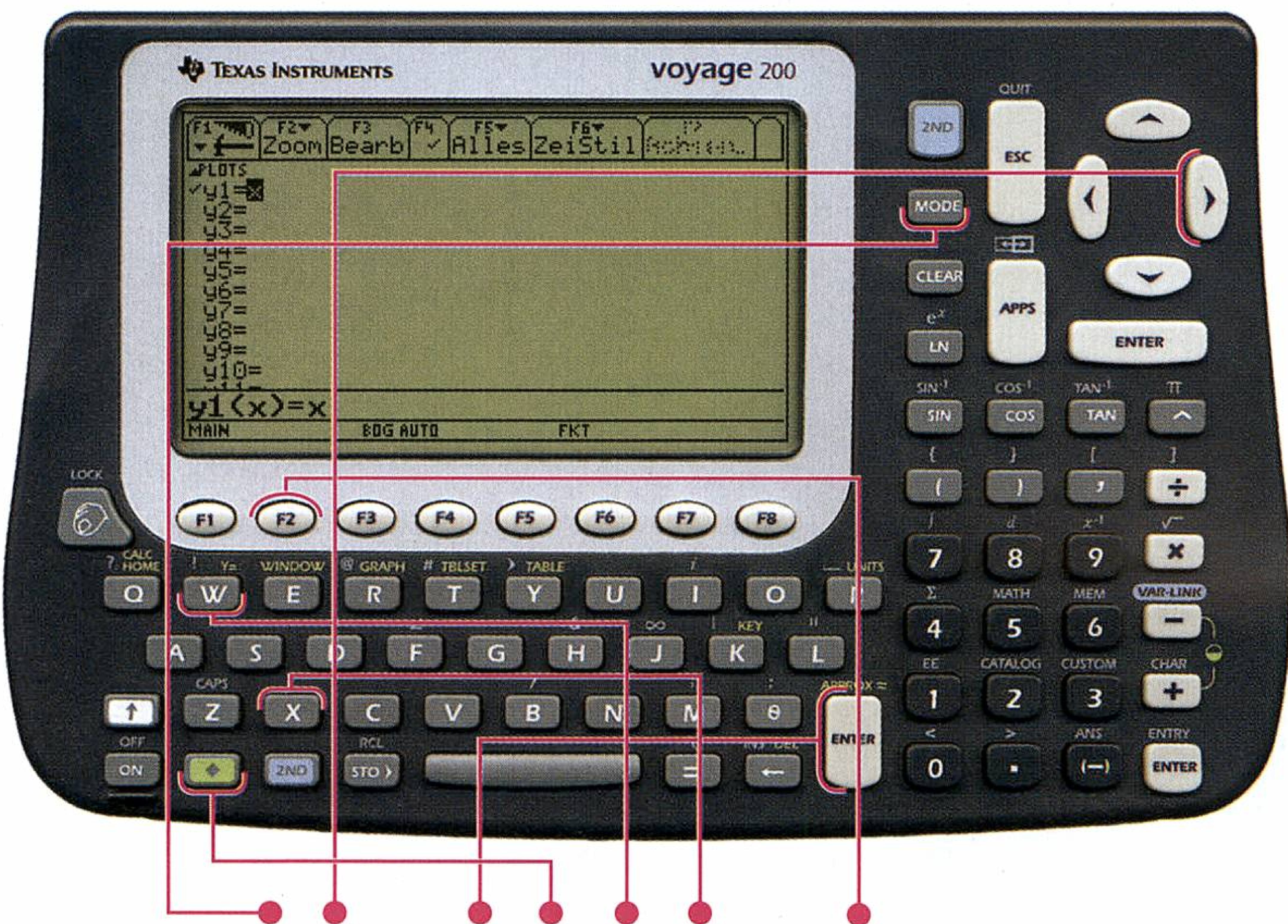
Bemerkung: Um die „Zoom-Routine" zu verlassen ist entweder ◆ Y= zu drücken, um in den „Funktionseingabe-Bildschirm" zu gelangen, oder Sie können ◆ CALC HOME drücken, um den gewohnten Hauptbildschirm zu erreichen!

4. Funktionen

Beispiel:

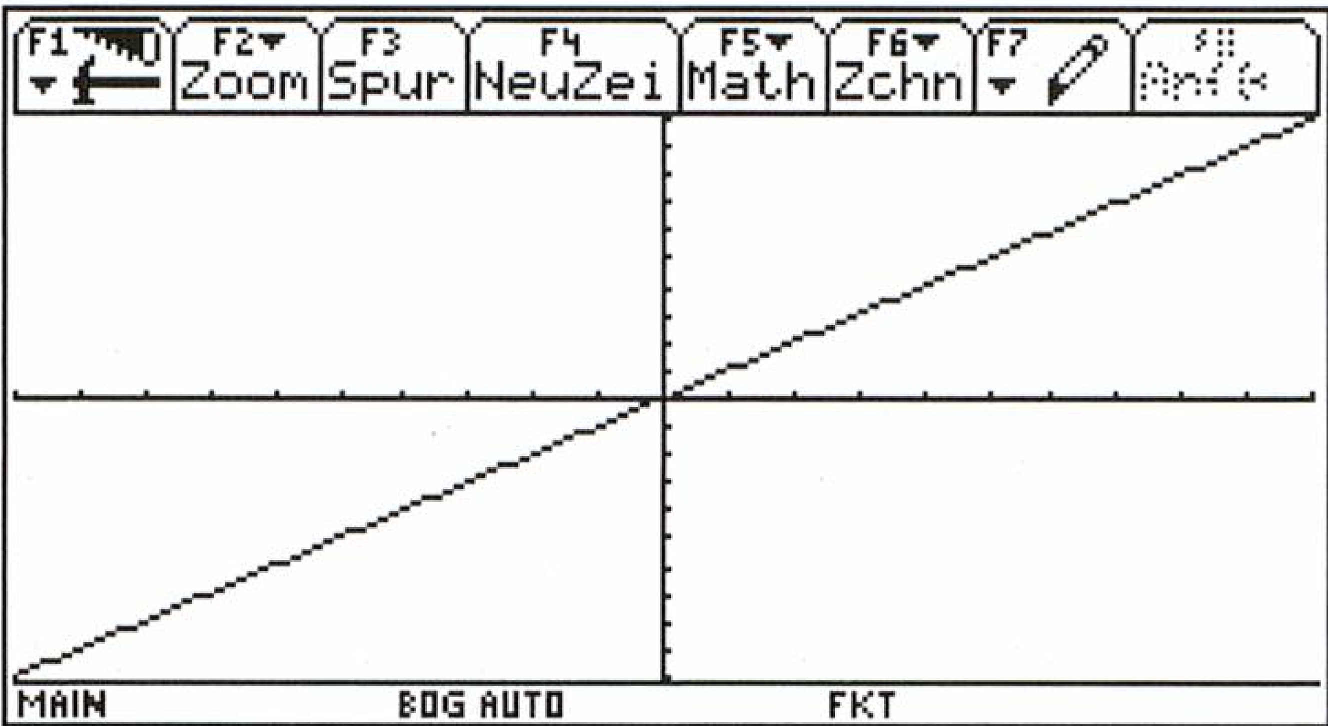
Zeichnen Sie mit dem TR eine Gerade mit der Gleichung $y = x$. Betrachten Sie diese Gerade im Standard-Ansichtfenster (ZoomStnd). Wechseln Sie anschließend zu ZoomQuad.

Lösung:

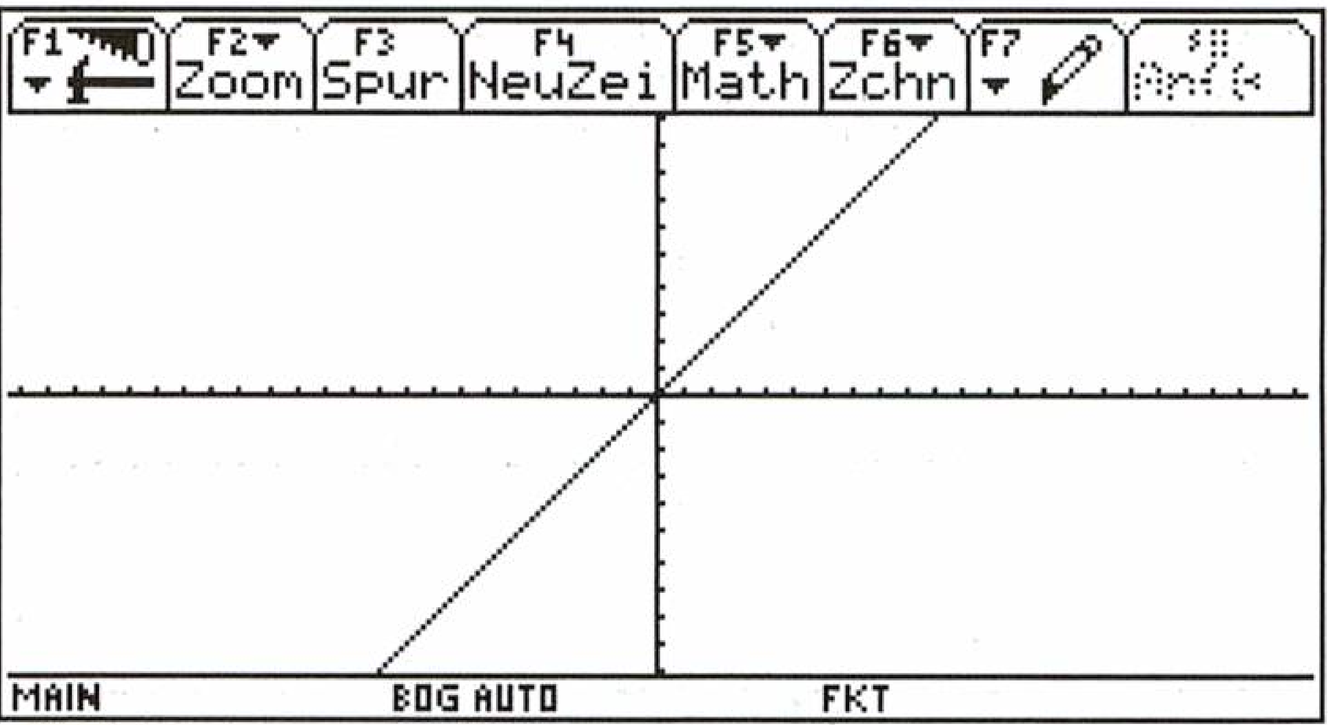


Tastenfolge: MODE ⟩ 1 ENTER ◆ Y= X ENTER F2 6

Wir erhalten folgende Darstellung:

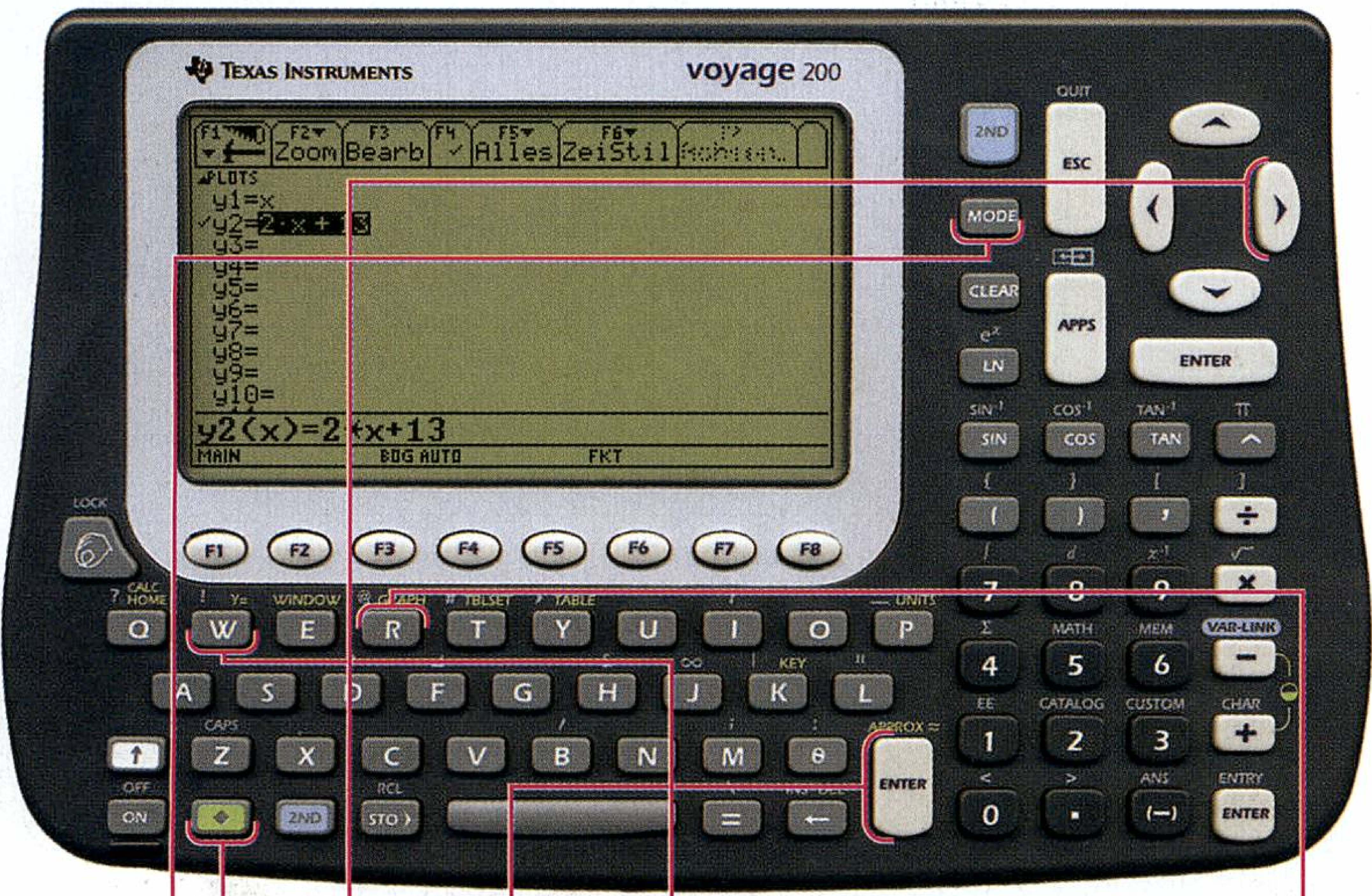


Wie Sie wissen, ist die Gerade $y = x$ eine Gerade im 45°-Winkel. Aus der grafischen Veranschaulichung ist leicht zu erkennen, dass die Gerade einen Anstieg von weniger als 45° hat! Das hat folgenden Grund: Die Einheiten auf der y-Achse und auf der x-Achse sind verschieden. Mittels der Tastenfolge F2 5 (ZoomQuad) kann man festlegen, dass die Einheiten auf beiden Achsen gleich groß sind. Das ergibt das Bild der Funktion in der gewohnten Form.



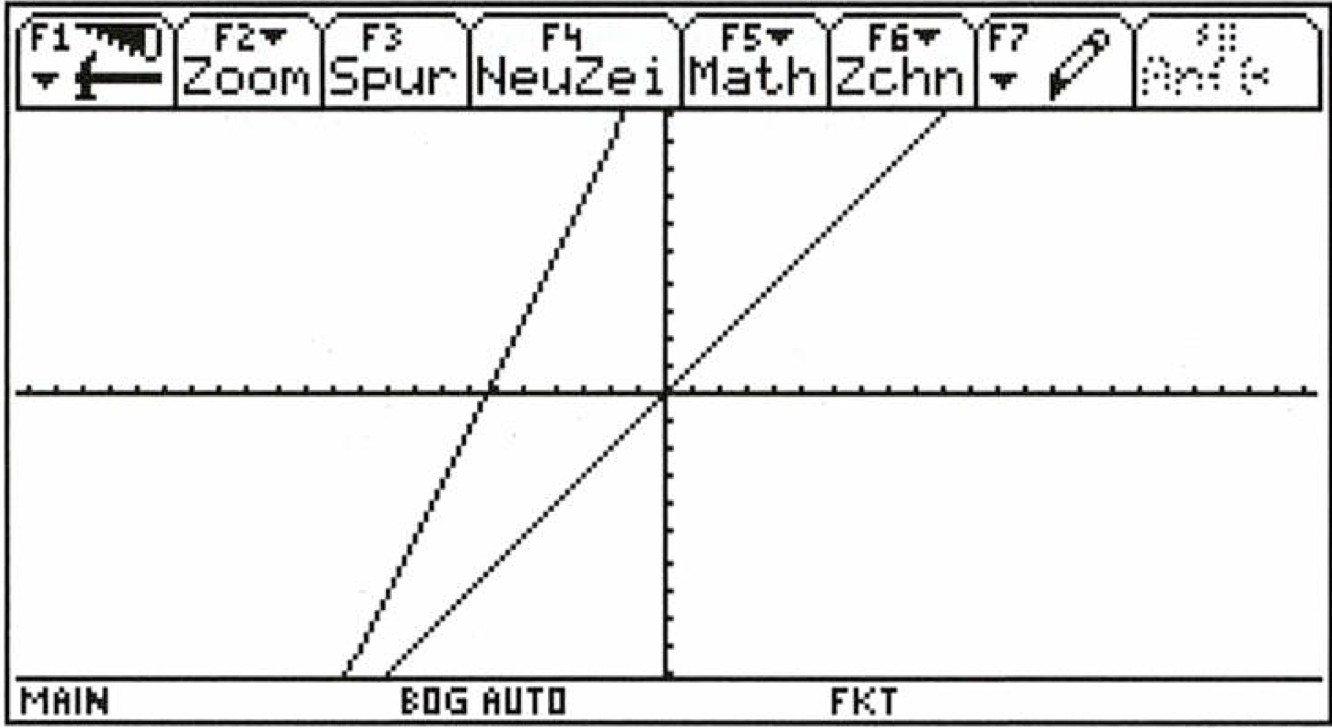
Beispiel:
Die Gerade mit der Gleichung $y = 2x + 13$ ist im Zoom vom vorigen Beispiel zu zeichnen. In welchem Punkt schneidet die Gerade die y-Achse?

Lösung:



Tastenfolge: [MODE] [▶] [1] [ENTER] [◆] [Y=] [2] [X] [+] [1] [3] [ENTER] [◆] [GRAPH]

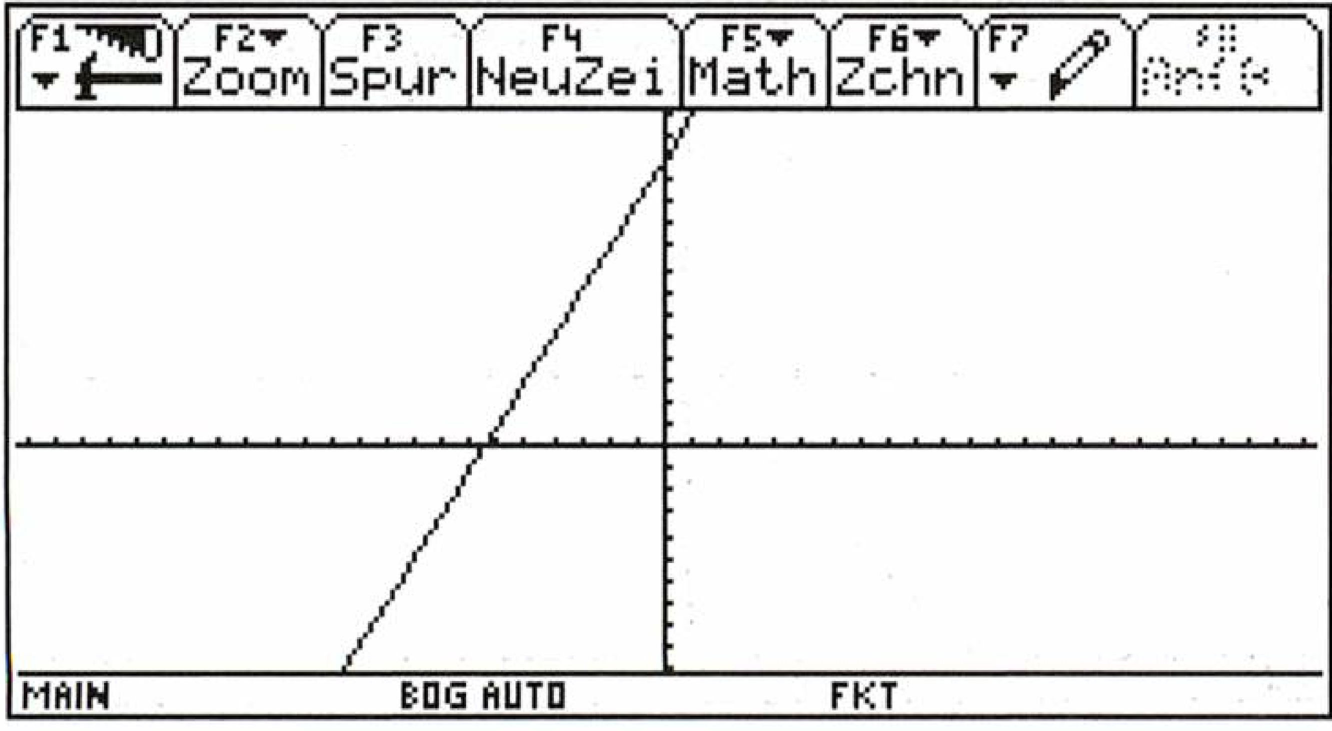
Sie erhalten wahrscheinlich folgende Bildschirmdarstellung:



Es wird einerseits die Funktion $y = x$ grafisch veranschaulicht, andererseits ist der Schnittpunkt von $y = 2x + 13$ mit der y-Achse nicht aus der Zeichnung zu erkennen. (Wir wissen natürlich, dass der Ordinatenabschnitt 13 ist. Wir wollen das aber auch in der Zeichnung verifizieren.)

Um **nur** die Funktion $y = 2x + 13$ darzustellen, sind die in der Außenspalte angeführten Tasten zu drücken. Um die Intervallgrenzen für die Funktion zu ändern (so dass der Schnittpunkt mit der y-Achse sichtbar wird), sind gleichfalls Erläuterungen in der Außenspalte angeführt.

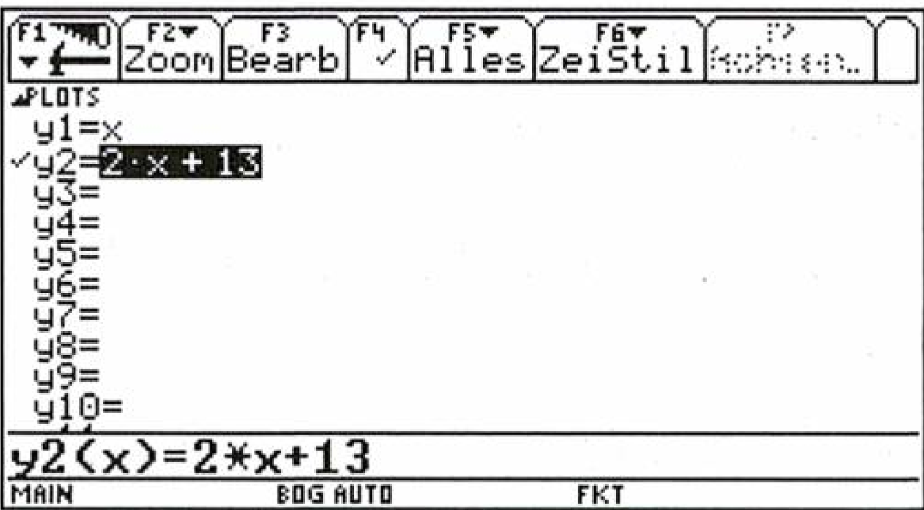
Wir erhalten letztendlich folgende Bildschirmdarstellung:



Im „[Y=]-Bildschirm" können Sie durch Drücken der Taste [F4] Funktionen bestimmen, die grafisch dargestellt werden sollen: Gehen Sie mit dem Cursor zur Zeile $y1 = x$ und drücken Sie [F4]. Mit [F4] können Sie eine Funktion mit einem „Haken" versehen — oder durch neuerliches Drücken diesen Haken entfernen.

Nur die mit Haken versehenen Funktionen werden letztendlich gezeichnet, wenn Sie [◆] [GRAPH] drücken!

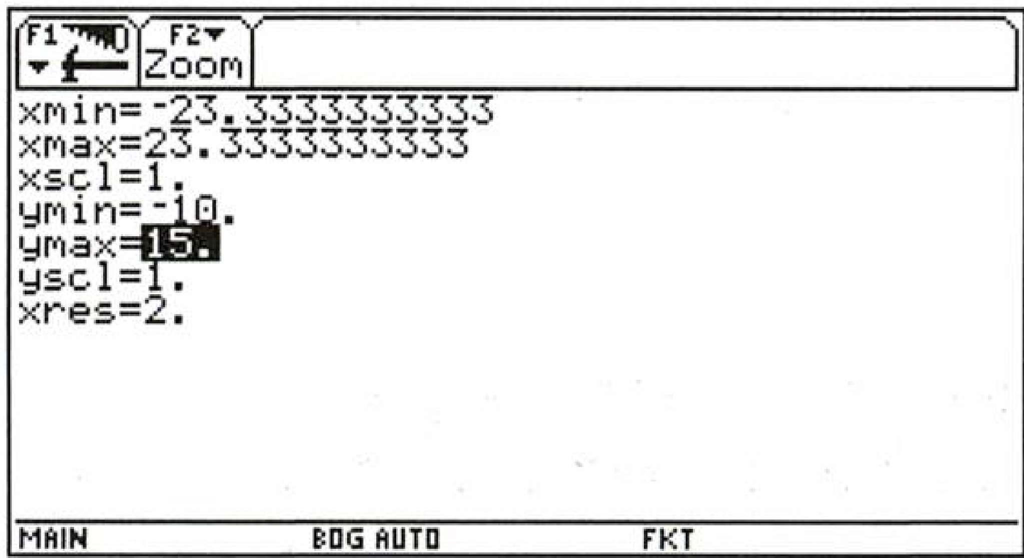
Versuchen Sie zu erreichen, dass einzig die Zeile $y2 = 2x + 13$ mit einem „Haken" versehen ist:



Wenn Sie nun [◆] [GRAPH] drücken, wird nur der Graph $y = 2x + 13$ dargestellt. Anders formuliert: Mit [F4] können Sie von einer unterlegten Funktion bestimmen, ob sie grafisch dargestellt wird. Alle mit einem Haken versehenen Funktionen werden im selben Koordinatensystem veranschaulicht.

Durch Drücken von [◆] [WINDOW] rufen Sie einen Bildschirm auf, in dem Sie unter anderem die Breite (x_{min} bis x_{max}) und die Höhe (y_{min} bis y_{max}) des „Grafik-Fensters" bestimmen können.

Ändern Sie $y_{max} = 15$, wobei nur das jeweils unterlegte Feld überschrieben werden kann und zum Verschieben der Unterlegung die Cursor-Steuerung zu verwenden ist!



Wenn sie nun [◆] [GRAPH] drücken, können Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse aus der Zeichnung ablesen. (Vgl. Hauptspalte)

Beispiel:

Die Funktion mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$ ist im Intervall [– 4, 6] grafisch darzustellen. Dazu erstelle man die Wertetabelle und suche nach Nullstellen und Extremwerten.

Lösung:

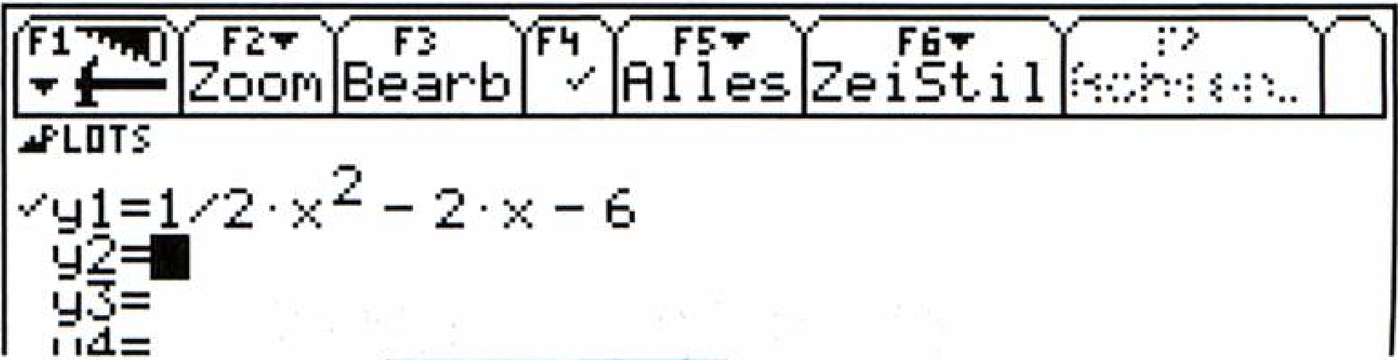
Die erste Aufgabe ist die grafische Darstellung. Dazu geben wir den Funktionsterm im Y=Bildschirm ein **(1)**. Dann müssen die Intervallgrenzen von x([– 4,6]) und y (z. B.: [–10,10]) eingegeben werden. Das geschieht im WINDOW-Bildschirm **(2)**. Danach kann man sich die Grafik im GRAPH-Bildschirm anschauen **(3)**. Dort kann man auch die Nullstellen und die Extremwerte bestimmen. Als nächstes wird die Wertetabelle mit TBLSET und TABLE erstellt **(4)**.

Eingabe:

(1) ◆ Y= F1 8 ENTER
1/2·x^2–2x–6 ENTER

◆ Y= öffnet den **Funktionseingabe-Bildschirm**:

F1 8 löscht darin alle bisherigen Funktionen.



(2) ◆ WINDOW
–4[1] ENTER 6 ENTER 1 ENTER
–10[1] ENTER 10 ENTER 1 ENTER
2 ENTER

◆ WINDOW öffnet den Wertebereich-Bildschirm.

xscl, yscl gibt die Einheitenabstände für die Markierungsstriche an.

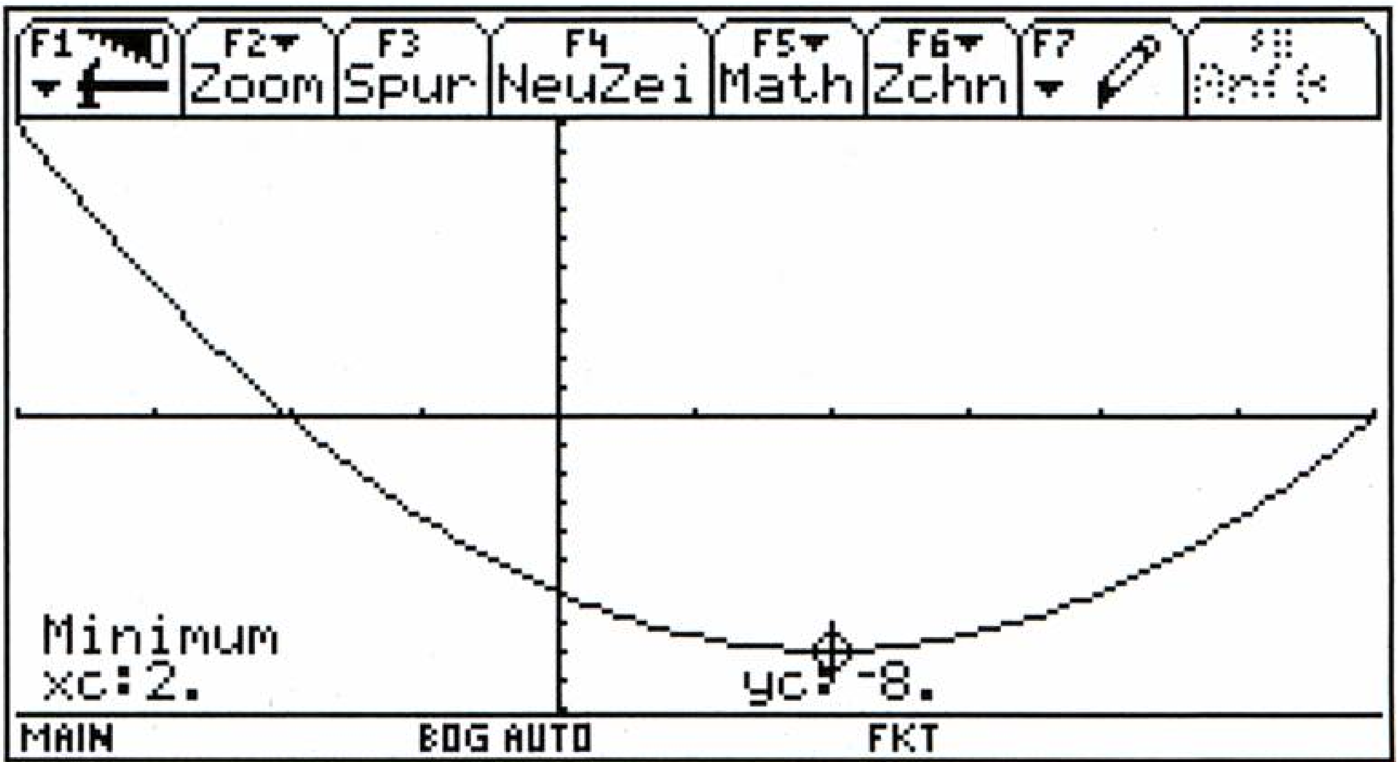
xres gibt an, mit wie viel Pixel Abstand die Funktion ausgewertet wird (gute Werte: 1 bis 5).



(3) ◆ GRAPH
F5 3<Minimum> ENTER
2ND (halten) ▶ ▶
▶ ▶ ▶ ENTER

◆ GRAPH schaltet zum Grafik-Bildschirm.

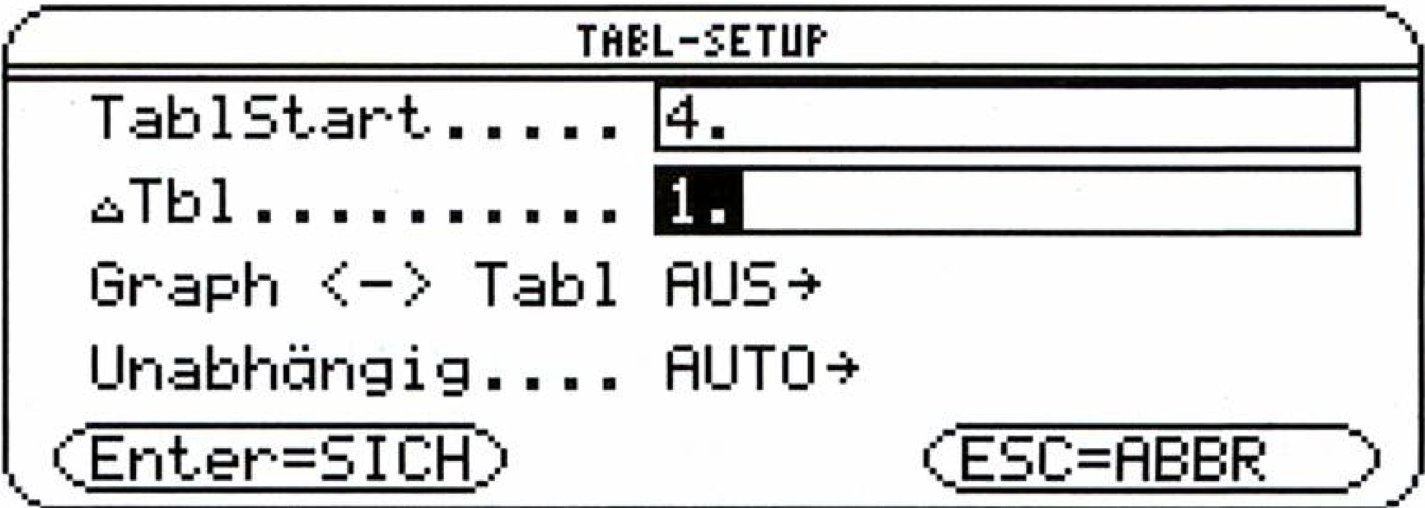
F5 3 liefert die Minimumfunktion, deren Startintervall mit den Cursortasten eingegeben wird.



Die **Nullstellen** liegen hier offensichtlich bei x = –2 und x = 6. Das Minimum wird angezeigt.

(4) ◆ TBLSET
– 4[1] ▼ 1 ENTER ENTER

◆ TBLSET öffnet einen Bildschirm zur Anfangs- und Schrittwerteingabe für die Wertetabelle.



◆ TABLE
2ND ▼
<die nächsten 10 Werte>

◆ TABLE öffnet die Wertetabelle.

2ND ▼ liefert die nächsten 10 Werte.

x	y1
4.	-6.
5.	-3.5
6.	0.
7.	4.5
8.	10.
9.	16.5
10.	24.
11.	32.5

x=6.

x	y1
-4.	10.
-3.	4.5
-2.	0.
-1.	-3.5
0.	-6.
1.	-7.5
2.	-8.
3.	-7.5

x=-4.

[1]) Hier ist die (–)-Taste für das negative Vorzeichen zu verwenden — und nicht die „Subtraktionstaste" –.

5. Lineare Gleichungssysteme

Beispiel:

Das Gleichungssystem $-x + y = 1$
$-x - y = 2$ ist in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu lösen.

Lösung:

Wir verwenden den Löse-Befehl gemäß den Ausführungen in der Außenspalte.

```
F1   F2▾     F3▾  F4▾    F5    F6▾
▾    Algebra Calc Andere PrgEA Lösch

■Löse(⁻x+y=1 and ⁻x-y=2,{x  y})
                  x=⁻3/2 and y=⁻1/2
Löse(⁻x+y=1 and ⁻x-y=2,{x,y})
MAIN         BOG AUTO       FKT 1/30
```

Eingabe: F2 1<Löse> −x + y = 1 and −x − y = 2,{x,y}) ENTER

Wir erhalten genau eine Lösung: $x = -\frac{3}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$

Der Löse-Befehl kann auch zur Lösung von Gleichungssystemen verwendet werden, wobei die einzelnen Gleichungen (auch bei Verwendung der Arbeitssprache Deutsch) durch das englische Wort „and" verbunden werden.

Die Gleichungsvariablen werden in geschwungenen Klammern angeführt:

Löse(..... and ..... ,{x,y}) ENTER

1. Gleichung 2. Gleichung

„{" findet man als Zweitfunktion(2ND) der Taste (, „}" als Zweitfunktion der Taste).

Wenn es genau eine Lösung gibt, werden die errechneten Werte – verbunden durch das englische Wort „and" – angezeigt.

Beispiel:

Das Gleichungssystem $-x + y = 1$
$-x + y = 2$ ist in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu lösen.

Lösung:

```
■Löse(⁻x+y=1 and ⁻x+y=2,{x  y})
                          falsch
Löse(⁻x+y=1 and ⁻x+y=2,{x,y})
MAIN         BOG AUTO       FKT 2/30
```

Eingabe: F2 1<Löse> −x + y = 1 and −x + y = 2,{x,y}) ENTER

An Stelle eines Resultats erhalten wir die Anzeige „**falsch**". Das bedeutet, dass das Gleichungssystem keine reelle Lösung hat.

Gibt es keine reelle Lösung, zeigt der TR das Wort „**falsch**" an.

Beispiel:

Das Gleichungssystem $-x + y = 1$
$-2x + 2y = 2$ ist in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu lösen.

Lösung:

```
■Löse(⁻x+y=1 and ⁻2·x+2·y=2,{x  y})
                   x=@1-1 and y=@1
Löse(⁻x+y=1 and ⁻2x+2y=2,{x,y…
MAIN         BOG AUTO       FKT 3/30
```

Eingabe: F2 1<Löse> −x + y = 1 and −2x + 2y = 2,{x,y}) ENTER

Wir erhalten die Lösung $x = @1 - 1$, $y = @1$.

Es gibt unendlich viele Lösungen, wobei zwischen x und y eine lineare Abhängigkeit besteht.

Gibt es unendlich viele Lösungen, wird einer Variablen ein Parameter (@1) zugewiesen und die andere Variable in Abhängigkeit von diesem Parameter ausgedrückt.

6. Vektorrechnung

Beispiel:

Gegeben sind 3 Punkte von einem Parallelogramm ABCD:

A(0, 1), B(3, 5), D(–2, 4). Gesucht ist:

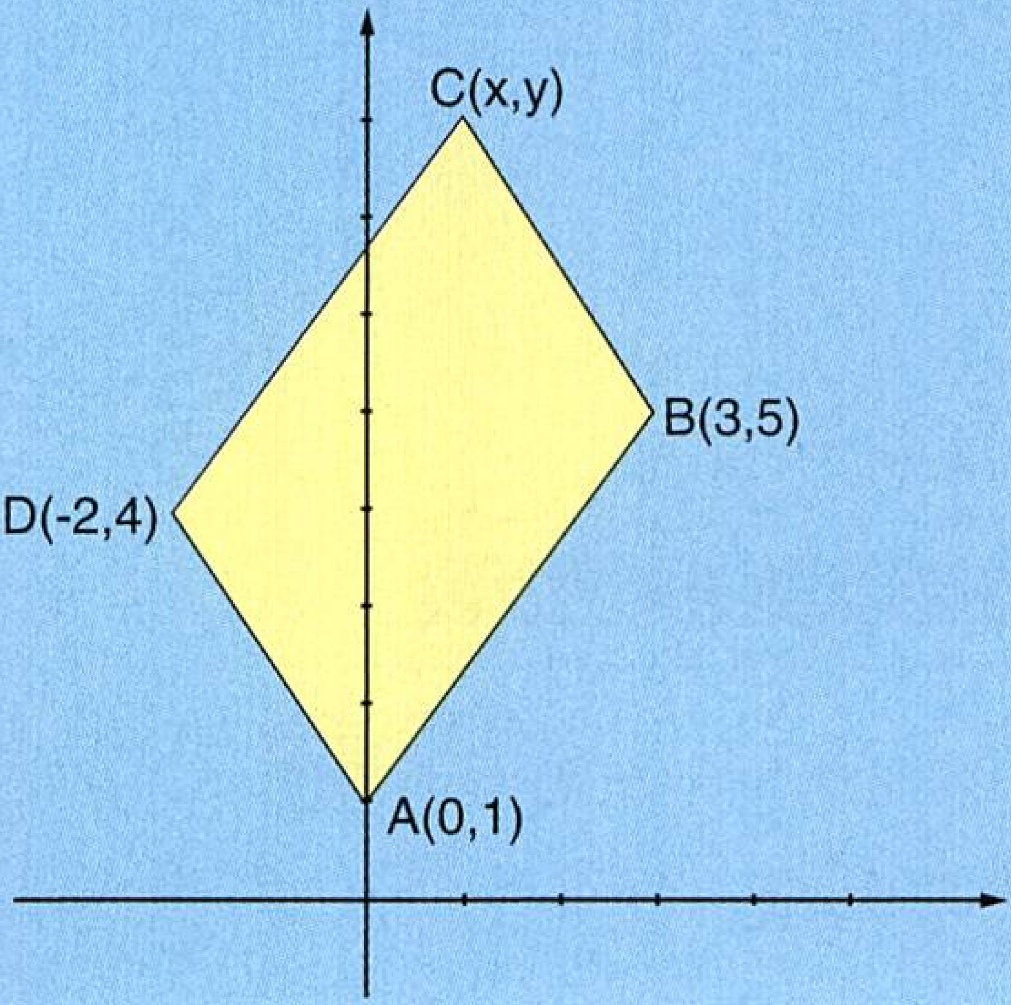
a) der vierte Punkt C (mit Hilfe des Vektors $\overrightarrow{AB}$)

b) die Länge der Seite $\overline{AB}$

c) ein Vektor in Richtung der Winkelsymmetralen von α und

d) der Mittelpunkt M des Parallelogramms.

Nach Abschluss der Berechnungen sind die Variablen zu löschen.

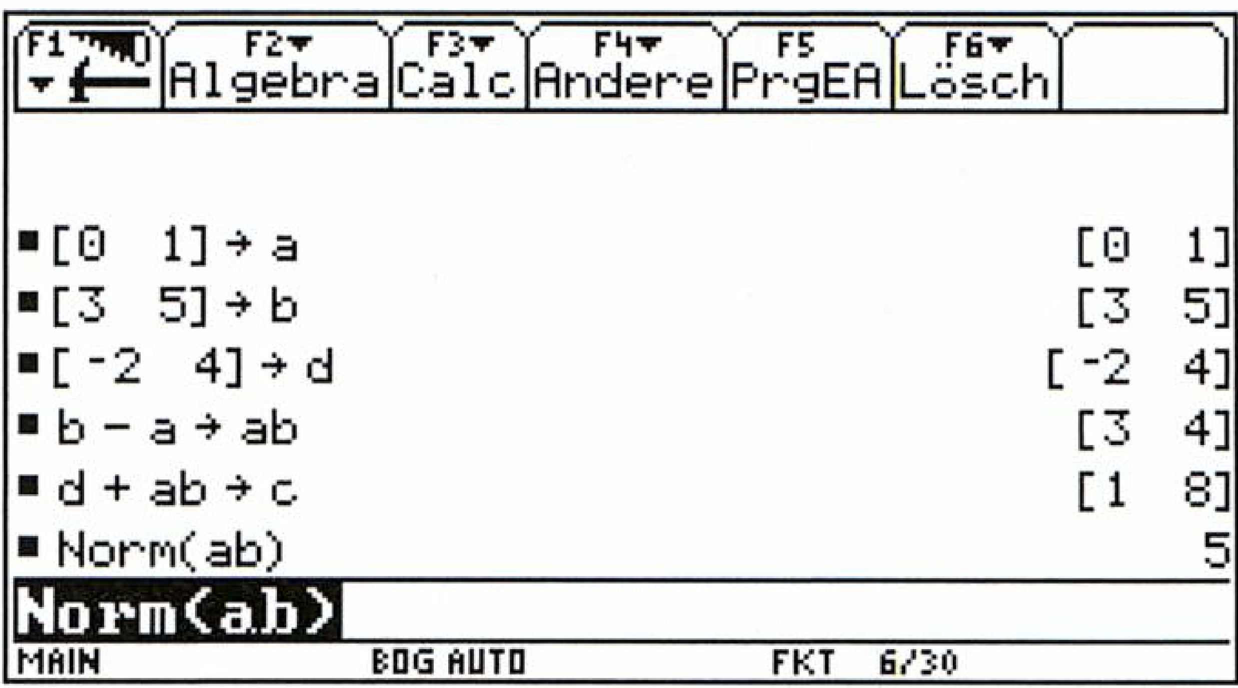


Lösung:

Eingabe: (am Hauptbildschirm)

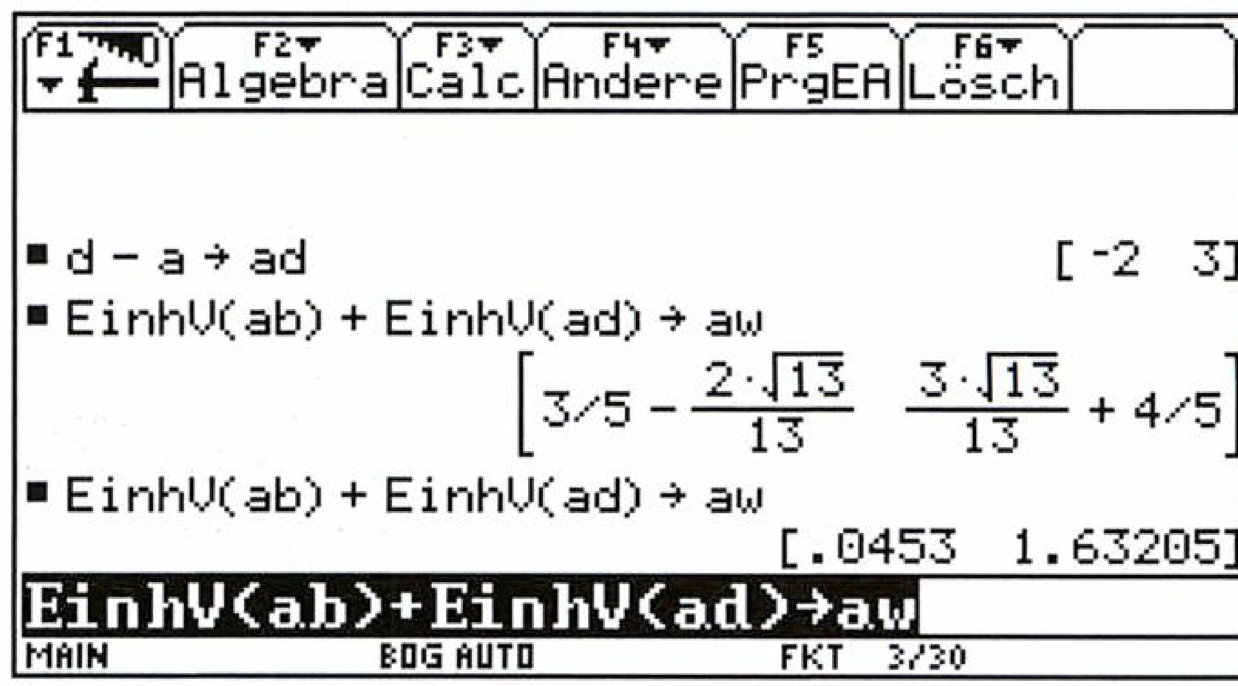
a) [0, 1] [STO▸] a [ENTER]
[3, 5] [STO▸] b [ENTER]
[–2, 4] [STO▸] d [ENTER]
b – a [STO▸] ab [ENTER]
d + ab [STO▸] c [ENTER]

b) Norm(ab) [ENTER]



Eingabe:

c) d – a [STO▸] ad [ENTER]
EinhV(ab) + EinhV(ad)
[STO▸] aw [ENTER]
[◆] [ENTER]



Eingabe:

d) (a +c)/2 [STO▸] m [ENTER]
EntfVar a,b,c,d,ab,ad,aw,m [ENTER]

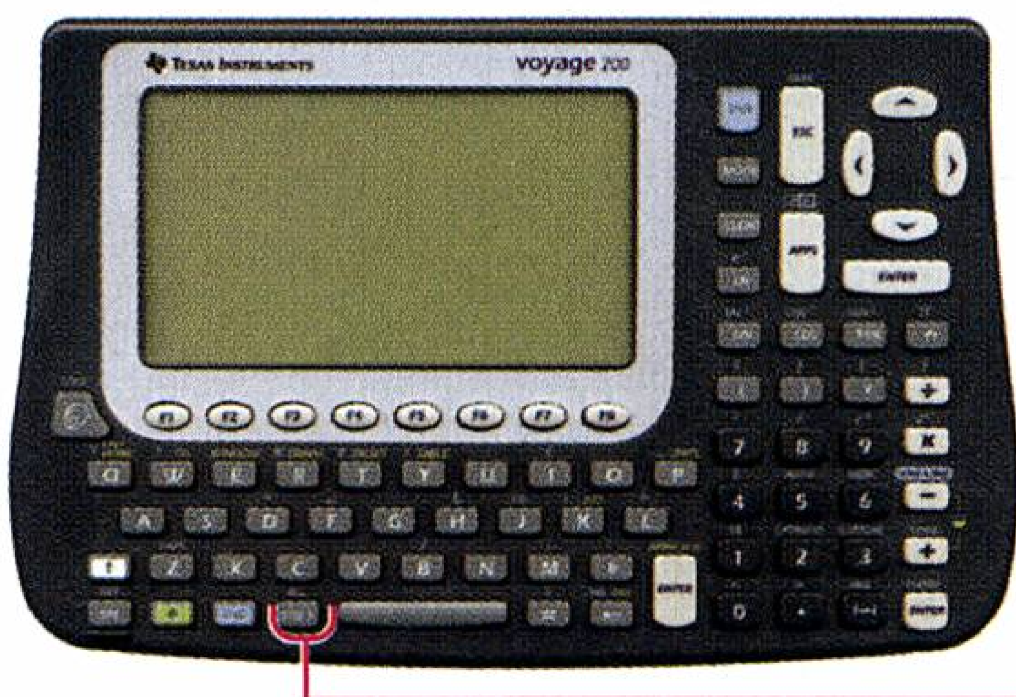


Vektoren werden im TR mit eckigen Klammern dargestellt:

A(0, 1) wird zu [0, 1] [STO▸] a, wobei hier die Punkte mit kleinen Buchstaben versehen werden.

[findet man als Zweitfunktion ([2ND]) der Taste [,],] als Zweitfunktion der Taste [÷].

Die Vektoren erhalten Namen wie: ab, ad, ... ,v1, v2, ...



a) 4. Punkt des Parallelogramms

A(0, 1) speichern auf a.
B(3, 5) speichern auf b.
D(–2, 4) speichern auf d.
$\overrightarrow{AB} = B - A$ speichern auf ab.
$C = D + \overrightarrow{AB}$ speichern auf c.

b) Länge von $\overrightarrow{AB}$:

$|\overrightarrow{AB}|$ = Norm(ab), erreichbar mit [2ND] [MATH] [4] [H] [1][1])

c) Winkelsymmetrale:

$\overrightarrow{AD} = D - A$ speichern auf ad.

$\overrightarrow{AW} = \overrightarrow{AB_0} + \overrightarrow{AD_0}$ speichern auf aw.

EinhV(...) liefert den Einheitsvektor, erreichbar mit
[2ND] [MATH] [4] [L] [1][1])
[◆] [ENTER] liefert die numerische Ausgabe.

d) Mittelpunkt M_{AC}

$M_{AC} = \frac{A+C}{2}$

Löschen der Variablen mit EntfVar Name1, Name2, ..., aufrufbar mit [F4] [4]

[1]) Sie erhalten die Anzeige **Norm(** bzw. **EinhV(** und müssen daher die Eingabe jeweils mit einer schließenden runden Klammer beenden.

7. Trigonometrie

Beispiel:

a) 45° 12' 6'' sind in Grad (mit Komma) umzuwandeln.
b) 62,36° sind in Grad, Minuten und Sekunden umzuwandeln.
c) 45° sind in das Bogenmaß umzuwandeln.
d) $\frac{\pi}{3}$ (rad) sind in Grad umzuwandeln.

Lösung:

Eingabe:

a) 45° 12' 6'' [ENTER] [◆] [ENTER]
b) 62.36° ►GMS [ENTER]
c) 45·(π / 180) [ENTER]
d) π / 3·(180 / π) [ENTER]

```
F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Andere | F5 PrgEA | F6 Lösch
■ 45°12'6"                         27121/600
■ 45°12'6"                           45.2017
■ (62.36°)►GMS                   62°21'36."
■ 45·π/180                               π/4
■ π/3·180/π                               60
π/3*(180/π)
MAIN          GRD AUTO          FKT 5/30
```

Statt ° ' '' zu verwenden, kann man die Umwandlung auch so machen:
Eingabe:

a) 45 +12/60 + 6/3600 [ENTER] [◆] [ENTER]
b) 62.36 – 62 [ENTER]
· 60 [ENTER]
– 21 [ENTER]
· 60 [ENTER]
ergibt: 62° 21' 36''

```
■ 45 + 12/60 + 6/3600              27121/600
■ 45 + 12/60 + 6/3600                45.2017
■ 62.36 - 62                             .36
■ .36·60                                21.6
■ 21.6 - 21                               .6
■ .6·60                                  36.
Antw(1)*60
MAIN          GRD AUTO          FKT 6/30
```

Grundeinstellungen für die Trigonometrie:
[MODE] Winkel ... [▶] 1: BOGENMASS
2: GRAD

Winkelumwandlung

Sonderzeichen am Voyage 200:[1)]
° ..... [2ND] D
' ..... [2ND] B
'' ..... [2ND] L
π ..... [2ND] ^

►GMS wandelt in Grad-Minuten-Sekunden um, erreichbar mit:
[2ND] [MATH] [2] [8]

Grad = Grad + min/60 + sec/3600
min = Kommagrad *60
sec = Kommamin *60

Beispiel:

Von einem rechtwinkeligen Dreieck sind a = 5 cm und A = 15 cm² gegeben. Man berechne **a)** b **b)** c **c)** α **d)** β.

Lösung:

Unter Verwendung der in der Außenspalte angeführten Formeln a) bis d) kann man diese Aufgabe lösen.

Eingabe:

a) 15=5*b/2 [ENTER]
·(2/5) [ENTER]

b) 5^2+6^2=c^2 [ENTER]
[2ND] √ ([▲] [ENTER])
[◆] [ENTER]

```
■ 15 = 5·b/2                      15 = 5·b/2
■ (15 = 5·b/2)·2 / 5                   6 = b
■ 5² + 6² = c²                        61 = c²
■ √(61 = c²)                   7.81025 = |c|
√(61=c^2)
MAIN          GRD AUTO          FKT 4/30
```

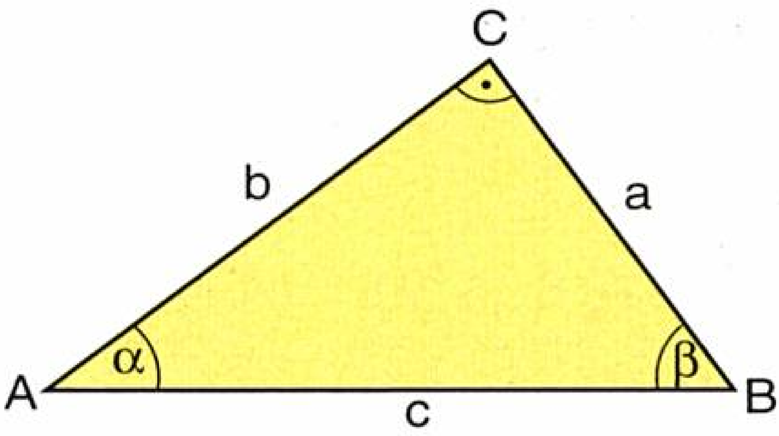
Eingabe:

c) sin(α) =5/7.81025 [ENTER][2)]
[2ND] [SIN⁻¹] ([▲] [ENTER]) [ENTER]

d) β=90 –39.8056 [ENTER]

```
■ √(61 = c²)                   7.81025 = |c|
■ Sin(α) = 5/7.81025        Sin(α) = .640184
■ Sin⁻¹(Sin(α) = .64018437309945)
                     Sin⁻¹(Sin(α)) = 39.8056
■ β = 90 - 39.8056               β = 50.1944
β=90-39.8056
MAIN          GRD AUTO          FKT 4/30
```

Rechtwinkeliges Dreieck



Sonderzeichen am Voyage 200:
α ..... [2ND] G(riechisch) A
β ..... [2ND] G(riechisch) B
γ ..... [2ND] G(riechisch) G

a) $A = \frac{a \cdot b}{2}$ $\Rightarrow b = 6$

b) $a^2 + b^2 = c^2$ $\Rightarrow c = 7{,}81$

c) $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ $\Rightarrow \alpha = 39{,}81°$

d) $\alpha + \beta = 90°$ $\Rightarrow \beta = 50{,}19°$

[1)] [◆] K(eyboard) liefert diese Tastenbelegung.

[2)] Nach Drücken der Taste [SIN] erhalten Sie die Anzeige Sin(und müssen daher nach Eingabe des Winkels eine schließende runde Klammer eingeben. Selbiges gilt analog für die Tasten [COS] und [TAN] sowie bei Verwendung der Zweitfunktionen der Tasten [SIN], [COS] und [TAN].

AUFGABEN

Zahlbereiche und Rechenoperationen / Variable und Terme

1472. Es ist mit dem TR zu berechnen und in normierter Gleitkommaform darzustellen:

a) $\frac{5^4-6^2}{37}$ **b)** $\frac{5^4+6^2}{37}$ **c)** $\frac{5^4+3^2}{37}$ **d)** $\left(\frac{3^4-3^2}{37}\right)^2$

e) $\frac{(3^2+9^4)\cdot 0{,}5}{17512\cdot 15}$ **f)** $\frac{(3^2-9^4)\cdot 0{,}5}{17512\cdot 15}$ **g)** $\frac{(4^2+9^4)\cdot 0{,}5}{17512\cdot 15}$ **h)** $\left(\frac{(4^2+9^4)\cdot 0{,}1}{17516\cdot 12}\right)^2$

1473. Die nachstehenden Ausdrücke sind mit dem TR auf 5 Dezimalstellen zu berechnen:

a) $\sqrt{5\pi}$ **b)** $\sqrt{\frac{\pi}{3}}$ **c)** $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ **d)** $-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$

e) $(5\pi)^{-2}$ **f)** $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{-4}$ **g)** $\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^3$ **h)** $\left(-\frac{3}{4}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)^2\right)^3$

1474. Wie lauten die Einer-, Zehner- und Hunderterziffern der folgenden Ausdrücke?

a) 2^{140} **b)** 3^{120} **c)** $(2^{30})^2$ **d)** $27512\cdot(-2^5)^{-2}$

e) -2^{139} **f)** -3^{119} **g)** $(-2^{30})^3$ **h)** $(-(-3)^{40})^3$

Bei den Aufgaben **1475.** bis **1478.** ist mit Hilfe des TR zu faktorisieren:

1475. a) 17512 **b)** 98987 **c)** 107345 **d)** 345815

e) 987137 **f)** 1256812 **g)** 3487906 **h)** 3986123

1476. a) $x^2-19x+70$ **b)** x^2-x-2

c) $x^2-7x+12$ **d)** x^2-5x+6

e) $15x^2+11xy-12y^2$ **f)** $15x^2+11xy-14y^2$

g) $24a^2+10ab-56b^2$ **h)** $48m^2+30mn-63n^2$

1477. a) $15a^2-62ab+63b^2$ **b)** $4x^2-12x+8$

c) $2x^2-7xy+6y^2$ **d)** $21m^2-29mn-72n^2$

e) $6(a^2-b^2)-4(b-a)$ **f)** $9x^2-12xy+4y^2-36z^2$

g) $(u+v)^2-(w-x)^2$ **h)** $216m^3-1188m^2n+2178mn^2-1331n^3$

1478. a) $x^8 - y^8$ **b)** $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

c) $x^3 - 64y^3$ **d)** $(2x + 3y)(3a + 4b) + (-4b - 3a)(-3y - 2x)$

e) $5x^2 - 125y^2$ **f)** $a^2 - 14ab + 48b^2$

g) $x^2 + 3xy - 28y^2$ **h)** $x^2 - x - y^2 - y$

1479. Wie lauten die letzten 3 Terme des in absteigender Reihenfolge angeschriebenen Ergebnisses?

a) $(x+1)^4$ **b)** $(2x-5)^4$ **c)** $(9x+1)^7$ **d)** $(1-3x)^{12}$

1480. a) $(27y^6 - 9y^5 + 60y^4 + 91y^3 + 5y^2 - 14y) : (9y^2 + 3y - 2)$

b) $20x^8y^3 - 35x^6y^4 - 24x^5y^3 + 42x^3y^4 + 16x^2y^4 - 28y^5) : (4x^2y - 7y^2)$

c) $(5y^9 + 5y^8 + 9y^6 + 6y^5 + 2y^4 + 4y^3 + 2y^2) : (y^3 + y^2 + 1)$

d) $(27a^7b - 5a^3b^2 + 56a^3b^3 + 78a^5b^2 - 9a^5b + 49ab^4 - 7ab^3) : (3a^2 + 7b - 1)$

e) $(48x^5y^2 + 128x^4y^2 - 21x^3y^4 + 24x^4y^3 + 64x^3y^3 - 56x^2y^4) : (8y^2 + 3xy^2)$

f) $(30a^{10} + 45a^9 + 27a^8 + 63a^7 - 21a^6 - 18a^4 - 27a^3 + 21a^2 + 18a - 6) : (6a^2 + 9a - 3)$

g) $(18a^9 + 12a^8 + 39a^7 + 6a^6 - 10a^4 - 19a^3 + 7a^2 + 12a + 5) : (3a^2 + 2a + 5)$

h) $(12x^6y^2 - 10x^5y^4 + 8x^3y^2 - 4x^2y^7 + 18x^6y - 15x^5y^3 + 12x^3y - 6x^2y^6) : (2xy + 3x)$

1481. $f(x) = 7x^3 - 5x^2 - 3x + 1$

a) $f(3)$ **b)** $f(-4)$ **c)** $f\left(\frac{1}{2}\right)$ **d)** $f\left(-\frac{3}{5}\right)$

1482. $f(x) = 8x^5 - 3x^3 - 2x^2 + x + 12$

a) $f(2)$ **b)** $f(-2)$ **c)** $f\left(\frac{1}{3}\right)$ **d)** $f\left(-\frac{3}{4}\right)$

Bei den Aufgaben **1483.** bis **1486.** sind die gegebenen Terme mit Hilfe des TR zu vereinfachen!

1483. a) $\frac{a^3+a^2-9a-9}{a^3+7a^2-9a-63}$ **b)** $\frac{27a^3-9a^2+3a-1}{27a^3-1}$

c) $\frac{27x^3+36x^2y+48xy^2+64y^3}{27x^3-36x^2y+48xy^2-64y^3}$ **d)** $\frac{16a^2+4ab+4ac+bc}{16a^2+4ab-4ac-bc}$

e) $\frac{4x^2+6xy+8x+12y}{4x^2+6xy-8x-12y}$ **f)** $\frac{125m^3-75m^2-20m+12}{25m^2+25m+6}$

g) $\frac{36x^2y+24xy^2-60xyz}{150yz^2-60y^2z-90xyz}$ **h)** $\frac{6x^3y+10x^2y^2+9xy^2+15y^3}{14x^3+21xy+6x^2y+9y^2}$

1484. a) $\frac{11a+2b}{4ab-8b^2} - \frac{9a+2b}{4ab+8b^2} - \frac{8a}{a^2-4b^2}$ **b)** $\frac{a^2}{a-3b} - \frac{108ab^3}{(a+3b)(a^2-9b^2)} - \frac{9b^2(a-3b)}{(a+3b)^2}$

c) $\frac{4a^2}{2a+b} + \frac{8ab^3}{(2a-b)(4a^2-b^2)} - \frac{b^2(2a+b)}{(2a-b)^2}$ **d)** $\frac{a^2}{a+b} - \frac{b^2(a+b)}{(a-b)^2} + \frac{4ab^3}{(a-b)(a^2-b^2)}$

e) $\frac{a^2}{a-b} - \frac{4ab^3}{(a^2-b^2)(a+b)} - \frac{b^2(a-b)}{(a+b)^2}$ **f)** $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(a+b)^2} - \frac{2}{a^2-b^2} - \frac{4(b^2-1)}{(a^2-b^2)^2}$

g) $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{2}{a^2+b^2} + \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{4}{a^2-b^2}$ **h)** $\frac{a^2+ab}{a^2-b^2} - \frac{b^2-ab}{b^2-a^2} + \frac{a^2(a-b)}{a^3-a^2b} - \frac{2a(a^2-b^2)}{a^3-ab^2} - \frac{2b^2}{a^2-b^2}$

1485. **a)** $\left[\left(\frac{b-3}{2}-\frac{b-5}{3}\right):\frac{6}{b+5}\right]:\frac{b^2-25}{6}$ **b)** $\left\{\left[1-\frac{7(x-2)}{x^2-4}\right]:\frac{6}{x+2}\right\}\left(\frac{3}{x+5}+\frac{30}{x^2-25}\right)$

c) $\left(\frac{3x-8y}{4}+\frac{4y^2-9z^2}{3x}\right):\left(\frac{3x-4y}{2x}+\frac{3z}{x}\right)$ **d)** $\left(\frac{x+3y}{9}+\frac{4y^2-9z^2}{16x}\right):\left(\frac{x}{9}+\frac{y}{6}-\frac{z}{4}\right)$

e) $\left(\frac{1}{16}a^4-\frac{1}{64}\right):\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{8}\right):\left(\frac{1}{8}a^2-\frac{1}{16}\right)$ **f)** $\left[\left(x^2-3\frac{1}{2}xy+3y^2\right):\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{2}y^2\right)\right]\left(\frac{2}{3}x+y\right)$

g) $\left[\left(a^2-1\frac{1}{2}ab-b^2\right):\left(\frac{a^2}{8}-\frac{b^2}{2}\right)\right]\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{2}\right)$ **h)** $\left[\left(e^2-1\frac{4}{5}ef-\frac{2}{5}f^2\right):\left(5e^3+\frac{f^3}{25}\right)\right]\left(5e^2-ef+\frac{f^2}{5}\right)$

1486. $\dfrac{\dfrac{x+z}{(x+y)(x+y-z)}+\dfrac{x+z}{(x+y+z)(x+y)}}{\dfrac{x+y+z}{x-y+z}-\dfrac{x-y+z}{x+y+z}}:\dfrac{\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{x}{x+y}}{\dfrac{xy}{x^2-y^2}}$

Lineare Gleichungen in einer Variablen

1487. Ermitteln Sie die Lösungsmenge in $\mathbb{Z}$:

a) $x-7=9$ **b)** $\frac{x}{2}=7$ **c)** $-\frac{x}{3}=-1+\frac{3}{4}$ **d)** $2(x-1)^2=2(x^2-1)$

e) $\frac{x-1}{x+1}=1$ **f)** $\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{2}$ **g)** $-\frac{x-5}{x-3}=4-\frac{x}{2}$ **h)** $3\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)=0$

1488. Ermitteln Sie die Lösungsmenge in $\mathbb{Q}$:

a) $8(x-2)-15(x-7)=9(8-x)+14$ **b)** $4(x-4)-\frac{x+4}{8}=\frac{x+8}{12}-\frac{7x-16}{6}$

c) $\frac{4(x-12)}{5}-\frac{5(6-x)}{3}=8\left(\frac{9(x+1)}{5}-\frac{x+2}{15}\right)$ **d)** $\frac{5}{x+3}=4$

e) $\frac{x^2+x+1}{x^2-1}-\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}+\frac{x^2-x+1}{x^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}+\frac{2x-4}{x^4-1}-1$ **f)** $\dfrac{\dfrac{x^2+7x+10}{x^2+x-6}}{\dfrac{2x^2+7x+6}{x^2-x-12}}=\dfrac{x-4}{x-2}$

g) $\dfrac{\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{3}{x-2}}{\dfrac{2(4x+7)}{x^2+x-6}}=\dfrac{x}{2}$ **h)** $\dfrac{\dfrac{x^3}{8}+\dfrac{1}{27}}{\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}}=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{9}$

Relationen und Funktionen

1489. Die folgenden Relationen bzw. Funktionen sind in „ZoomDez" zu zeichnen. Aus der Zeichnung ist jeweils der Schnittpunkt mit der **(1)** x-Achse **(2)** y-Achse abzulesen.

a) $y=3x+\frac{1}{2}$ **b)** $y=x^2-5$ **c)** $y=-x^2+1$ **d)** $y=\frac{x^2}{2}+2x+1$

e) $y=x^3-5x^2+6x+1$ **f)** $y=x^3-2x^2+x-1$ **g)** $y=x^4+x^2+3$ **h)** $x^2+y^2=9$

Anleitung zu h): Die Gleichung ist nach y aufzulösen, wobei es zwei Funktionsgleichungen gibt ($y=+\sqrt{9-x^2}$ und $y=-\sqrt{9-x^2}$), die man nacheinander im Y=-Bildschirm eingibt.

1490. Die Funktionen mit den gegebenen Gleichungen sind über einem selbstgewählten Intervall grafisch darzustellen. Hierfür erstelle man jeweils die Wertetabelle und suche nach Nullstellen und Extremwerten.

a) $y=x^2-5x$ **b)** $y=x^2-x-12$ **c)** $y=\frac{1}{10}(5x^2-12x-99)$

d) $y=\frac{1}{5}(x^3-2x^2-15x)$ **e)** $y=\frac{1}{50}(8x^3+12x^2+17x)$ **f)** $y=\frac{1}{2}(x^4-6x^2+9)$

g) $y=\frac{1}{8}(3x^3+7x^2-7x-3)$ **h)** $y=\frac{1}{20}(8x^4+14x^3-69x^2+14x+8)$

1491. Die Relationen mit den gegebenen Gleichungen sind über einem selbstgewählten Intervall grafisch darzustellen. Hierfür erstelle man jeweils die Wertetabelle und suche nach Nullstellen und Extremwerten.

a) $y^2 = x^4$ **b)** $y^2 = x^2(x-1)$ **c)** $y^2 = 9x^2 - x^4$

d) $4y^2 = 9x^2 + x^3$ **e)** $3y^2 = -9x^2 + 4x^3$ **f)** $y^2 = \frac{(x+3)^3}{27}$

g) $y^2x + 1 = x - y^2$ **h)** $y^2 = x^2 \cdot \frac{x-1}{x+1}$

Lineare Gleichungssysteme

Die Aufgaben **1492.** und **1493.** sind über der maximalen Grundmenge zu lösen!

1492. a)
$$\begin{aligned} 3{,}1x - 2y &= 4 \\ 17x - y &= 5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 0{,}1x - \frac{y}{3} &= \frac{2}{7} \\ \frac{x}{5} - 0{,}12y &= 0{,}12 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3{,}14x - 2{,}71y &= 1{,}41 \\ 2{,}71x - 3{,}14y &= 1{,}73 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2{,}1x - 3y + 5z &= 3{,}4 \\ 12x - y + 1{,}2z &= -17{,}1 \\ 0{,}1x - 1{,}4y - z &= 9 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} \frac{x}{7} + \frac{y}{3} &= 9 \\ \frac{y}{2} + \frac{z}{5} &= 7 \\ x - z &= 0{,}2 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 8 \\ 3x + y - 2z &= 7 \\ 8x - 2y + 2z &= 29 \end{aligned}$$

1493. a)
$$\begin{aligned} 9x + 2y + 2z + 5w &= 59 \\ 5x - 8y + 6z + 7w &= 16 \\ 4x + 10y + 8z + 5w &= 64 \\ 3x - 9y + 5z + 3w &= -4 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 10x + 8y - 8z + 3w &= 98 \\ 8x + 6y - 8z + 5w &= 84 \\ 7x + 5y - 3z + 2w &= 66 \\ 5x + 3y - 2z + w &= 41 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 9x + 7y + 3z - 3w &= 16 \\ 3x + 5y + 5z - 4w &= 10 \\ 2x - 2y + 8z - 7w &= 2 \\ 5x - 3y + 9z - 8w &= 4 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x - 3y - 4z - 5w &= -19 \\ 2x - 5z + 3w &= -2 \\ 5x + 2y + 7w &= 21 \\ 5x - 2y + 7z - 9w &= -1 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3z + 4u - 5w &= 6 \\ x + 3y - 2z - 7u + 8w &= 3 \\ 9x + 3y - 2z + 5u - 6w &= 9 \\ 2x + 5y - 8z + 9u + 3w &= 11 \\ x + y + z + u - w &= 3 \end{aligned}$$

Vektorrechnung

1494. Gegeben sind 3 Punkte von einem Parallelogramm ABCD:
A(0, 0), B(4, 3), D(–1, 4).
Gesucht ist
a) der vierte Punkt C (mit Hilfe des Vektors $\overrightarrow{AB}$)
b) die Länge der Seite $\overline{AB}$
c) ein Vektor in Richtung der Winkelsymmetralen von α und
d) der Mittelpunkt M des Parallelogramms.

1495. Text wie Aufgabe **1494.** für A(–7, 7), B(5, –1), D(–3, 4).

1496. Gegeben sind die drei Eckpunkte eines Dreiecks: A(–2, –2), B(2, 0),C(0, 5).
Gesucht ist **a)** der Mittelpunkt M_{AB} der Seite AB **b)** der Schwerpunkt S des Dreiecks **(1)** mittels einer händischen Zeichnung **(2)** mittels Berechnung am Voyage 200.

Trigonometrie

1497. Die nachstehende Tabelle ist zu vervollständigen:

	Dezimalgrad	Grad-Minuten -Sekunden	Bogenmaß		Dezimalgrad	Grad-Minuten -Sekunden	Bogenmaß
a)	89,431°			**b)**		3° 11' 19''	
c)		15° 12' 13''		**d)**			0,4
e)			$\frac{\pi}{8}$	**f)**	23,321°		
g)	17,342°			**h)**		45° 13' 10''	

1498. Um sin 13° mit dem grafischen Taschenrechner zu berechnen, ist nicht [1] [3] [SIN] zu drücken, sondern folgende Eingabe zu tätigen: [SIN] [1] [3] [)] [ENTER].

Und um umgekehrt den Winkel α von $\sin\alpha = 0{,}5$ zu berechnen, ist [2ND] [SIN⁻¹] [.] [5] [)] [ENTER] einzugeben!

Die nachstehende Tabelle ist zu vervollständigen ($0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$):

	Sinus	Kosinus	Tangens		Sinus	Kosinus	Tangens
a)	$\sin\alpha = 0{,}5$	$\cos\alpha = ?$	$\tan\alpha = ?$	**b)**	$\sin\alpha = ?$	$\cos\alpha = 0{,}20791$	$\tan\alpha = ?$
c)	$\sin\alpha = ?$	$\cos\alpha = 0{,}84805$	$\tan\alpha = ?$	**d)**	$\sin\alpha = ?$	$\cos\alpha = ?$	$\tan\alpha = -0{,}42070$
e)	$\sin\alpha = ?$	$\cos\alpha = ?$	$\tan\alpha = 1{,}48256$	**f)**	$\sin\alpha = 1$	$\cos\alpha = ?$	$\tan\alpha = ?$
g)	$\sin\alpha = 0{,}9$	$\cos\alpha = ?$	$\tan\alpha = ?$	**h)**	$\sin\alpha = ?$	$\cos\alpha = 0{,}5$	$\tan\alpha = ?$

1499. Von einem rechtwinkeligen Dreieck sind gegeben: $a = 3$ cm und $A = 15$ cm^2.

Berechnen Sie b, c, α, β!

Sonderzeichen am Voyage 200:

α ..... [2ND] G(riechisch) A

β ..... [2ND] G(riechisch) B

γ ..... [2ND] G(riechisch) G

1500. Geheimnachricht:

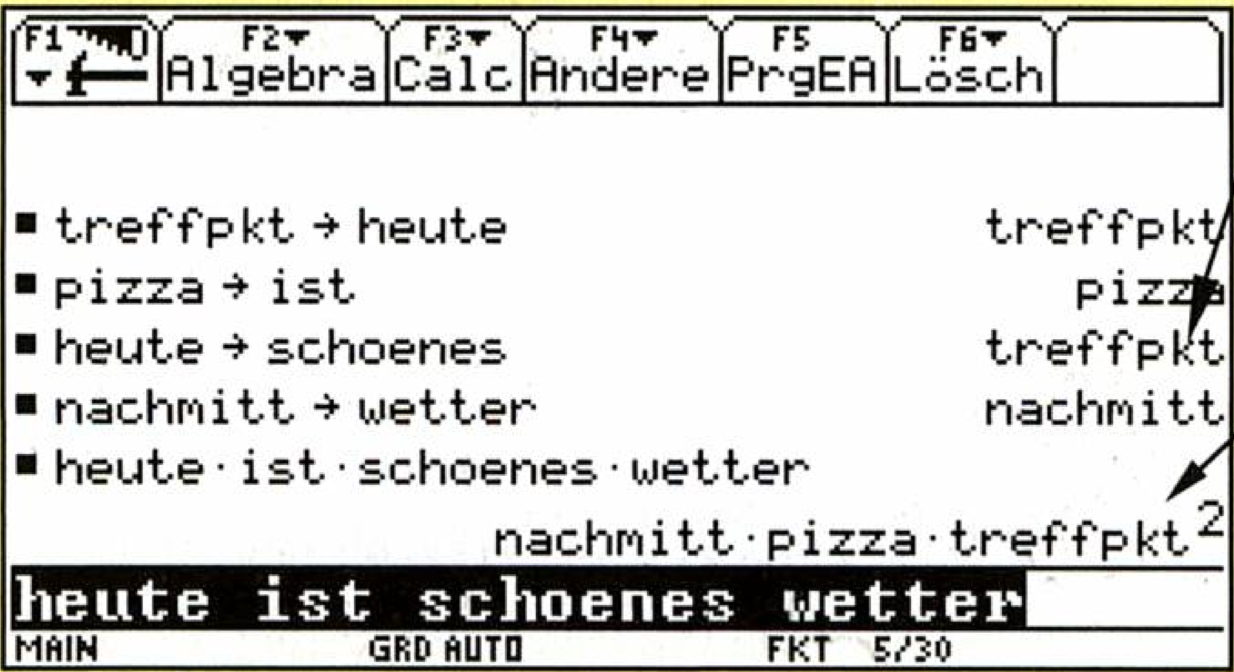
Man schreibe eine GEHEIMNACHRICHT (mit Hilfe des Speicherns von Namen auf Variablen), so dass mit Eingabe von „Heute ist schönes Wetter" die Nachricht „Treffpunkt Pizza heute nachmittag" erscheint.

Anleitung:

Eingabe:

treffpkt [STO▸] heute [ENTER]
pizza [STO▸] ist [ENTER]
heute [STO▸] schoenes [ENTER]
nachmitt [STO▸] wetter [ENTER]

Aufruf: mit Eingabe des ursprünglichen Satzes (eventuell nach dem Löschen der Eingabe)



Hier erfolgt nicht die richtige Zuweisung von „heute" an „schoenes", weil schon vorher „treffpkt" an „heute" zugewiesen wurde

(treffpkt → heute → schoenes)

Darum scheint „treffpkt" 2-mal in der Ausgabezeile (in Potenzschreibweise) auf.

Wie kann man das verbessern?

ZUSAMMENSTELLUNG WICHTIGER FORMELN

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$a^0 = 1$	$a^1 = a$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Klammerregeln:

$$a + (b + c) = a + b + c$$
$$a + (b - c) = a + b - c$$
$$a - (b + c) = a - b - c$$
$$a - (b - c) = a - b + c$$

Quadrieren und Kubieren von Binomen:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

CRAMERsche Regel: $(D \neq 0)$

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D}, \quad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{D}, \quad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Allgemeines Dreieck:

$$A = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

für $s = \frac{a+b+c}{2}$

Rechtwinkeliges Dreieck:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 = cp \qquad b^2 = cq \qquad h^2 = pq$$

$$A = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$$

Gleichschenkeliges Dreieck:

$$h_c = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

$$A = \frac{ch_c}{2}$$

$$A = \frac{c}{4}\sqrt{4a^2 - c^2}$$

$a = b, \alpha = \beta$

Gleichseitiges Dreieck:

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

$a = b = c, \alpha = \beta = \gamma$

Quadrat:

$d = a\sqrt{2}$

$A = a^2$

Rechteck:

$d = \sqrt{a^2 + b^2}$

$A = ab$

Parallelogramm:

$A = ah_a = bh_b$

Rhombus:

$A = ah = \frac{ef}{2}$

Trapez:

$m = \frac{a+c}{2}$

$A = mh = \frac{a+c}{2}h$

Gleichschenkeliges Trapez:

$m = \frac{a+c}{2}$

$A = mh = \frac{a+c}{2}h$

$h^2 = b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2$

$e^2 = h^2 + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2$

(b=d, e=f)

Vierecke mit aufeinander normal stehenden Diagonalen:

Quadrat:

$A = \frac{d^2}{2}$

Rhombus:

$A = \frac{ef}{2}$ $\qquad a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2$

Deltoid:

$A = \frac{ef}{2}$ $\qquad (a = d,\ b = c)$

Kreis:

$u = 2\pi r = \pi d$

$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$

Kreissektor:

Kreisbogen $b = \frac{\pi r \alpha}{180°}$

$A = \frac{br}{2} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360°}$

(α in Grad)

Kreisring:

$u = 2\pi(r_1 + r_2)$

$A = \pi(r_1^2 - r_2^2) =$

$= \pi(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$

Würfel:

$V = a^3$

$O = 6a^2$

$d = a\sqrt{3}$

Quader:

$V = abc$

$O = 2(ab + ac + bc)$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Prisma:

$V = Gh$

$M = uh$

$O = 2G + M$

Drehzylinder:

$V = \pi r^2 h$

$M = 2\pi rh$

$O = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$

Pyramide:

$V = \frac{Gh}{3}$

$O = G + M$

Gerade quadratische Pyramide:

$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_a^2$

$h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2$

$h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = s^2$

$V = \frac{a^2 h}{3}$ $O = a^2 + 2ah_a$

Drehkegel:

$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

$O = \pi r^2 + \pi rs = \pi r(r + s)$

$s = \sqrt{r^2 + h^2}$

Drehkegelstumpf:

$V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

$s = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

$O = \pi[s(r_1 + r_2) + r_1^2 + r_2^2]$

Kugel:

$V = \frac{4\pi r^3}{3}$

$O = 4\pi r^2$

Pyramidenstumpf:

$V = \frac{h}{3}(G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2)$

$O = G_1 + G_2 + M$

Vektoren:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ $\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \end{pmatrix}$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ $c \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_x \\ c \cdot a_y \end{pmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$

Einheitsvektor: $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Im rechtwinkeligen Dreieck gilt:

$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$

$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$

Prismatoid:

$V = \frac{h}{6}(G_1 + 4G_m + G_2)$

$O = G_1 + G_2 + M$

Schräg abgeschnittener gerader Drehzylinder:

$V = \pi r^2 \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} = \pi r^2 \cdot \overline{M_1M_2}$

$M = \pi r (h_1 + h_2)$

$G_s = \pi r a = \frac{\pi r^2}{\cos\alpha}$

$O = \pi r^2 + G_s + M$

Wichtige Zahlenmengen

$\mathbb{N}$	$= \{0, 1, 2, 3, ...\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}^*$	$= \{1, 2, 3, ...\}$	Menge der natürlichen Zahlen mit Ausnahme der Zahl 0
$\mathbb{N}_u$	$= \{1, 3, 5, ...\}$	Menge der ungeraden natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_g$	$= \{0, 2, 4, 6, ...\}$	Menge der geraden natürlichen Zahlen
$\mathbb{P}$	$= \{2, 3, 5, 7, ...\}$	Menge der Primzahlen
$\mathbb{Z}$	$= \{..., -2, -1, 0, +1, +2, ...\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	$= \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\right\}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{I}$		Menge der irrationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	$= \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$	Menge der reellen Zahlen

Griechisches Alphabet

Buchstabe		Name	Wiedergabe in Antiqua		Buchstabe		Name	Wiedergabe in Antiqua		Buchstabe		Name	Wiedergabe in Antiqua	
Α	α	Alpha	A	a	Ι	ι	Jota	I	i	Ρ	ρ	Rho	R(h)	r(h)
Β	β	Beta	B	b	Κ	κ	Kappa	K	k	Σ	σ	Sigma	S	s
Γ	γ	Gamma	G	g	Λ	λ	Lambda	L	l	Τ	τ	Tau	T	t
Δ	δ	Delta	D	d	Μ	μ	My	M	m	Υ	υ	Ypsilon	Y	y
Ε	ε	Epsilon	E	e	Ν	ν	Ny	N	n	Φ	φ	Phi	Ph	ph
Ζ	ζ	Zeta	Z	z	Ξ	ξ	Xi	X	x	Χ	χ	Chi	Ch	ch
Η	η	Eta	Ẽ	ẽ	Ο	ο	Omikron	O	o	Ψ	ψ	Psi	Ps	ps
Θ	ϑ	Theta	Th	th	Π	π	Pi	P	p	Ω	ω	Omega	Ō	ō

SACHWORTVERZEICHNIS

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

W

X

Y

Z

LEHRSTOFFÜBERSICHT

Der folgenden Zusammenstellung ist zu entnehmen, in welchen Jahrgängen der Höheren technischen und gewerblichen bzw. Höheren land- und forstwirtschaftlichen Lehranstalten die betreffenden Abschnitte des Werkes lehrplanmäßig vorgesehen sind. Bei im Lehrplan nicht expressis verbis angeführten Themenbereichen, deren Behandlung aber für das Verständnis anderer Abschnitte bzw. zur Erreichung des Bildungszieles vorteilhaft erscheint, findet sich der Jahrgangshinweis in eckiger Klammer.

	(1)	(2)	(3)
Wiederholung und Vertiefung mathematischer Grundbegriffe	1.	1.	1.
Mengenlehre vom elementaren Standpunkt aus	1.	1.	1.
Zahlbereiche und Rechenoperationen	1.	1.	1.
Rechnen mit Variablen und Termen	1.	1.	1.
Lineare Gleichungen und Ungleichungen in einer Variablen	1.	1.	1.
Relationen und Funktionen	1.	1.	1.
Lineare Gleichungssysteme	1.	1.	1.
Verhältnisse und Proportionen	1.	1.	1.
Planimetrie (Geometrie der Ebene)	1.	1.	1.
Stereometrie (Geometrie des Raumes)	1.	1.	1.
Vektorrechnung	1.	—	1.
Trigonometrie	1.	2.	2.
Bautechnische Anwendungen der Stereometrie und Trigonometrie	[1.]	—	—
Moderne Hilfsmittel in der Mathematik: der TI-92	1.	[1.]	[1.]

(1) Höhere technischen und gewerbliche Lehranstalten (Anlage 1)

(2) Höhere Lehranstalt für allgemeine Landwirtschaft (Anlage 1.1)
Höhere Lehranstalt für alpenländische Landwirtschaft (Anlage 1.2)
Höhere Lehranstalt für Wein- und Obstbau (Anlage 1.3)
Höhere Lehranstalt für Gartenbau
- Ausbildungszweig: Garten- und Landschaftsgestaltung (Anlage 1.4)
- Ausbildungszweig: Erwerbsgartenbau (Anlage 1.5)

Höhere Lehranstalt für Milchwirtschaft und Lebensmitteltechnologie (Anlage 1.9)

(3) Höhere Lehranstalt für Landtechnik (Anlage 1.6)
Höhere Lehranstalt für Forstwirtschaft (Anlage 1.7)

Anlagenverweise beziehen sich auf die Verordnung des Bundesministers für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten über die Lehrpläne für Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten, BGBl. Nr. 302/1997, sowie auf die Verordnung des Bundesministers für Unterricht, Kunst und Sport über die Lehrpläne für Höhere land- und forstwirtschaftliche Lehranstalten, BGBl. Nr. 491/1988, jeweils in der geltenden Fassung. In den Lehrplänen 2004 der Höheren land- und forstwirtschaftlichen Lehranstalten ist der Lehrstoff keinen bestimmten Jahrgängen zugeordnet.

An technischen, gewerblichen und kunstgewerblichen Fachschulen sowie an Vorbereitungslehrgängen bzw. Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten für Berufstätige erfolgt die Lehrstoffauswahl gemäß dem für die jeweilige Fachrichtung bzw. für den jeweiligen Ausbildungszweig geltenden Lehrplan.